Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1948)

Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 16. Man zeige, daß n Geraden in allgemeiner Lage die Ebene in $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$ beschränkte und in $2n$ unbeschränkte Gebiete zerlegen. H. HADWIGER.

Lösungen (zum Teil auch für die entsprechende räumliche Aufgabe) sind eingegangen von H. FAEHNDRICH (Bern), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), C. R. PERISHO (McCook, Nebr.), L. KIEFFER (Luxemburg), K. RIEDER (Riehen), C. ROTHMUND (Zürich). Die Aufgabe ist behandelt in H. DÖRRIE: Triumph der Mathematik, Breslau 1933 (S. 280), und L. LOCHER: Projektive Geometrie, Zürich 1940 (S. 76).

Wir geben den Beweis aus dem Buche von CHR. VON STAUDT: Geometrie der Lage, 1847 (S. 98 und S. 108), um bei dieser Gelegenheit an das wunderbare Werk VON STAUDT's zu erinnern:

«Eine Ebene wird als System von Punkten durch n Gerade, von welchen keine drei durch einen und denselben Punkt gehen, in $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$ Systeme geteilt. ... Der Ausdruck $\frac{1}{2}n(n-1)$ stellt die Anzahl der Punkte vor, in welchen die n Geraden sich schneiden. Um sich nun zu überzeugen, daß die Anzahl der Systeme jene Zahl immer um eins übertreffe, darf man nur bemerken, daß dies für $n = 2$ (auch für $n = 1$) gilt, und daß, wenn zu m Geraden noch eine hinzukommt, jede von den beiden Zahlen um m vermehrt wird, indem die letzte Gerade durch die m Punkte, in welchen sie die m erstern schneidet, in m Strecken geteilt wird, deren jede eines der vorigen Systeme selbst wieder in zwei Systeme teilt.»

«Wenn die Ebene eine eigentliche Ebene ist, aber unter den n Geraden die unendlich ferne Gerade derselben sich befindet und die Anzahl der übrigen durch r bezeichnet wird, so ist die Anzahl der ins Unendliche gehenden Figuren gleich $2r$ und also die Anzahl der endlichen Figuren gleich $\frac{1}{2}r(r+1) + 1 - 2r = \frac{1}{2}r(r-3) + 1$.»

«Der unbegrenzte Raum wird als System von Punkten durch n Ebenen, von welchen keine drei durch eine und dieselbe Gerade und keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, in $n + \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ Teile geteilt. ... Um sich zu überzeugen, daß für jeden Wert von n die Anzahl der Raumteile der Anzahl der Ebenen mehr der Anzahl ihrer Schnittpunkte gleich sei, darf man nur bemerken, daß dies für $n = 3$ (auch für $n = 1$ und $n = 2$) der Fall ist, und daß, wenn zu m Ebenen noch eine hinzukommt, dadurch die Anzahl der Ebenen um 1, die Anzahl ihrer Schnittpunkte um $\frac{1}{2}m(m-1)$ und die Anzahl der Raumteile um die Summe $1 + \frac{1}{2}m(m-1)$ sich vermehrt, indem die letzte Ebene durch die Spuren der m erstern in $1 + \frac{1}{2}m(m-1)$ Teile geteilt wird, deren jeder einen der vorigen Raumteile selbst wieder in zwei Teile teilt.

Durch $r + 1$ Ebenen, von welchen keine drei durch eine und dieselbe Gerade und keine vier durch einen und denselben Punkt gehen, wird also der Raum in $r + 1 + \frac{1}{6}r(r+1)(r-1) = 1 + \frac{1}{6}r(r^2+5)$ Teile geteilt. Ist unter den Ebenen die unendlich ferne Ebene, so daß r also die Anzahl der übrigen bezeichnet, so ist die Anzahl der ins Unendliche gehenden Raumteile gleich $2 + r(r-1)$ und also die Anzahl der endlichen gleich $\frac{1}{6}(r-1)(r-2)(r-3)$.»

Die Aufgabe für den Raum wurde wohl zuerst von J. STEINER behandelt in der Arbeit «*Einige Gesetze über die Teilung der Ebene und des Raumes*» (Ges. Werke, Bd. I.).

Aufgabe 25. Eine Ellipse mit den Halbachsen a, b bewegt sich derart, daß sie ständig einem festliegenden rechten Winkel einbeschrieben ist. Wie lang sind die beiden Intervalle auf den Schenkeln, in denen sich die Berührungspunkte verschieben? ERNST TROST.

Lösung des Aufgabenstellers. $t(\varphi) = x\cos\varphi + y\sin\varphi - p(\varphi) = 0$ ist die Normalform einer beweglichen Tangente der festliegenden Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $(a \geqq b)$, wenn $p(\varphi) = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}$. Die Koordinaten des Berührungspunktes B ergeben sich aus $t(\varphi) = 0$, $t'(\varphi) = 0$ (Enveloppe). Ist S der Schnittpunkt der aufeinander senkrechten Tangenten $t(\varphi) = 0$ und $t(\varphi + \pi/2) = 0$, so findet man für die Berührungsstrecke SB den Ausdruck[1])

$$d = p\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) - p'(\varphi) = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} + \frac{(a^2-b^2)\sin 2\varphi}{2\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}.$$

Wir setzen

$$a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi = a\,b\,u\,,\quad a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi = a\,b\,v,$$

dann ist

$$u + v = \frac{a^2+b^2}{a\,b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = c \geqq 2,$$

$$u - v = \frac{a^2-b^2}{a\,b}\cos 2\alpha.$$

Hieraus folgt nach einiger Umformung

$$d = \sqrt{a\,b}\left\{\sqrt{c-u} \pm \sqrt{c-u-u^{-1}}\right\}. \tag{1}$$

Die Bedingung $d' = 0$ für die Extremwerte von d führt auf die kubische Gleichung

$$3u^3 - 2cu^2 - u + c = 0. \tag{2}$$

Für die drei reellen Lösungen x_1, x_2, x_3 dieser Gleichung gilt $b\,a^{-1} < x_1 \leqq 1 \leqq x_2 < a\,b^{-1}$, $x_3 < 0$. Für x_1 ist in (1) das Plus-, für x_2 das Minuszeichen zu setzen. Drückt man c mittels (2) durch x_1 bzw. x_2 aus, so ergibt sich

$$d_1 = d_{max} = \sqrt{\frac{a\,b}{x_1(2x_1^2-1)}}\,,\quad d_2 = d_{min} = \sqrt{\frac{a\,b}{x_2(2x_2^2-1)}}\,.$$

Die trigonometrische Lösung von (2) liefert mit

$$\cos\omega = \frac{c(16c^2-189)}{2(4c^2+9)^{3/2}}\,,\qquad (0 \leqq \omega \leqq 180^0)$$

$$x_1 = \frac{2}{9}\left\{c + \sqrt{4c^2+9}\cos\left(\frac{\omega}{3} + 240^0\right)\right\},$$

$$x_2 = \frac{2}{9}\left\{c + \sqrt{4c^2+9}\cos\frac{\omega}{3}\right\}.$$

Hieraus läßt sich das gesuchte Intervall $D = d_1 - d_2$ einfach berechnen.

Zahlenbeispiel: $a = 2$, $b = 1$. $\omega = 124^0\,8'\,7''$, $x_1 = 0{,}8112$; $x_2 = 1{,}5278$.
$d_1 = 2{,}7928$; $d_2 = 0{,}5974$. $\underline{\underline{D = 2{,}195.}}$

Eine andere Lösung sandte L. DESCLOUX (Fribourg) ein. Gleitet die Ellipse auf den Achsen des Koordinatensystems, so bewegt sich der Mittelpunkt $M(p;\,q)$ auf dem Kreis $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. Die Berührungsstrecke d wird eine Funktion von p, die der Gleichung

$$d^2(a^2 + b^2 - p^2) - 2p(a^2 + b^2 - p^2)\,d + a\,b = 0$$

genügt. Wird p aus dieser Gleichung und ihrer partiellen Ableitung nach p eliminiert,

[1]) Vgl. den allgemeinen Ausdruck in El. Math. *2*, 77 (1947).

so ergibt sich eine kubische Gleichung für d_1^2 bzw. d_2^2. Diese Gleichung ist komplizierter als (2), da man nicht mit dem Parameter c allein auskommt. Deswegen wird auch das Lösungssystem etwas weniger übersichtlich.

Aufgabe 27. Gegeben sind zwei in einer Ebene festliegende Kreise k_1, k_2. Der eine Schenkel eines unveränderlichen Winkels berührt k_1, der andere Schenkel berührt k_2. Man bestimme den geometrischen Ort des Scheitels. R. SCHOECK.

Lösung. Der gesuchte geometrische Ort besteht im allgemeinen aus zwei Paaren von in bezug auf die Zentrale der gegebenen Kreise symmetrischen Pascalschen Schnecken.

Um dies zu erkennen, denke man sich an die beiden gegebenen Kreise k_1 und k_2 je ein Paar paralleler Tangenten gelegt, die den vorgeschriebenen Winkel miteinander bilden. Es entsteht ein Parallelogramm, das nach Form und Größe durch die Größen der gegebenen Kreise und des gegebenen Winkels bestimmt ist. Sein Mittelpunkt M liegt auf einem der beiden kongruenten Kreise durch die Zentren von k_1 und k_2, die den gegebenen Winkel fassen.

Wandert M auf diesem Kreise, so gehen die Parallelogrammdiagonalen dauernd durch zwei feste Punkte U und V dieses Kreises, und je zwei Gegenecken des Parallelogramms liegen auf der Konchoide dieses Kreises in bezug auf U oder V und mit der betreffenden halben Parallelogrammdiagonalen als Parameter. Das sind zwei Pascalsche Schnecken. Durch Spiegelung an der Zentralen von k_1 und k_2 erhält man die vollständige Figur. H. STOLL, Zürich.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) und H. BIERI (Bern). Eine ausführlich diskutierte analytische Lösung gab L. DESCLOUX (Fribourg).

Neue Aufgaben

31. Um ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite s wird ein geschlossener Faden der Länge $L \geqq 3\,s$ gelegt und durch einen sich bewegenden Stift gespannt. Man berechne die Fläche des vom Stifte beschriebenen Ovals. E. TROST.

32. Avendosi (nello spazio ordinario) quattro sfere Σ_i e quattro punti P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ si domanda di condurre per ciascuno dei punti P_i un piano π_i in modo che se Γ_i è la sezione di π_i con Σ_i, i quattro cerchi Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 appartengano ad una stessa sfera. A. LONGHI.

33. Der Brennpunkt F und zwei Kurvenpunkte A, B bestimmen zwei Parabeln. Die Verbindungsgerade der Pole S_1, S_2 der gemeinsamen Sehne $s\,(AB)$ in bezug auf die beiden Parabeln geht durch F, wird in F halbiert und bildet mit FA, FB gleiche Winkel. Ferner liegt der Berührungspunkt der Tangente parallel zu $s\,(A\;B)$ an die eine Parabel auf der Achse der anderen Parabel. S. JOSS.

34. Man bestimme (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) die kleinste Geschwindigkeit (und den entsprechenden Steigungswinkel), mit der eine Kugel geworfen werden muß, damit sie in der Entfernung a eine senkrechte Mauer von der Höhe h gerade überfliegt. E. ROTHMUND.

35. p und q seien natürliche Zahlen und $p \leqq q$. Dann gilt identisch in x:

$$\sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} \binom{q}{n} \binom{x+n}{p+q} = \binom{x}{p} \binom{x}{q}.$$

A. STOLL.

36. Man bestimme sämtliche Paare von aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die nur Primzahlen aus der Reihe 2, 3, 5 enthalten. G. BERGER und E. TROST.

37. Ecrire une suite de n nombres entiers, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, tels que la somme de certains d'entre eux, consécutifs dans la suite, $A_j + A_{j+1} + \cdots + A_{j+k} = Z$, reproduise la suite des nombres naturels de 1 à N. N étant donné, quel est le plus petit nombre n de termes nécessaire dans la suite? Une solution étant donnée pour N', suffit-il pour passer à N'' $(> N')$ d'ajouter des termes aux deux extrémités de la première suite ou faut-il en constituer une nouvelle?

Exemple: $N = 15$. La suite suivante est une solution: 6, 4, 2, 2, 1, 4, 4. 1, 2, 4 et 6 sont obtenus avec un seul terme; $3 = 2 + 1$; $5 = 1 + 4$; $8 = 4 + 4$; $10 = 6 + 4$ sont obtenus au moyen de deux termes; $7 = 4 + 1 + 2$; $9 = 4 + 4 + 1$; $12 = 6 + 4 + 2$ exigent trois termes; $11 = 4 + 4 + 1 + 2$; $14 = 6 + 4 + 2 + 2$; $13 = 4 + 4 + 1 + 2 + 2$ et $15 = 6 + 4 + 2 + 2 + 1$ en exigent quatre ou cinq; la suite comporte sept termes.

Ce problème a une application pratique: construire un secondaire de transformateur donnant entre deux bornes une tension multiple entier d'une tension unité, sans qu'aucune autre connexion soit établie. P. ROSSIER.

(Dem Aufgabensteller ist keine allgemeine Lösung bekannt.)

38. a) Im Jahre 0 leben tausend Individuen, welche die nullte Generation bilden. Nach einem Jahre sterben sie ab und hinterlassen Nachkommen, die erste Generation usw. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum k (0, 1, 2, ..., 20) «Kinder» hat, sei p_k, so daß also gilt $p_0 + p_1 + \cdots + p_{20} = 1$. Ferner sei die Erwartung $0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2\,p_2 + \cdots + 20\,p_{20} = 1$. Wir setzen die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum nach n Jahren keine Nachkommen mehr hat, gleich $x(n)$. Diese Folge (für $n = 1, 2, \ldots$) ist nirgends abnehmend und $\leqq 1$. Sie besitzt also eine Grenze x. Die Aufgabe besteht in der Berechnung und Deutung dieses x.

b) Im Jahre 0 sollen alle Individuen verschiedene Familiennamen haben, die sich vererben. In der 1000. Generation sei die Anzahl der Individuen 2000. Was läßt sich über die Anzahl der noch existierenden Familiennamen aussagen? A. SPEISER.

Prüfungs- und Übungsaufgaben

Die Publikation der folgenden Aufgaben (meist mit Lösungen) möchte zur Orientierung und Anregung dienen. Auf Originalität wird von den Aufgabenstellern kein Anspruch erhoben.

Freie kantonale Maturität, Basel, Herbst 1947 (Typen A, B und Handel)

1. Addiert man zu den 3 Gliedern einer geometrischen Folge bzw. 7, 18 und 2, so erhält man eine arithmetische Folge. Das erste Glied der geometrischen Folge ist 3, das zweite Glied ist negativ. Wie lauten die 3 Glieder der beiden Folgen?

2. Die Kanten zweier Kupferwürfel sind um 5 cm und ihre Gewichte um 42,7 kg verschieden. Berechne die Summe ihrer Gewichte. Dichte des Kupfers 8,93 g cm^{-3}.

3. Bestimme die Länge der Linien $x^2 + y^2 - 4x = 0$ und $x^2 + y^2 + 10x - 6y = 0$ sowie die Koordinaten ihrer Schnittpunkte. Unter welchem Winkel schneiden sie sich im Schnittpunkt, der vom Nullpunkt am weitesten entfernt ist?

4. Auf einem quadratischen Papierblatt von der Seitenlänge a sind vier gleichschenklige kongruente Dreiecke gezeichnet, die die Quadratfläche nicht vollständig bedecken; jedes hat eine Seite des Quadrates als Grundlinie. Schneidet man die 4 Dreiecke weg, so bleibt ein sternförmiges Stück Papier übrig, das man zu einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche zusammenfalten kann. Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide, wenn ihre Grundfläche die Seitenlänge b hat.

5. Im Dreieck ABC ist $AB = 23$ cm, $AC = 21$ cm, Winkel $BAC = 107^0\,24'$. Ein Kreis berührt die Seite AB in B und geht durch C. Berechne den Radius dieses Kreises und die Länge des Bogens BC.

6. Im rechtwinkligen Dreieck ABC ist der Winkel in A $26^0\,37'$. Es sei M die Mitte der Hypotenuse AB und H der Fußpunkt der Höhe auf die Hypotenuse. Die Fläche des Teildreieckes CMH ist 140 cm^2. Berechne die Seiten dieses Teildreieckes.

Für 5 gut gelöste Aufgaben ist die Note 6 gegeben worden. R. JUNGEN.

Aufgabe aus der Hydrodynamik

Ein Behälter mit vertikaler Seitenwand (y-Achse) sei mit einer reibungslosen Flüssigkeit gefüllt. Die Niveauhöhe h_0 werde konstant gehalten. Bohrt man in verschiedenen Höhenlagen S der Seitenwand Ausflußöffnungen, so treten aus ihnen Flüssigkeitsstrahlen, die Flugparabeln verschiedener Reichweite W durchlaufen. Die Scheitel-