Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1948)

Heft: 3

Artikel: Esquisse d'une théorie de l'équerre

Autor: Rossier, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13572

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band III Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 15. Mai 1948

Esquisse d'une théorie de l'équerre

1. L'équerre du dessinateur est un triangle rectangle matériel; celle du mathématicien est un angle matériel, qui peut être droit ou pas.

2. Pour obtenir une précision satisfaisante de ses tracés, le dessinateur n'utilise l'équerre que dans les deux opérations suivantes, que nous appellerons *ordinaires:*

placer un côté de l'équerre sur une droite donnée et un côté de l'équerre étant appliqué contre une règle, glisser l'équerre le long de la règle, de façon à faire passer le second côté par un point donné.

Si l'on se borne à ces deux opérations, l'équerre permet de mener par un point donné la parallèle à une droite donnée et de construire une droite faisant avec une droite donnée un angle donné fixe, celui de l'équerre. En combinant ces deux opérations, on peut construire une paire de triangles isocèles de même base donnée; leurs sommets déterminent une perpendiculaire à la base. Une équerre d'angle quelconque permet donc le tracé de perpendiculaires.

Puisqu'on peut mener des parallèles, il est possible de reporter un segment donné sur une parallèle à son support, et, par répétition, sur le support lui-même; l'origine du nouveau segment peut être donnée.

Le fait de pouvoir mener des perpendiculaires permet la construction de deux angles égaux adjacents, donc celle d'un multiple entier quelconque d'un angle donné. On peut encore déterminer le centre d'un cercle tracé ou donné par trois points.

On sait[1]) que les constructions précédentes sont réalisables avec la règle seule si l'on donne dans le plan un parallélogramme et deux angles droits distincts, c'est-à-dire de côtés obliques l'un sur l'autre, ou si l'on donne deux rectangles non parallèles. Le report général d'un segment est irréalisable dans les deux cas. La géométrie des opérations ordinaires de l'équerre est donc identique à celle de la paire de rectangles distincts.

Remarquons que dans ce qui précède, il n'est fait aucun usage du sommet de l'équerre.

3. Supposons que l'angle donné de l'équerre soit égal à 45°. La bissectrice de tout angle droit et un carré sont constructibles. La géométrie de l'équerre ordinaire à 45° est donc identique à la géométrie du carré de STEINER[2]). Si l'équerre est à 60°, on a une géométrie de l'hexagone régulier peu différente de celle du carré.

Ce qui précède montre que, en limitant l'emploi de l'équerre aux deux opérations ordinaires, la puissance d'une équerre à 45° ou à 60° est supérieure à celle d'une

[1]) ENRIQUÈS, *Questioni riguardanti le matematiche elementare*, II, 3e édition, p. 202.

[2]) *Die geometrischen Konstruktionen*, Erstes Kapitel, II C.

équerre rectangle. Cette restriction tombe si l'on admet d'autres opérations. Elle subsisterait cependant pour une équerre d'angle égal à $\pi/7$ par exemple.

4. STEINER a montré que toutes les constructions réalisables avec la règle et le compas le sont avec la règle seule si un cercle et son centre sont donnés. La donnée du centre est indispensable. Elle devient inutile si à la règle on ajoute une équerre, puisque celle-ci permet la construction du centre du cercle circonscrit à un triangle.

5. Aux opérations ordinaires, adjoignons la suivante, que nous appellerons le *glissement limité:*

faire glisser un côté d'une équerre le long d'une droite, de façon à amener un point fixe de ce côté, distinct du sommet, en un point donné de la droite.

Il est alors possible de construire la bissectrice d'un angle quelconque. Pour cela, on effectue un glissement limité au sommet de l'angle et on mène une droite par l'autre côté de l'équerre; cette opération étant faite sur les deux côtés de l'angle, l'intersection des deux droites ainsi obtenues appartient à la bissectrice.

On peut alors reporter un segment d'une droite sur une autre quelconque par abaissement de perpendiculaires sur une bissectrice et effectuer la première construction d'un triangle rectangle (les deux cathètes étant données). La première de ces constructions revient à déterminer l'intersection d'un cercle avec un de ses diamètres. L'intersection d'un cercle et d'une droite quelconque n'est pas possible.

HILBERT a montré[1]) que l'ensemble des opérations ci-dessus est équivalent aux constructions réalisables avec une règle et un transporteur de segments de longueur fixe. Cette géométrie est dite parfois géométrie de l'empan. On ne lui ajoute rien en autorisant le transport d'un segment quelconque, par une bandelette, une règle graduée ou un compas à pointes mousses, par exemple.

6. Enfin, aux opérations précédentes, on peut ajouter la suivante, que nous appellerons l'*inscription* de l'équerre: faire passer les deux côtés de l'équerre par deux points donnés et amener son sommet sur une droite donnée.

Le lieu du sommet est évidemment un cercle. L'inscription donne la solution du problème de l'intersection d'une droite et d'un cercle de centre et de rayon donnés. Soit en effet un cercle de centre C passant par un point A. Construisons la paire de droites CM et CN inclinées sur CA de l'angle de l'équerre. Sur CM et CN, reportons le rayon CA en M' et N'. Inscrivons l'équerre sur M', N' et la droite donnée. Le sommet donne l'intersection cherchée.

Le second problème du triangle rectangle (hypoténuse et une cathète données) est désormais soluble. L'équerre, si l'on admet le glissement limité et l'inscription en plus des deux opérations ordinaires acquiert la même puissance que le compas ou ses équivalents.

7. Deux équerres rectangles donnent la duplication du cube. Il est facile de généraliser: toute équation algébrique de degré n peut être résolue graphiquement au moyen de $n-1$ équerres rectangles.

Cette proposition résulte immédiatement du procédé de LILL[2]) pour la solution graphique des équations algébriques. Soit un système de coordonnées rectangulaires. Décrivons un carré de côtés parallèles aux axes et numérotons ses côtés dans un sens donné: 0, 1, 2, ... Chaque côté porte plusieurs numéros.

---

[1]) *Grundlagen der Geometrie*, § 36.

[2]) Résolution graphique..., *Nouvelles Annales de mathématiques*, 2e série, VI et VII (1867/68).

Soit un polynôme $$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n .$$

Construisons le vecteur $M_0 M_1$ de longueur a_0, parallèle au côté 0 du carré, avec conservation ou changement de sens suivant que a_0 est positif ou négatif. Par l'extrémité M_1 de $M_0 M_1$, menons le vecteur $M_1 M_2$, construit de la même façon que le précédent, mais relativement au coefficient a_1 et au côté 1 du carré. Continuons de même jusqu'à $M_n M_{n+1}$ relatif à a_n. On obtient une ligne polygonale rectangulaire $M_0 M_1 M_2 \ldots M_{n+1}$.

Pour voir si z est racine de $f(x)$, menons par M_0 une droite de coefficient angulaire z; elle coupe le support de $M_1 M_2$ en un point Z_1, tel que $M_1 Z_1 = a_0 z$; on a $M_2 Z_1 = a_0 z + a_1$. Par Z_1, menons la perpendiculaire à $M_0 Z_1$; elle coupe le support de $M_2 M_3$ en Z_2 et on a $M_3 Z_2 = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$. Continuons de même. On obtient finalement un segment $M_{n+1} Z_n = f(z)$. La ligne polygonale rectangulaire $M_0 Z_1 Z_2 \ldots Z_n$ est appelée l'*orthogone* relatif à $f(x)$ et à z. Si M_{n+1} et Z_n sont confondus, l'orthogone est fermé et $f(z) = 0$.

En principe, l'orthogone est réalisable matériellement par une règle (ou un bord d'équerre rectangle) placée suivant $M_0 Z_1$ et $n-1$ équerres rectangles ayant leurs sommets en $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$. Pratiquement, cela est malcommode et on opère avec un transparent quadrillé.

La solution d'une équation irréductible de degré n n'exige pas nécessairement $n-1$ équerres; par exemple, par des opérations rationnelles et des racines carrées, on ramène l'équation de degré 4 à une équation cubique.

Dans ce qui précède, l'orthogonalité des axes n'est pas essentielle ainsi qu'on le voit en exprimant projectivement les relations entre les axes et les côtés de l'orthogone; des relations d'harmonicité s'introduisent ainsi à la place de celles d'orthogonalité.

8. La théorie précédente possède un parallèlisme remarquable avec celle de certains corps de nombres, ainsi que le montre le tableau ci-dessous.

Opérations de l'équerre	*Corps correspondants*
Ordinaires	Nombres rationnels
Ordinaires et glissement limité	Nombres rationnels et racine carrée de la somme de deux carrés
Ordinaires, glissement limité et inscription	Nombres rationnels et racine carrée de la somme et la différence de deux carrés
Equerres en nombre quelconque	Nombres algébriques

La transcendance de π montre enfin l'impossibilité de la quadrature du cercle au moyen d'un nombre quelconque d'équerres.

PAUL ROSSIER, Genève.

Sulle cubiche razionali

I teoremi sull'involuzione I_3^2 in un campo binario da me recentemente stabiliti[1]) si prestano immediatamente a svariate applicazioni particolarizzando il sostegno (razionale) della I_3^2 stessa. Così, ad esempio, supponendo tale sostegno una cubica

[1]) Vedasi: A. LONGHI, *Sulle involuzioni cubiche di 2^a specie*, Elemente der Mathematik, Bd. II, Nr. 2, 1947. Tale lavoro verrà in seguito citato con la semplice indicazione «I_3^2».