

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 3 (1948)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Esquisse d'une théorie de l'équerre  
**Autor:** Rossier, Paul  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13572>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math.

Band III

Nr. 3

Seiten 49–72

Basel, 15. Mai 1948

## Esquisse d'une théorie de l'équerre

1. L'équerre du dessinateur est un triangle rectangle matériel; celle du mathématicien est un angle matériel, qui peut être droit ou pas.

2. Pour obtenir une précision satisfaisante de ses tracés, le dessinateur n'utilise l'équerre que dans les deux opérations suivantes, que nous appellerons *ordinaires*:

placer un côté de l'équerre sur une droite donnée et un côté de l'équerre étant appliqué contre une règle, glisser l'équerre le long de la règle, de façon à faire passer le second côté par un point donné.

Si l'on se borne à ces deux opérations, l'équerre permet de mener par un point donné la parallèle à une droite donnée et de construire une droite faisant avec une droite donnée un angle donné fixe, celui de l'équerre. En combinant ces deux opérations, on peut construire une paire de triangles isocèles de même base donnée; leurs sommets déterminent une perpendiculaire à la base. Une équerre d'angle quelconque permet donc le tracé de perpendiculaires.

Puisqu'on peut mener des parallèles, il est possible de reporter un segment donné sur une parallèle à son support, et, par répétition, sur le support lui-même; l'origine du nouveau segment peut être donnée.

Le fait de pouvoir mener des perpendiculaires permet la construction de deux angles égaux adjacents, donc celle d'un multiple entier quelconque d'un angle donné. On peut encore déterminer le centre d'un cercle tracé ou donné par trois points.

On sait<sup>1)</sup> que les constructions précédentes sont réalisables avec la règle seule si l'on donne dans le plan un parallélogramme et deux angles droits distincts, c'est-à-dire de côtés obliques l'un sur l'autre, ou si l'on donne deux rectangles non parallèles. Le report général d'un segment est irréalisable dans les deux cas. La géométrie des opérations ordinaires de l'équerre est donc identique à celle de la paire de rectangles distincts.

Remarquons que dans ce qui précède, il n'est fait aucun usage du sommet de l'équerre.

3. Supposons que l'angle donné de l'équerre soit égal à  $45^\circ$ . La bissectrice de tout angle droit et un carré sont constructibles. La géométrie de l'équerre ordinaire à  $45^\circ$  est donc identique à la géométrie du carré de STEINER<sup>2)</sup>. Si l'équerre est à  $60^\circ$ , on a une géométrie de l'hexagone régulier peu différente de celle du carré.

Ce qui précède montre que, en limitant l'emploi de l'équerre aux deux opérations ordinaires, la puissance d'une équerre à  $45^\circ$  ou à  $60^\circ$  est supérieure à celle d'une

<sup>1)</sup> ENRIQUÈS, *Questioni riguardanti le matematiche elementare*, II, 3<sup>e</sup> édition, p. 202.

<sup>2)</sup> *Die geometrischen Konstruktionen*, Erstes Kapitel, II C.

équerre rectangle. Cette restriction tombe si l'on admet d'autres opérations. Elle subsisterait cependant pour une équerre d'angle égal à  $\pi/7$  par exemple.

4. STEINER a montré que toutes les constructions réalisables avec la règle et le compas le sont avec la règle seule si un cercle et son centre sont donnés. La donnée du centre est indispensable. Elle devient inutile si à la règle on ajoute une équerre, puisque celle-ci permet la construction du centre du cercle circonscrit à un triangle.

5. Aux opérations ordinaires, adjoignons la suivante, que nous appellerons le *glissement limité*:

faire glisser un côté d'une équerre le long d'une droite, de façon à amener un point fixe de ce côté, distinct du sommet, en un point donné de la droite.

Il est alors possible de construire la bissectrice d'un angle quelconque. Pour cela, on effectue un glissement limité au sommet de l'angle et on mène une droite par l'autre côté de l'équerre; cette opération étant faite sur les deux côtés de l'angle, l'intersection des deux droites ainsi obtenues appartient à la bissectrice.

On peut alors reporter un segment d'une droite sur une autre quelconque par abaissement de perpendiculaires sur une bissectrice et effectuer la première construction d'un triangle rectangle (les deux cathètes étant données). La première de ces constructions revient à déterminer l'intersection d'un cercle avec un de ses diamètres. L'intersection d'un cercle et d'une droite quelconque n'est pas possible.

HILBERT a montré<sup>1)</sup> que l'ensemble des opérations ci-dessus est équivalent aux constructions réalisables avec une règle et un transporteur de segments de longueur fixe. Cette géométrie est dite parfois géométrie de l'empan. On ne lui ajoute rien en autorisant le transport d'un segment quelconque, par une bandelette, une règle graduée ou un compas à pointes mousses, par exemple.

6. Enfin, aux opérations précédentes, on peut ajouter la suivante, que nous appellerons l'*inscription* de l'équerre: faire passer les deux côtés de l'équerre par deux points donnés et amener son sommet sur une droite donnée.

Le lieu du sommet est évidemment un cercle. L'inscription donne la solution du problème de l'intersection d'une droite et d'un cercle de centre et de rayon donnés. Soit en effet un cercle de centre  $C$  passant par un point  $A$ . Construisons la paire de droites  $CM$  et  $CN$  inclinées sur  $CA$  de l'angle de l'équerre. Sur  $CM$  et  $CN$ , reportons le rayon  $CA$  en  $M'$  et  $N'$ . Inscrivons l'équerre sur  $M'$ ,  $N'$  et la droite donnée. Le sommet donne l'intersection cherchée.

Le second problème du triangle rectangle (hypoténuse et une cathète données) est désormais soluble. L'équerre, si l'on admet le glissement limité et l'inscription en plus des deux opérations ordinaires acquiert la même puissance que le compas ou ses équivalents.

7. Deux équerres rectangles donnent la duplication du cube. Il est facile de généraliser: toute équation algébrique de degré  $n$  peut être résolue graphiquement au moyen de  $n - 1$  équerres rectangles.

Cette proposition résulte immédiatement du procédé de LILL<sup>2)</sup> pour la solution graphique des équations algébriques. Soit un système de coordonnées rectangulaires. Décrivons un carré de côtés parallèles aux axes et numérotions ses côtés dans un sens donné: 0, 1, 2, ... Chaque côté porte plusieurs numéros.

<sup>1)</sup> *Grundlagen der Geometrie*, § 36.

<sup>2)</sup> Résolution graphique..., *Nouvelles Annales de mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, VI et VII (1867/68).

Soit un polynôme

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Construisons le vecteur  $M_0 M_1$  de longueur  $a_0$ , parallèle au côté 0 du carré, avec conservation ou changement de sens suivant que  $a_0$  est positif ou négatif. Par l'extrémité  $M_1$  de  $M_0 M_1$ , menons le vecteur  $M_1 M_2$ , construit de la même façon que le précédent, mais relativement au coefficient  $a_1$  et au côté 1 du carré. Continuons de même jusqu'à  $M_n M_{n+1}$  relatif à  $a_n$ . On obtient une ligne polygonale rectangulaire  $M_0 M_1 M_2 \dots M_{n+1}$ .

Pour voir si  $z$  est racine de  $f(x)$ , menons par  $M_0$  une droite de coefficient angulaire  $z$ ; elle coupe le support de  $M_1 M_2$  en un point  $Z_1$ , tel que  $M_1 Z_1 = a_0 z$ ; on a  $M_2 Z_1 = a_0 z + a_1$ . Par  $Z_1$ , menons la perpendiculaire à  $M_0 Z_1$ ; elle coupe le support de  $M_2 M_3$  en  $Z_2$  et on a  $M_3 Z_2 = a_0 z^2 + a_1 z + a_2$ . Continuons de même. On obtient finalement un segment  $M_{n+1} Z_n = f(z)$ . La ligne polygonale rectangulaire  $M_0 Z_1 Z_2 \dots Z_n$  est appelée l'*orthogone* relatif à  $f(x)$  et à  $z$ . Si  $M_{n+1}$  et  $Z_n$  sont confondus, l'orthogone est fermé et  $f(z) = 0$ .

En principe, l'orthogone est réalisable matériellement par une règle (ou un bord d'équerre rectangle) placée suivant  $M_0 Z_1$  et  $n - 1$  équerres rectangles ayant leurs sommets en  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$ . Pratiquement, cela est malcommode et on opère avec un transparent quadrillé.

La solution d'une équation irréductible de degré  $n$  n'exige pas nécessairement  $n - 1$  équerres; par exemple, par des opérations rationnelles et des racines carrées, on ramène l'équation de degré 4 à une équation cubique.

Dans ce qui précède, l'orthogonalité des axes n'est pas essentielle ainsi qu'on le voit en exprimant projectivement les relations entre les axes et les côtés de l'orthogone; des relations d'harmonie s'introduisent ainsi à la place de celles d'orthogonalité.

8. La théorie précédente possède un parallélisme remarquable avec celle de certains corps de nombres, ainsi que le montre le tableau ci-dessous.

<i>Opérations de l'équerre</i>	<i>Corps correspondants</i>
Ordinaires	Nombres rationnels
Ordinaires et glissement limité	Nombres rationnels et racine carrée de la somme de deux carrés
Ordinaires, glissement limité et inscription	Nombres rationnels et racine carrée de la somme et la différence de deux carrés
Equerres en nombre quelconque	Nombres algébriques

La transcendance de  $\pi$  montre enfin l'impossibilité de la quadrature du cercle au moyen d'un nombre quelconque d'équerres.

PAUL ROSSIER, Genève.

## Sulle cubiche razionali

I teoremi sull'involuzione  $I_3^2$  in un campo binario da me recentemente stabiliti<sup>1)</sup> si prestano immediatamente a svariate applicazioni particolarizzando il sostegno (razionale) della  $I_3^2$  stessa. Così, ad esempio, supponendo tale sostegno una cubica

<sup>1)</sup> Vedasi: A. LONGHI, *Sulle involuzioni cubiche di 2<sup>a</sup> specie*, Elementar der Mathematik, Bd. II, Nr. 2, 1947. Tale lavoro verrà in seguito citato con la semplice indicazione « $I_3^2$ ».