Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 3 (1948)
Heft: 1

Artikel: Zur Fadenkonstruktion von Graves
Autor: Trost, Ernst
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13568

faßt, und zwar sollen ihre Scheitel durch diese Affinität in die Scheitel der vorgelegten Hyperbel übergeführt werden. Die affine Transformation besteht dann darin, daß die Ebene der gleichseitigen Einheitshyperbel so verzerrt wird, daß jede zur Hauptachse parallele Strecke auf die a-fache Länge ausgedehnt und zugleich jede zur Nebenachse parallele Abmessung auf das b-fache gestreckt wird. Jede in der Ebene der gegebenen Hyperbel liegende Figur hat dann einen $(a\,b)$-mal so großen Flächeninhalt wie diejenige Figur, aus der sie durch die affine Transformation der Ebene der gleichseitigen Einheitshyperbel entstanden ist.

Die Sehne der gegebenen Hyperbel, die im Abstand x parallel zur Nebenachse gezogen wurde, geht sodann bei dieser affinen Verzerrung aus der im Abstand $\frac{x}{a}$ parallel zur Nebenachse verlaufenden Sehne der gleichseitigen Einheitshyperbel hervor. Hat die betrachtete Sehne der gegebenen Hyperbel die Länge $2\,y$, so ist $2\,\frac{y}{b}$ die Längenmaßzahl der entsprechenden Sehne der gleichseitigen Einheitshyperbel. Der zu dieser Sehne gehörige Sektor der gleichseitigen Einheitshyperbel, dessen Flächeninhalt

$$\varphi = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

beträgt, wird dann durch die benutzte affine Transformation in den ursprünglich gegebenen Hyperbelsektor übergeführt. Sein Inhalt ist demnach

$$\underline{\underline{H = a\,b\,\varphi = a\,b\operatorname{arcosh}\frac{x}{a} = a\,b\ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}}.$$

ARNULF REUSCHEL, Wien.

Zur Fadenkonstruktion von Graves

Wird um eine Ellipse E ein geschlossener Faden der festen Länge L gelegt und durch einen sich bewegenden Stift S gespannt, so beschreibt S eine zu E konfokale Ellipse E'. Für diese von GRAVES angegebene Verallgemeinerung der «Gärtnerkonstruktion» der Ellipse sind verschiedene Beweise angegeben worden[1]). Neben Ableitungen, die elliptische Integrale bzw. elliptische Koordinaten verwenden, gibt es anschauliche Beweise, die mit infinitesimalgeometrischen Methoden zeigen, daß die Normale in einem Punkt S von E' den Winkel der von S an E gezogenen Tangenten halbiert. Dadurch ist aber bekanntlich die zu E konfokale Ellipse durch S charakterisiert. Man erkennt sofort, daß die erwähnte Eigenschaft der Normalen in einem Punkt von E' bestehen bleibt, wenn man E durch allgemeinere geschlossene konvexe Kurven ersetzt. Wir geben für diese Tatsache einen analytischen Beweis für den Fall, daß E eine stetige Tangente und überall positive, stückweise stetige Krümmung hat, und zeigen, daß E' unter diesen Voraussetzungen eine Eilinie ist, das heißt, stetige Krümmung besitzt.

---

[1]) F. DINGELDEY, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme. Enzyklopädie der math. Wissenschaften III, 2., 1., S. 120–122. – F. KLEIN, Vorlesungen über höhere Geometrie, 3. Aufl., S. 35. – J. L. COOLIDGE, History of the conic sections. Oxford 1945, S. 121.

Wir stellen E durch die Stützfunktion $p(\varphi)$ als Hüllkurve ihrer Stützgeraden $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p(\varphi) = 0$ dar. Dann ist $p(\varphi) = p(\varphi + 2\pi) > 0$ stetig und stetig differenzierbar und $\varrho = p''(\varphi) + p(\varphi) > 0$ ist der zur Stützgeraden φ gehörige Krümmungsradius, während

$$U = \int_0^{2\pi} \varrho\, d\varphi = \int_0^{2\pi} p(\varphi)\, d\varphi\ ^{1)}$$

den Umfang von E darstellt. Der Schnittpunkt S der Stützgeraden φ und $\varphi + \beta$ hat die Koordinaten

$$x_S = \frac{1}{\sin\beta}\{p(\varphi)\sin(\varphi+\beta) - p(\varphi+\beta)\sin\varphi\},$$
$$y_S = \frac{1}{\sin\beta}\{p(\varphi+\beta)\cos\varphi - p(\varphi)\cos(\varphi+\beta)\}.$$

Für die entsprechenden Berührungsstrecken haben wir folgende allgemein gültigen Formeln angegeben[2] ($\beta \neq n\pi$)

$$\begin{aligned} d(\varphi) &= \frac{1}{\sin\beta}\{p(\varphi+\beta) - p(\varphi)\cos\beta - p'(\varphi)\sin\beta\}, \\ d(\varphi+\beta) &= \frac{1}{\sin\beta}\{p(\varphi) - p(\varphi+\beta)\cos\beta + p'(\varphi+\beta)\sin\beta\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Es ist somit

$$\begin{aligned} d(\varphi) + d(\varphi+\beta) &= \{p(\varphi+\beta) + p(\varphi)\}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + p'(\varphi+\beta) - p'(\varphi), \\ d(\varphi+\beta) - d(\varphi) &= \{p(\varphi) - p(\varphi+\beta)\}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + p'(\varphi+\beta) + p'(\varphi), \end{aligned} \tag{2}$$

und für die Länge des von S aus um E gelegten Fadens findet man

$$L = U + \{p(\varphi+\beta) + p(\varphi)\}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \int_{\varphi}^{\varphi+\beta} p(z)\,dz\ ^{2)}. \tag{3}$$

Ist L konstant, so wird durch diese Gleichung der Winkel β als stetige Funktion von φ bestimmt. Differentiation von (3) nach φ liefert nämlich unter Berücksichtigung von (1) und (2)

$$d(\varphi+\beta) - d(\varphi) + \beta' d(\varphi+\beta) = 0\ ^{3)}. \tag{4}$$

Setzt man

$$Q(\varphi) = \frac{1}{2\cos\beta/2}\{p(\varphi+\beta) + p(\varphi)\} = P\left(\varphi + \frac{\beta}{2}\right),$$

so folgt mit (4) und (1)

$$Q'(\varphi) = \frac{1}{2\sin\beta/2}\{p(\varphi+\beta) - p(\varphi)\}\left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) = P'\left(\varphi + \frac{\beta}{2}\right)\left(1 + \frac{\beta'}{2}\right),$$

wobei P nach der Variabeln $t = \varphi + \beta/2$ differenziert ist. Wir fassen in Verbindung

---

[1]) Es ist $ds = \varrho\, d\varphi$. $p''(\varphi)$ ist integrierbar in $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, als beschränkte Funktion mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen, während die Integralfunktion $p'(\varphi)$ nach Voraussetzung stetig ist.

[2]) Vgl. E. TROST, Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises. El. Math. *2*, Heft 4, S. 76 (1947).

[3]) Diese Formel zeigt, daß der Winkel $\alpha = 180^0 - \beta$, unter dem E von E' aus gesehen wird, nur dann ein relatives Extremum erreicht, wenn die Berührungsstrecken einander gleich sind.

mit (3) $P(t)$ als Stützfunktion einer Kurve E^* auf und erhalten als Koordinaten des allgemeinen Punktes von E^*

$$x = P(t)\cos t - P'(t)\sin t = x_S,$$
$$y = P(t)\sin t + P'(t)\cos t = y_S,$$

das heißt E^* ist mit E' identisch. Die Normale in S hat somit den Richtungswinkel $\varphi + \beta/2$, w. z. b. w.

Ähnlich wie oben findet man mit (2)

$$P''\left(\varphi + \frac{\beta}{2}\right)\left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) = \frac{p'(\varphi+\beta) - p'(\varphi)}{2\sin\beta/2}\left(1 + \frac{\beta'}{2}\right) + \frac{\beta'}{2}\cdot\frac{d(\varphi+\beta) - d(\varphi)}{2\sin\beta/2}.$$

Hieraus ergibt sich mit (2) und (4) ein stetiger Krümmungsradius für E^*:

$$\varrho^* = P(t) + P''(t) = \frac{1}{\sin\beta/2}\cdot\frac{2\,d(\varphi)\,d(\varphi+\beta)}{d(\varphi) + d(\varphi+\beta)} > 0.$$

E^* ist also eine Eilinie. Schreibt man diesen Ausdruck in der Form

$$\frac{1}{\varrho^*} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{d(\varphi)} + \frac{1}{d(\varphi+\beta)}\right\}\cos\frac{\alpha}{2},$$

wo $\alpha = 180^0 - \beta$ der Winkel zwischen den Berührungsstrecken $d(\varphi)$ und $d(\varphi+\beta)$ ist, so erhält man folgende geometrische Deutung: Die in den Berührungspunkten mit E auf $d(\varphi)$ und $d(\varphi+\beta)$ errichteten Lote schneiden auf der Normalen in S zwei Stücke SA und SB heraus, deren harmonisches Mittel der Krümmungsradius ϱ^* ist, das heißt, der Krümmungsmittelpunkt ist der vierte harmonische Punkt zu S und A, B. Für die Ellipse ($d(\varphi) + d(\varphi+\beta) = r_1 + r_2 = 2a$) ist dieser Satz sowie auch die Formel für ϱ^* längst bekannt[1]). Macht man von dieser Tatsache Gebrauch, so kann man natürlich die oben durch Rechnung gefundene Verallgemeinerung auch «elementar» ableiten. Man lege zu diesem Zweck den Faden um ein konvexes Polygon. Vom Stift wird offenbar eine aus Ellipsenbögen zusammengesetzte Kurve beschrieben. Die Tangente ist stetig in den Übergangsstellen, die Krümmung hingegen nicht. Diese Unstetigkeit verschwindet, wenn man das Polygon in eine glatte Kurve ohne geradlinige Stücke übergehen läßt.

ERNST TROST, Zürich.

Das Hornersche Schema für komplexe Funktionswerte

Zur Berechnung der Funktionswerte ganzer rationaler Funktionen mit reellen Koeffizienten wird wohl stets das ungemein praktische Hornersche Schema[2]) verwendet. Weniger bekannt scheint zu sein, daß L. COLLATZ[3]) gezeigt hat, daß sich dieses Schema für die Berechnung der Funktionswerte solcher Funktionen an einer komplexen Stelle $x_0 = u + vi$ abändern läßt. Es sei

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n; \qquad (a_k \text{ reell})$$

---

[1]) Vgl. DINGELDEY, l. c., S. 73.
[2]) W. G. HORNER, Transaction, London 1819.
[3]) Das Hornersche Schema für komplexe Wurzeln. Z. angew. Math. Mech., 20, Nr. 4 (1940).