Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 3 (1948)
Heft: 2

Artikel: Die isoperimetrische Ungleichung im Raum
Autor: Hadwiger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13571

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band III Nr. 2 Seiten 25–48 Basel, 15. März 1948

Die isoperimetrische Ungleichung im Raum[1])

Das Ziel der vorliegenden Darstellung ist, eine möglichst elementare Theorie des isoperimetrischen Problems der konvexen Körper des dreidimensionalen Raumes zu umreißen und insbesondere eine einfache Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung von H. A. SCHWARZ[2]) vorzutragen. – Für konvexe Bereiche der Ebene sind im Laufe der Zeit zahlreiche elementare Lösungen des zweidimensionalen isoperimetrischen Problems gegeben worden[3]). Vielfältig waren die Anstrengungen, ebenso einfache Lösungen des gleichen Problems für konvexe Körper des Raumes zu finden; jedoch sind die Schwierigkeiten, die es zu überwinden gilt, hier weit erheblicher als im ebenen Fall.

Betreffend Geschichte und Literatur des von uns aufgegriffenen berühmten Problems vergleiche man das ältere, aber heute noch fesselnde Buch «Kreis und Kugel» von W. BLASCHKE[4]) und insbesondere die neuere und vollständige Monographie «Theorie der konvexen Körper» von T. BONNESEN und W. FENCHEL[5]).

Im Hinblick auf die Behandlung des isoperimetrischen Problems im Rahmen einer elementaren Vorlesung oder im Mittelschulunterricht stellt sich oft die Frage nach einer einfachen Herleitungsmöglichkeit für die isoperimetrische Ungleichung. Der bekannteste klassische Weg – der allerdings durchaus nicht elementar ist – führt über den Brunn-Minkowskischen Hauptsatz. Um auf diesem Wege zum Ziele zu gelangen, muß zunächst die Theorie der Linearscharen von BRUNN oder der Konkavscharen von BLASCHKE entwickelt werden. Wünschbar wäre eine Ableitung, welche direkt an die Grundtatsachen der Elementargeometrie, der Punktmengenlehre und der elementaren Inhaltslehre anschließt.

Allerdings ist zu bemerken, daß die hier als elementar angesprochene Arbeitsgrundlage, welche sich aus einer gegenseitigen Durchdringung der Analysis des reellen Zahlkontinuums und der Geometrie des Raumes und seiner Teile (Punktmengen) er-

---

[1]) Mit Subvention der *Stiftung* Dr. JOACHIM DE GIACOMI *der SNG* gedruckt.

[2]) Von H. A. SCHWARZ stammt die erste vollständige Lösung des isoperimetrischen Problems in der Erweiterung auf nicht notwendig konvexe Körper. Seine berühmte Abhandlung, «Beweis daß die Kugel kleinere Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens» (Nachr. Ges. Wiss., Göttingen 1884), stellt eine der meistgenannten Anwendungen der analytischen Methode von WEIERSTRASS dar.

[3]) Von den in neuerer Zeit gegebenen Lösungen seien hier genannt: G. BOL: Einfache Isoperimetriebeweise für Kreis und Kugel, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. *15*, 1943; H. HADWIGER: Eine elementare Ableitung der isoperimetrischen Ungleichung für Polygone, Comm. Math. Helv. *16*, 1943/44.

[4]) Leipzig 1916.

[5]) Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band *3*, J. Springer, Berlin 1935.

geben soll, sicherlich in dem Sinne höhere Ansprüche stellen muß, als eine scharfe Handhabung gewisser Begriffe, wie etwa diejenigen des Infimums oder Supremums bei Zahlenmengen unter anderen, erforderlich ist.

Indem man sich verschiedene ältere Gesichtspunkte und konstruktive Ideen verschiedener Geometer, wie J. STEINER[1]), H. MINKOWSKI[2]), W. BLASCHKE[3]), W. GROSS[4]), zu eigen macht und diese mit neueren Methoden und Kunstgriffen, wie sie etwa von L. LUSTERNIK[5]), G. BOL[6]), A. DINGHAS[7]) und E. SCHMIDT[8]) angewendet wurden, verbindet, kann man zu der im Folgenden vorgetragenen Ableitung der isoperimetrischen Ungleichung gelangen.

Diese lautet bekanntlich

$$F^3 - 36\,\pi\,V^2 \geqq 0. \tag{1}$$

Hier bezeichnet F die Oberfläche und V das Volumen des konvexen Körpers. Ist M das sogenannte Integral der mittleren Krümmung, so besteht noch die Ungleichung

$$M^2 - 4\,\pi F \geqq 0. \tag{2}$$

Diese «erste Minkowskische Ungleichung» werden wir mühelos als Folgerung von (1) gewinnen.

Dann zeigen wir, daß in der isoperimetrischen Ungleichung (1) das Gleichheitszeichen dann und nur dann steht, wenn der konvexe Körper entweder eine Kugel oder eine Strecke ist.

Dies geschieht so, daß wir die Verschärfung

$$F^3 - 36\,\pi\,V^2 \geqq (\sqrt{F} - \sqrt{4\,\pi}\,r)^6 \tag{3}$$

nachweisen, wobei r den Inkugelradius bezeichnet. Der rechtsseitige Ausdruck in (3) kann offenbar bei eigentlichen konvexen Körpern nur dann verschwinden, wenn dieser mit seiner Inkugel zusammenfällt. — Für die Kugel besteht in (1) das Gleichheitszeichen. Nach der letzten Feststellung ist dies aber andererseits der einzige in Betracht kommende Fall. Damit ist die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel, nämlich unter allen eigentlichen konvexen Körpern gleichen Volumens die kleinste Oberfläche aufzuweisen, festgestellt.

Diese Einleitung abschließend, gestattet sich der Verfasser noch die nachstehenden Bemerkungen: Die Tatsache, daß unsere Entwicklung nicht auch die «zweite Minkowskische Ungleichung»

$$F^2 - 3\,M\,V \geqq 0 \tag{4}$$

liefert, muß nicht unbedingt eine berechtigte Erwartung täuschen, da die Unglei-

---

[1]) Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze, J. reine angew. Math. *18*, 1838.

[2]) Volumen und Oberfläche, Math. Ann. *57*, 1903.

[3]) Kreis und Kugel, Leipzig 1916; Vorlesungen über Differentialgeometrie. I. Elementare Differentialgeometrie, 3. Aufl., Berlin 1930, insb. § 115.

[4]) Die Minimaleigenschaft der Kugel, Mh. Math. Phys. *18*, 1917.

[5]) Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige meßbare Mengen, C. R. Acad. Sci. URSS. 1935 (III) *8*.

[6]) Einfache Isoperimetriebeweise für Kreis und Kugel, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. *15*, 1943.

[7]) Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen Raum, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien 1940; Über die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel im gewöhnlichen Raum, Mh. Math. Phys. *51*, 1944.

[8]) A. DINGHAS und E. SCHMIDT: Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum, Abh. Preuss. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. 1944.

chung (4) mit den beiden Ungleichungen (1) und (2) nicht gleichgestellt ist. Wie an anderer Stelle[1]) ausführlicher dargelegt wurde, ist es in gewissem Sinne unnatürlich, die beiden Minkowskischen Ungleichungen (2) und (4) zu einem fundamentalen Paar zu vereinigen und dann hieraus (1) zu folgern, wie dies in teilweiser Anlehnung an das klassische Vorbild meistens geschieht. Es ist vielmehr so, daß die Ungleichungen (1) und (2) und dann wieder (4) und eine noch unbekannte Ungleichung

$$? \geqq 0 \tag{5}$$

paarweise zusammengehören. Es ist nämlich (4) eine exakte Verschärfung von (1), indem statt (4) auch

$$F^3 - 36\pi V^2 \geqq \frac{9V^2}{F}(M^2 - 4\pi F) \tag{4a}$$

geschrieben werden kann, wobei das Gleichheitszeichen nach H. MINKOWSKI für Kappenkörper der Kugel und nach einem neueren Resultat von G. BOL[2]) nur für diese gilt. In analoger Weise fehlt wohl eine exakte Verschärfung von (2) der Form

$$M^2 - 4\pi F \geqq ?, \tag{5a}$$

wobei das Gleichheitszeichen für die Körper einer noch nicht bekannten extremalen Schar gilt, welche beispielsweise wie die Schar der symmetrischen Kugelzonen eine Verbindung zwischen Kreisscheibe und Kugel herstellt.

Wenn sich der Verfasser entschlossen hat, die nachfolgenden Ausführungen über die isoperimetrische Ungleichung zu veröffentlichen, so tat er dies mit der Hoffnung, damit ein Bescheidenes zur Ausfüllung der eingangs erörterten Lücke im elementaren Unterricht beigetragen zu haben.

1. *Der konvexe Körper und die drei Maßzahlen*

Unter einem konvexen Körper wollen wir hier eine abgeschlossene, beschränkte und konvexe Punktmenge des Raumes verstehen. Falls diese Punktmenge auch innere Punkte enthält, sprechen wir genauer von einem «eigentlichen», im gegenteiligen Fall von einem «uneigentlichen» konvexen Körper. Kugel, Würfel, Tetraeder mit positivem Inkugelradius sind Beispiele eigentlicher, Kreisscheibe, Quadratflächenstück, Dreiecksflächenstück, Strecke solche uneigentlicher konvexer Körper.

Es ist eine bekannte und hier vorausgesetzte Tatsache, daß ein konvexer Körper stets ein elementares (d.h. Peano-Jordansches) Volumen V und eine wohlbestimmte Oberfläche F aufweist. Die genannten zwei fundamentalen Maßzahlen V und F werden in der Theorie der konvexen Körper noch ergänzt durch eine dritte Maßzahl M, nämlich durch das Integral der mittleren Krümmung. Diese letzte Bezeichnungsweise von M, welche auf differentialgeometrische Zusammenhänge hinweist, wird leider dem einfachen und fundamentalen Charakter dieser dritten Maßzahl, die der Oberfläche und dem Volumen an die Seite gestellt werden muß, nicht ganz gerecht.

[1]) H. HADWIGER, Über eine fehlende Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper, El. Math. *2*, 1947.
[2]) Beweis einer Vermutung von H. MINKOWSKI, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. *15*, 1943.

Jedenfalls ist es für den Leser wichtig, sich zu vergegenwärtigen, daß für konvexe Polyeder alle drei Maßzahlen in gleichartiger und durchaus elementarer Weise definiert werden können. Es ist nämlich V die Summe der Inhalte der Tetraederraumstücke, in die sich das Polyeder tetrangulieren läßt, F ist entsprechend die Summe der Inhalte der Dreiecksflächenstücke, in die sich die Oberfläche des Polyeders triangulieren läßt; endlich ist M die Summe der Produkte, die man aus den Kantenlängen und den halben Neigungswinkeln der an den Kanten anschließenden Seitenflächen des Polyeders bilden kann. Als Neigungswinkel ist der Zwischenwinkel der beiden nach außen weisenden Normalen der anschließenden Seitenflächen zu berücksichtigen.

Wählt man diesen Sachverhalt als Ausgangsposition, so können die drei Maße V, F und M für allgemeinere konvexe Körper K als die Suprema der entsprechenden Maße der von K überdeckten konvexen Polyeder bzw. auch als die Infima der Maße der von K unterdeckten konvexen Polyeder definiert werden.

Ist A ein konvexer Körper, der einen andern A^* überdeckt, geschrieben $A \supset A^*$, so gelten die Monotoniebeziehungen

$$V(A) \geqq V(A^*), \quad F(A) \geqq F(A^*), \quad M(A) \geqq M(A^*), \tag{6}$$

die sich unmittelbar aus der oben vorgeschlagenen Definition ergeben.

Ist A eine Kugel vom Radius R, so hat man die Formeln

$$V(A) = \frac{4\pi}{3} R^3, \quad F(A) = 4\pi R^2, \quad M(A) = 4\pi R. \tag{7}$$

2. *Die äußeren und inneren Parallelkörper*

Es sei A ein konvexer Körper. Unter dem äußeren Parallelkörper $C_\varrho(A)$ von A im Abstand $\varrho \geqq 0$ verstehen wir die Vereinigungsmenge aller abgeschlossenen Kugeln vom Radius ϱ, deren Mittelpunkte in A liegen. Es ist sehr leicht einzusehen, daß $C_\varrho(A)$ wieder ein konvexer Körper ist. Ähnlich definieren wir den inneren Parallelkörper $C_{-\varrho}(A)$ von A im Abstand ϱ als die Vereinigungsmenge aller Mittelpunkte von abgeschlossenen Kugeln vom Radius ϱ, die ganz in A liegen. Auch $C_{-\varrho}(A)$ ist ein konvexer Körper, der allerdings nur dann nicht leer ist, wenn $0 \leqq \varrho \leqq r$ ist, wo r den Inkugelradius von A bezeichnet. Für $\varrho = r$ ist der innere Parallelkörper uneigentlich und reduziert sich in der Regel auf einen Punkt (Inkugelmittelpunkt). Es ist zweckmäßig, die Parallelkörper durch die oben gewählte Schreibweise als Resultate einer Paralleloperation C aufzufassen. Die Eigenschaften des Operators C können sehr allgemein studiert werden. Für unsere Zwecke genügt es, die beiden folgenden Relationen zur Verfügung zu haben. Für $\varrho \geqq 0$, $\sigma \geqq 0$ gilt

$$C_\varrho C_\sigma(A) = C_{\varrho+\sigma}(A) \tag{8}$$

und für $0 \leqq \varrho \leqq r$

$$C_\varrho C_{-\varrho}(A) \subset A. \tag{9}$$

Die Beweise der beiden letzten Relationen liegen auf der Hand und können unmittelbar an die Definitionen der Operationen C angeschlossen werden.

3. *Die Formeln von J. Steiner*

Bezeichnen V_ϱ, F_ϱ und M_ϱ die Maßzahlen des äußeren Parallelkörpers $C_\varrho(A)$ des konvexen Körpers A, so gelten die nach J. STEINER benannten Parallelformeln

$$V_\varrho = V + F\,\varrho + M\,\varrho^2 + \frac{4\pi}{3}\,\varrho^3, \tag{10}$$

$$F_\varrho = F + 2\,M\,\varrho + 4\,\pi\,\varrho^2, \tag{11}$$

$$M_\varrho = M + 4\,\pi\,\varrho. \tag{12}$$

Betreffend den Nachweis dieser Formeln ist folgendes zu sagen: Für konvexe Polyeder ist die Volumformel (10) direkt ablesbar, wobei die in 1. erörterte Bedeutung der Maße V, F und M berücksichtigt werden muß. Der äußere Parallelkörper kann in diesem Fall nämlich in lauter elementare Raumstücke zerlegt werden: in das ursprüngliche Polyeder, in gerade prismatische Körper, die den Seitenflächen aufgesetzt sind, in Zylinderkeile, die längs den Kanten eingeschoben sind, und endlich in Kugelsektoren, die sich bei den Ecken einpassen und zu einer vollen Kugel zusammengefügt werden können. Durch Approximation eines allgemeineren konvexen Körpers durch konvexe Polyeder wird dann die Formel (10) verallgemeinert. Die beiden andern begleitenden Formeln (11) und (12) ergeben sich jetzt notwendig durch sinngemäße Auswertung des Kompositionsgesetzes (8).

Dem aufmerksamen Leser fällt hier vielleicht auf, daß im Zusammenhang mit den Steinerschen Formeln nur von den äußeren Parallelkörpern die Rede ist. In der Tat gelten ähnlich einfache Formeln für die inneren Parallelkörper im allgemeinen nicht. Immerhin werden wir später einige Ungleichungen betrachten, welche die hier erwähnte Lücke naturgemäß nur in sehr unvollkommener Weise ausfüllen sollen.

4. *Die Steinersche Symmetrisierung*

Betrachten wir, etwa außerhalb eines konvexen Körpers A, eine Ebene ω und die Schar der auf ω senkrecht stehenden Geraden g, welche A treffen. Verschieben wir nun jede Sehne, in welcher die Gerade g den Körper A durchsetzt, längs g in die bezüglich ω symmetrische Lage, so erfüllt die Gesamtheit aller verschobenen Sehnen wieder einen konvexen Körper A^*, der hinsichtlich ω symmetrisch ist. Diesen wohlbekannten Prozeß, nämlich die Steinersche Symmetrisierung bezüglich der Ebene ω, wollen wir, wieder als Operation aufgefaßt, durch das Symbol S bezeichnen, so daß $A^* = S(A)$ geschrieben werden kann. — Die Verifikation der obenerwähnten recht geläufigen Tatsachen können wir dem Leser überlassen.

Im Hinblick auf eine besondere Form des klassischen Prinzips von CAVALIERI ist ohne weiteres klar, daß das Volumen eine Invariante bezüglich der Symmetrisierungsoperation ist, so daß also

$$V\,S(A) = V(A) \tag{13}$$

gilt. — Wir werden jetzt noch einen Hilfssatz, den wir etwas später benötigen werden, ableiten. Es bestehe die folgende Situation: Zwei konvexe Körper A und B sollen sich in dem natürlich ebenfalls konvexen Durchschnittskörper AB gegenseitig durch-setzen (vgl. Fig. 1). In den Restbereichen $A - AB$ und $B - AB$ seien die beiden konvexen Körper X und Y enthalten. Wir symmetrisieren jetzt die vier Körper A, B

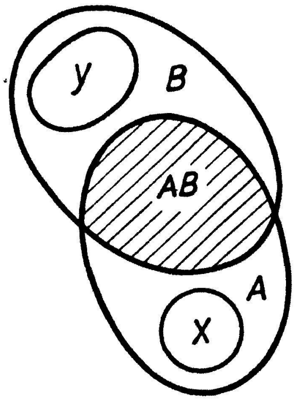

Fig. 1

und X, Y bezüglich derselben Ebene und bilden sodann die Durchschnittskörper $S(A)\,S(B)$ und $S(X)\,S(Y)$. Nun gilt die folgende Volumrelation

$$V\,S(X)\,S(Y) + V(A\,B) \leqq V\,S(A)\,S(B). \tag{14}$$

Wir beweisen nun (14) in der folgenden Weise: Es sei g eine Gerade senkrecht auf der Symmetrisierungsebene ω und es bezeichne $s(Z)$ die Länge der Sehne, welche g aus dem Körper Z ausschneidet. Aus der Definition der Symmetrisierung folgern wir unmittelbar, daß

$$s\{S(A)\,S(B)\} = Min\{s(A),\ s(B)\}$$

ist, wobei $Min\,(p, q)$ die kleinere der beiden Zahlen p und q bedeutet. Nun ist, nach der bestehenden Situation (vgl. Fig. 1) beurteilt, offenbar

$$s(A) \geqq s(AB) \quad \text{und} \quad s(B) \geqq s(AB),$$

und es kann nach der weiter oben stehenden Beziehung

$$s\{S(A)\,S(B)\} = s(AB) + Min\{s(A) - s(AB),\ \ s(B) - s(AB)\}$$

geschrieben werden. Weiter ist nun

$$s(A) - s(AB) \geqq s(X) \quad \text{und} \quad s(B) - s(AB) \geqq s(Y),$$

so daß sich damit

$$s\{S(A)\,S(B)\} \geqq s(AB) + Min\{s(X), s(Y)\} = s(AB) + s\{S(X)\,S(Y)\}$$

ergibt. Nach dem Prinzip von CAVALIERI folgt hieraus offenbar die Behauptung (14).

5. *Das Kugelungstheorem nach W. Groß*

Wir betrachten nun einen eigentlichen konvexen Körper A mit einer innern Kugel J von positivem Radius mit dem Mittelpunkt Z. Ferner wollen wir eine mit

J konzentrische Kugel K vom Radius R einführen, welche das gleiche Volumen aufweisen soll wie A, so daß mithin

$$V = V(A) = V(K) = \frac{4\pi}{3} R^3 \tag{15}$$

gilt. Nun betrachten wir Körper $A^* = S^*(A)$, welche aus A dadurch hervorgehen, daß der Reihe nach endlich viele Symmetrisierungen $S_1, S_2, \ldots, S_k$ an Ebenen, die alle durch Z hindurchgehen, angewendet werden. Die Operation S^* kann symbolisch als Produkt $S_k \ldots S_2 S_1$ geschrieben werden; insbesondere denken wir uns nun die unendliche Menge $\mathfrak{S}$ aller so erreichbaren Körper A^*. Für die nachfolgenden Schlüsse

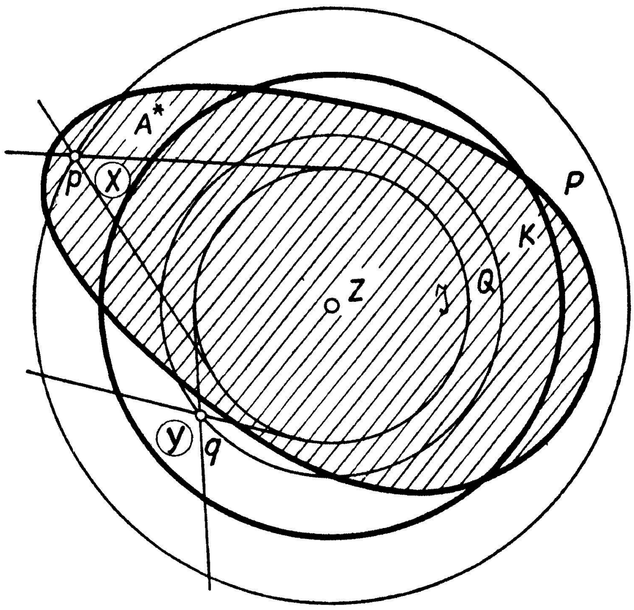

Fig. 2

ist es von Bedeutung, sich davon zu überzeugen, daß für alle Körper A^* stets J eine innere Kugel bleibt.

Das im folgenden zu beweisende Kugelungstheorem sagt nun aus, daß sich in dieser Menge solche Körper finden lassen, welche die oben eingeführte Kugel K beliebig genau approximieren. Mit andern Worten: Durch endlich viele geeignete Symmetrisierungen an Ebenen durch das Zentrum Z kann der ursprüngliche, beliebig gestaltete konvexe Körper beliebig gut aufgekugelt werden.

Wir beweisen zunächst eine sich auf Volumzahlen beziehende Aussage. Bilden wir für jeden Körper A^* der oben erörterten Körpermenge das Volumen $V(KA^*)$ des Durchschnitts des Körpers mit der Kugel K, so erhalten wir eine zweifellos beschränkte Menge positiver Zahlen. Die Behauptung lautet jetzt, daß für das über die gesamte Menge der A^* genommene Supremum

$$sup\ V(A^* K) = V \tag{16}$$

gilt.

Beweis: Wir nehmen im Gegensatz zu der Behauptung (16) an, daß

$$sup\ V(A^* K) = V - \Delta \tag{16a}$$

sei, wobei $\Delta > 0$ ist. Nun konstruieren wir zwei mit K konzentrische Hilfskugeln P

$P \supset K \supset Q$

und Q, wobei $P \not\subset K \not\subset Q$ (vgl. Fig. 2) und deren Radien so gewählt werden sollen, daß die Beziehung

$$0 < V(P) - V(K) = V(K) - V(Q) < \Delta \tag{17}$$

gilt.

Nun wählen wir auf den Oberflächen von P und Q je einen Punkt p und q und konstruieren die beiden von p und q ausgehenden Tangentialdoppelkegel U und V an die Inkugel J. Es gibt offenbar zwei ausreichend kleine kongruente Kugeln X und Y in den Durchschnittsbereichen der Doppelkegel U und V mit den Kugelschalen $P - K$ und $K - Q$, also $X \cong Y$ und $X \subset U(P-K)$ und $Y \subset V(K-Q)$ und es sei $V(X) = V(Y) = \vartheta$. Nach der Bedeutung des Supremums läßt sich ein Körper A^* aus der betrachteten Körpermenge $\mathfrak{S}$ so herausgreifen, daß

$$V(A^*K) > V - \Delta - \vartheta \tag{18}$$

gilt. Wie eine einfache Volumbetrachtung lehrt, gibt es auf der Oberfläche von P einen zu A^* gehörenden Punkt p und ebenso auf der Oberfläche von Q einen nicht zu A^* gehörenden Punkt q.

In der Tat ist nämlich das Volumen des über K hinausragenden Teils von A^* gleich $V - V(A^*K) \geqq \Delta$, somit nach (17) größer als das Volumen der Kugelschale $P - K$; hieraus folgt die Existenz eines Punktes p. Andererseits ist das Volumen des in K enthaltenen Teils von A^* gleich $V(A^*K) \leqq V - \Delta$, also nach (17) kleiner als das Volumen der Kugel Q; hieraus folgt die Existenz eines Punktes q. Die beiden Punkte p und q lassen sich nachträglich identifizieren mit den beiden weiter oben eingeführten und gleichbenannten Punkten. Aus der Konvexität des Körpers A^* schließt man, daß die der innern Kugel J zugewandte Kappe des Tangentialdoppelkegels U ganz zu A^* gehört und daß analog die abgewandte Hälfte des Tangentialdoppelkegels V ganz nicht zu A^* gehört. Das Gleiche trifft *eo ipso* zu für die beiden kongruenten Kugeln X und Y. Also ist $X \subset A^* - KA^*$ und $Y \subset K - KA^*$.

Jetzt legen wir eine Ebene ω durch Z, welche senkrecht auf der Zentrallinie der beiden Kugeln X und Y steht und symmetrisieren an ω. Nach dem Hilfssatz (14) hat man nun

$$V S(A^*)\, S(K) \geqq V(A^*K) + V S(X)\, S(Y)$$

und da $S(X) \equiv S(Y) \cong X \cong Y$ ist, folgt zunächst

$$V S(A^*)\, S(K) \geqq V(A^*K) + \vartheta.$$

Bedenken wir jetzt, daß $S(K) = K$ ist, setzen weiter $S(A^*) = A^{**}$ und nehmen Bezug auf (18), so resultiert

$$V(A^{**}K) > V - \Delta. \tag{19}$$

Da nun aber A^{**} offensichtlich wieder ein Körper der eingangs in Betracht gezogenen Körpermenge ist, stellt (19) eine gegen (16a) widerspruchsvolle Beziehung dar. Damit ist erwiesen, daß die an den Kopf des Beweisganges gestellte Gegenannahme unrichtig ist, und die Behauptung (16) ist sichergestellt.

Mit Berücksichtigung der Konvexität der Körper A^* geht aus dem quantitativen Urteil (16) in einfacher Weise ein qualitatives hervor, nach welchem die beliebig gute Approximation der Kugelgestalt zustande kommt. Wir behaupten nämlich: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es in der Körpermenge $\mathfrak{S}$ einen Körper A^*, so daß

$$A^* \supset C_{-\varepsilon}(K) \tag{20}$$

gilt. Der postulierte Körper überdeckt also eine Kugel vom Radius $R - \varepsilon$. In der Tat: Wäre diese Aussage falsch, so gäbe es zu jedem Körper A^* noch einen Punkt Z auf der Oberfläche der Kugel $C_{-\varepsilon}(K)$, der erstens nicht zu A^* gehört und zweitens

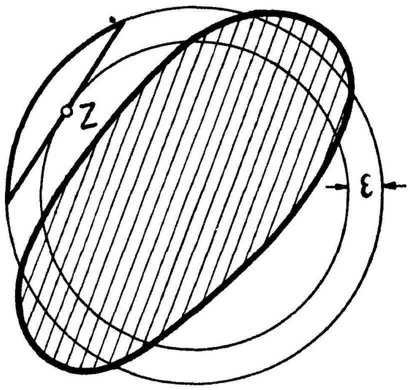

Fig. 3

die Eigenschaft hat, daß die ihm zugeordnete Stützebene an $C_{-\varepsilon}(K)$ von K eine Kugelkalotte vom Volumen d abschneidet, welche mit A^* keine Punkte gemeinsam hat (vgl. Fig. 3). Somit wäre das Volumen $V(A^*K)$ nicht größer als $V - d$, wo d eine nur von ε abhängige positive Größe ist. Dies steht aber im Widerspruch mit der bewiesenen Relation (16).

6. *Ein Hilfssatz über die äußeren Parallelkörper*

Durch die Symmetrisierung S gehe der konvexe Körper A über in $S(A)$ und der äußere Parallelkörper $C_\varrho(A)$ entsprechend in $S\,C_\varrho(A)$. Bilden wir jetzt noch den äußeren Parallelkörper $C_\varrho S(A)$, so läßt sich – wie wir weiter unten beweisen werden – behaupten, daß

$$S\,C_\varrho(A) \supset C_\varrho S(A) \tag{21}$$

ausfällt. Aus (21) folgt im Hinblick auf die Invarianzbeziehung (13) die Volumrelation

$$V\,C_\varrho(A) \geqq V\,C_\varrho S(A). \tag{22}$$

Indem wir endlich viele Symmetrisierungen an Ebenen durch das in 5. betrachtete Inkugelzentrum Z der Reihe nach einwirken lassen, kann die Ungleichung (22) fortgesetzt angewendet werden, und die Zusammenziehung dieser Ungleichungen führt auf die für einen beliebigen Körper A^* der Körpermenge $\mathfrak{S}$ gültigen Beziehung

$$V\,C_\varrho(A) \geqq V\,C_\varrho(A^*). \tag{23}$$

Beachten wir noch die Existenz eines Körpers A^* gemäß (20), so schließt man zunächst auf

$$V\,C_\varrho(A) \geqq V\,C_\varrho C_{-\varepsilon}(K),$$

und im Hinblick darauf, daß dies für jedes $\varepsilon > 0$ richtig bleibt, auf

$$V C_\varrho(A) \geqq V C_\varrho(K). \tag{24}$$

Damit haben wir einen in der Brunn-Minkowskischen Theorie wohlbekannten wichtigen Satz gewonnen, wonach das Volumen des äußeren Parallelkörpers eines konvexen Körpers A nicht kleiner ist als das Volumen der entsprechenden Parallelkugel der mit A volumgleichen Kugel K.

Der nun zu leistende Nachweis von (21) kann beachtenswert einfach geführt werden. Betrachten wir eine zur Symmetrisierungsebene von S senkrecht stehende Sehne W von $S(A)$, so entspricht ihr eine auf der durch W hindurchlaufenden Symmetrisierungsgeraden g liegende kongruente Sehne W' von A. Die beiden äußeren Parallelkörper $C_\varrho(W)$ und $C_\varrho(W')$ dieser Sehnen, die aus einem Zylinder mit zwei aufgesetzten Halbkugeln bestehen (vgl. Fig. 4), sind offenbar kongruent, und es ist

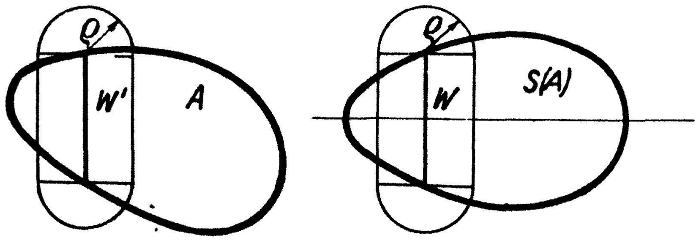

Fig. 4

$C_\varrho(W) = S C_\varrho(W')$. Da natürlich $C_\varrho(W') \subset C_\varrho(A)$ gilt, hat man $C_\varrho(W) \subset S C_\varrho(A)$. Demnach wird auch $\Sigma C_\varrho(W) \subset S C_\varrho(A)$ gelten, wobei die Vereinigungsmenge auf der linken Seite in bezug auf alle Sehnen W des Körpers $S(A)$ der oben angegebenen Lage zu bilden ist; andererseits ist diese Vereinigungsmenge identisch mit der äußeren Parallelmenge $C_\varrho S(A)$, so daß sich also $C_\varrho S(A) \subset S C_\varrho(A)$, d. h. Beziehung (21) ergibt.

7. *Die isoperimetrische Ungleichung*

Nun ist die Entwicklung so weit fortgeschritten, daß sich nun mühelos die isoperimetrische Ungleichung von H. A. Schwarz folgern läßt. Wenn wir, wie bereits in 3., das Volumen des äußern Parallelkörpers mit V_ϱ bezeichnen, so hat man, mit Rückblick auf die durch (15) festgelegte Bedeutung von R nach (24) die Beziehung

$$V_\varrho \geqq \frac{4\pi}{3} (R + \varrho)^3. \tag{25}$$

Wird nun der Einsatz gemäß der Steinerschen Formel (10) gemacht, so resultiert

$$V + F\varrho + M\varrho^2 + \frac{4\pi}{3}\varrho^3 \geqq \frac{4\pi}{3} R^3 + 4\pi R^2\varrho + 4\pi R\varrho^2 + \frac{4\pi}{3}\varrho^3$$

und hieraus nach den auch im Hinblick auf (15) naheliegenden Kürzungen

$$F + M\varrho \geqq 4\pi R^2 + 4\pi R\varrho.$$

Lassen wir nunmehr $\varrho \to 0$ streben, so wird

$$F \geqq 4\pi R^2. \tag{26}$$

Wird endlich aus (15) und (26) R eliminiert, so resultiert die isoperimetrische Ungleichung

$$F^3 \geqq 36\pi V^2. \tag{27}$$

Eine einfache Verifikation mit den auch in (7) angegebenen Maßzahlen der Kugel zeigt, daß in (27) bzw. in (1) in diesem Fall das Gleichheitszeichen beansprucht wird. Daß die Kugel der einzige eigentliche konvexe Körper dieser Eigenschaft ist, folgern wir aus einer später folgenden Verschärfung.

8. *Eine erste Ungleichung von H. Minkowski*

Indem wir die soeben bewiesene isoperimetrische Ungleichung (1) für die äußeren Parallelkörper in Anspruch nehmen, gewinnen wir die nach H. MINKOWSKI benannte Ungleichung

$$M^2 \geqq 4\pi F \tag{28}$$

oder also Ungleichung (2). In der Tat erhält man nach den Steinerschen Formeln (10) und (11)

$$F_\varrho^3 - 36\pi V_\varrho^2 = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + a_3\varrho^3 + a_4\varrho^4, \tag{29}$$

wobei die Koeffizienten des rechtsstehenden Polynoms in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind

$$\begin{aligned} a_0 &= F^3 - 36\pi V^2, \\ a_1 &= 6(MF^2 - 12\pi F V), \\ a_2 &= 12(M^2F - 2\pi F^2 - 6\pi V M), \\ a_3 &= 8(M^3 - 3\pi M F - 12\pi^2 V), \\ a_4 &= 12\pi(M^2 - 4\pi F). \end{aligned} \tag{29a}$$

Soll nun das «Defizit» (29) für beliebig große positive ϱ stets nicht negativ ausfallen, so muß offenbar $a_4 \geqq 0$ sein. Damit ist aber (28) bewiesen.

9. *Der Inkugelradius*

Es sei J eine Inkugel des konvexen Körpers A; ihr Radius sei r. Wie man in enger Anlehnung an die Beziehungen (8) und (9) leicht feststellt, ist die äußere Parallelkugel $C_\varrho(J)$ eine Inkugel des äußeren Parallelkörpers $C_\varrho(A)$. In gleicher Weise sieht man leicht ein, daß für $0 \leqq \varrho \leqq r$ die innere Parallelkugel $C_{-\varrho}(J)$ eine Inkugel des inneren Parallelkörpers $C_{-\varrho}(A)$ darstellt. Bezeichnen wir also die Inkugelradien der Parallelkörper $C_\varrho(A)$ und $C_{-\varrho}(A)$ mit r_ϱ und $r_{-\varrho}$, so gelten die nachfolgenden einfachen Relationen

$$r_\varrho = r + \varrho \quad (0 \leqq \varrho); \quad r_{-\varrho} = r - \varrho \qquad (0 \leqq \varrho \leqq r), \tag{30}$$

welche erkennen lassen, daß der Inkugelradius ein Funktional des konvexen Körpers ist, der vom Paralleloperator C in der denkbar einfachsten Weise beeinflußt wird. Es ist deshalb ohne weiteres anzunehmen, daß der Inkugelradius mit den drei fundamentalen Maßzahlen des Körpers Beziehungen eingeht, die insbesondere beim Studium der äußern und innern Parallelschar deutlich und wirksam in Erscheinung treten. Da ein analog einfaches Gesetz, wie es durch (30) dargetan ist, etwa beim Umkugelradius im allgemeinen nicht gilt, läßt sich das gleiche für den Umkugelradius nicht sagen.

Im folgenden werden wir in bezug auf den Inkugelradius r ein im Rahmen unserer Theorie nützliches System von Ungleichungen entwickeln. Um die hierzu erforderlichen Beweise vorzubereiten, muß hier etwas über Stützebene und Stützgröße eines konvexen Körpers A gesagt werden.

Unter einer Stützebene Ω von A verstehen wir eine Ebene, welche die beiden folgenden Eigenschaften hat: 1. Ω hat mit A Punkte gemeinsam; 2. A liegt ganz in einem der beiden abgeschlossenen Halbräume, deren Durchschnitt Ω ist.

Zu jeder Raumrichtung (Richtungseinheitsvektor) gibt es eine und nur eine Stützebene, so daß die vorgegebene Raumrichtung in denjenigen Halbraum weist, der als offener Halbraum keinen Punkt von A enthält. Der nichtnegative Abstand p dieser Stützebene von einem zu A gehörenden Punkt Z wollen wir Stützgröße (Stützfunktion) nennen; diese ist nach vorstehendem offensichtlich eine eindeutige Funktion der Raumrichtung. Es ist ohne weiteres klar, daß für zwei konvexe Körper A und B die Beziehung $A \supset B$ dann und nur dann gilt, wenn für einen geeignet gewählten Aufpunkt Z die beiden Stützgrößen p und q von A und B bezüglich Z für jede Raumrichtung der Bedingung $p \geqq q$ genügen.

Für die folgenden Ausführungen ist es zweckdienlich, den Aufpunkt Z mit dem Mittelpunkt einer Inkugel J zu identifizieren.

Nun wollen wir zunächst die Einwirkung des Paralleloperators C auf die Stützgrößen erwähnen. Unmittelbar aus den Definitionen können die beiden folgenden Beziehungen gewonnen werden: Für jede einzelne Raumrichtung gilt

$$p_\varrho = p + \varrho; \quad p_{-\varrho} \leqq p - \varrho, \qquad (0 \leqq \varrho \leqq r) \quad (31)$$

wobei p_ϱ bzw. $p_{-\varrho}$ die Stützgrößen der Parallelkörper $C_\varrho(A)$ bzw. $C_{-\varrho}(A)$ bezeichnen. Beachte auch, daß nach den vorstehenden Ausführungen über die Inkugel zu allen Körpern der äußeren und inneren Parallelschar Inkugeln einer konzentrischen Schar gehören. Dieses gemeinsame Zentrum Z ist der Aufpunkt, auf welchen sich (31) und die folgenden Ausführungen beziehen.

Nun wollen wir zeigen, daß die folgenden Ungleichungen gelten: Für jede Raumrichtung ist

$$p_\varrho \leqq p\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right); \quad p_{-\varrho} \geqq p\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right). \qquad (0 \leqq \varrho \leqq r) \quad (32)$$

Der Beweis der ersten Ungleichung in (32) ergibt sich unmittelbar aus der Formel (31) für p und der Bemerkung, daß natürlich $p \geqq r$ ist. Die zweite Ungleichung von (32) ist weniger trivial. Hier hilft die folgende Überlegung: Für einen Kappenkörper A^0 der Kugel (vgl. Fig. 5) gilt in der zu beweisenden Ungleichung wohl das Gleichheitszeichen, da der innere Parallelkörper eines solchen Kappenkörpers A^0 ähnlich zu A^0 ist, wobei der gemeinsame Inkugelmittelpunkt Ähnlichkeitszentrum ist. Gehen wir nun zu einem allgemeineren konvexen Körper A, so läßt sich von einem zu A

gehörenden Punkt der Stützebene ein Tangentialkegel an die Inkugel legen. So werden wir gewahr, daß A einen Kappenkörper A^0 enthält, der die gleiche Inkugel und zu der betrachteten Raumrichtung die gleiche Stützgröße p aufzuweisen hat. Da nun offenbar $C_{-\varrho}(A) \supset C_{-\varrho}(A^0)$ gilt, wird zunächst $p_{-\varrho} \geqq p^0_{-\varrho}$ sein; nach der vorstehenden Bemerkung aber ist $p^0_{-\varrho} = p^0\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)$. Mit der Bemerkung, daß ja $p^0 = p$ ist, schließt sich der Beweis für die zweite Ungleichung in (32).

Nun ziehen wir aus diesen wegbereitenden Relationen wichtigere Folgerungen. Zunächst folgt aus (32), daß

$$C_\varrho(A) \subset \left(1 + \frac{\varrho}{r}\right)A; \quad C_{-\varrho}(A) \supset \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)A \qquad (0 \leqq \varrho \leqq r) \tag{33}$$

gilt; hierbei bezeichnet λA den mit A ähnlichen und ähnlich gelegenen Körper, mit

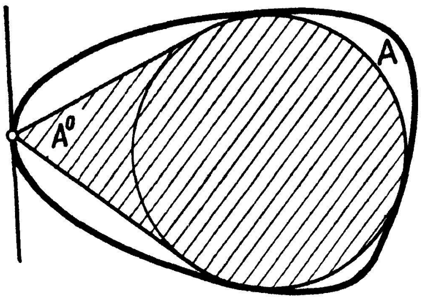

Fig. 5

dem Inkugelmittelpunkt Z von A als Ähnlichkeitszentrum und der linearen Vergrößerung λ. Im Hinblick auf die Monotonie der Maßzahlen (6) schließt man auf das Bestehen der folgenden Ungleichungen

$$V_\varrho \leqq V\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right)^3; \quad V_{-\varrho} \geqq V\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)^3; \tag{34}$$

$$F_\varrho \leqq F\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right)^2; \quad F_{-\varrho} \geqq F\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right)^2; \tag{35}$$

$$M_\varrho \leqq M\left(1 + \frac{\varrho}{r}\right); \quad M_{-\varrho} \geqq M\left(1 - \frac{\varrho}{r}\right). \tag{36}$$

10. *Parallelungleichungen*

Die nachfolgend angeführten Ungleichungen für die Maße der äußeren und inneren Parallelkörper ergeben sich als einfache Folgerungen aus den bisherigen Hauptresultaten. Es handelt sich um die Relationen, welche diejenigen des Systems (34), (35) und (36) in gewissem Sinne ergänzen, nämlich um

$$V_\varrho \geqq \left(\sqrt[3]{V} + \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}\,\varrho\right)^3; \quad V_{-\varrho} \leqq \left(\sqrt[3]{V} - \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}\,\varrho\right)^3; \tag{37}$$

$$F_\varrho \geqq (\sqrt{F} + \sqrt{4\pi}\,\varrho)^2; \quad F_{-\varrho} \leqq (\sqrt{F} - \sqrt{4\pi}\,\varrho)^2; \tag{38}$$

$$M_\varrho \geqq M + 4\pi\varrho; \quad M_{-\varrho} \leqq M - 4\pi\varrho. \tag{39}$$

Die hier an erster Stelle gesetzten Ungleichungen für die Maßzahlen der äußeren Parallelkörper ergeben sich dadurch, daß man in den Steinerschen Formeln (10), (11) und (12) die bei den Potenzen ϱ, ϱ^2 stehenden Koeffizienten gemäß den Ungleichungen (27) und (28) ersetzt. – Die an zweiter Stelle aufgeführten Ungleichungen für die inneren Parallelmaße lassen sich dadurch gewinnen, daß man die oben erörterten Ersetzungen in den Relationen

$$\begin{aligned} V_{-\varrho} + F_{-\varrho}\varrho + M_{-\varrho}\varrho^2 + \frac{4\pi}{3}\varrho^3 &\leqq V, \\ F_{-\varrho} + 2M_{-\varrho}\varrho + 4\pi\varrho^2 &\leqq F, \\ M_{-\varrho} + 4\pi\varrho &\leqq M, \end{aligned}$$

die sich aus (9) ebenfalls mit Verwendung der Steinerschen Formeln ergeben, in gleicher Weise durchführt.

11. *Eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung*

Um eine an sich instruktive Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung (1) zu gewinnen, wählen wir als Ausgangspunkt die folgende Volumformel

$$V = \int_0^r F_{-\varrho}\, d\varrho, \tag{40}$$

deren Richtigkeit für konvexe Polyeder mühelos eingesehen werden kann.

Hierbei bezeichnet r wie weiter oben den Inkugelradius. Verwenden wir nun die sich in (38) vorfindende Ungleichung

$$F_{-\varrho} \leqq (\sqrt{F} - \sqrt{4\pi}\,\varrho)^2 \tag{41}$$

für die innere Paralleloberfläche, so erreicht man

$$V \leqq rF - \sqrt{4\pi F}\, r^2 + \frac{4\pi}{3} r^3 \tag{42}$$

oder auch

$$\sqrt{F^3} - \sqrt{36\pi}\, V \geqq (\sqrt{F} - \sqrt{4\pi}\, r)^3. \tag{43}$$

Da für $a \geqq b \geqq 0$ noch $a^2 - b^2 \geqq (a-b)^2$ gilt, läßt sich aus (43) die hier in Aussicht gestellte Verschärfung (3)

$$F^3 - 36\pi V^2 \geqq (\sqrt{F} - \sqrt{4\pi}\, r)^6 \tag{44}$$

folgern. – Da offenbar für jeden von der Kugel verschiedenen eigentlichen konvexen Körper $F > 4\pi r^2$ sein wird, läßt sich jetzt der Schluß ziehen, daß in der isoperimetrischen Ungleichung (1) das Gleichheitszeichen bei solchen Körpern nur im Falle der Kugel gelten kann. Damit ist das isoperimetrische Problem vollständig gelöst.

H. HADWIGER, Bern.