In den Endpunkten einer festen Basis wird je ein Transporteur angebracht und mittels der Funktionen $\alpha = 2\tau$ bzw. $\beta = 2\sigma$ beziffert. Zwei bewegliche gerade Leitern sind um einen Punkt drehbar, auf beiden wird die Funktion $x = z^2$ dargestellt, wobei der gemeinsame Drehpunkt der Nullpunkt ist und als Einheitsstrecke die oben gewählte Basis benützt wird. Der Gebrauch des Nomogramms ist leicht verständlich.

WILLI LÜSSY, Winterthur.

Aufgaben

Aufgabe 15. Die im Intervall $|x - x_0| \leqq a$ eindeutige Funktion $y = f(x)$ mit $y_0 = f(x_0)$ bestimme eine im Intervall $|y - y_0| \leqq b$ eindeutige Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$. Wenn die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(x_0) = 1$, ist dann auch die Umkehrfunktion an der Stelle y_0 differenzierbar? Mit anderen Worten: Wenn das Bild der Funktion $y = f(x)$ im Punkte (x_0, y_0) eine unter 45° geneigte Tangente besitzt, hat dann auch das Bild der Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$ im entsprechenden Punkte eine Tangente?

P. FINSLER.

Erste Lösung. Die aufgeworfene Frage ist zu verneinen. Funktionsbeispiel:

Es bezeichne β_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ die Folge derjenigen rationalen Zahlen β des Intervalls $0 < \beta \leqq 1$, für welche die Gleichung

$$x + 2x^2 = \beta$$

keine positive rationale Lösung x aufweist. Um einzusehen, daß eine unendliche Menge derartiger Zahlen β existiert, genügt es beispielsweise, zu verifizieren, daß alle Zahlen

$$\beta = \frac{1}{8k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

jedenfalls zu dieser Menge gehören. Es sei ferner $\alpha_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ die Folge der rationalen Zahlen des Intervalls $\frac{1}{2} < \alpha \leqq 1$. (Die Zahlen der vorliegenden abzählbar unendlichen Mengen werden in irgendeiner an sich beliebigen Weise numeriert.) Nun geben wir die Funktion durch die folgende Vorschrift: Es sei

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für irrationale } x \text{ des Intervalls } 0 < x < 1 \\ x + 2x^2 & \text{für rationale } x \text{ des Intervalls } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ \beta_n & \text{für } x = \alpha_n \text{ des Intervalls } \frac{1}{2} < x \leqq 1 \\ -F(-x) & \text{für negative } x \text{ des Intervalls } -1 \leqq x < 0\,. \end{cases}$$

Die Funktion $y = F(x)$ bildet das Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ eindeutig auf das Intervall $-1 \leqq y \leqq 1$ ab, so daß sie dort eine eindeutige inverse Funktion $x = F^*(y)$ zuläßt. Nun ist $F(0) = 0$ und $F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 1$; dagegen ist $F^*(0) = 0$ und $F^*\left(\frac{1}{8k}\right) > \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, so daß $F^*(y)$ bei $y = 0$ unstetig, also auch nicht differenzierbar ist. Die hier erörterte Funktion stellt somit ein Gegenbeispiel im Sinne der Aufgabe mit $a = b = 1$ und $x_0 = y_0 = 0$ dar.

H. HADWIGER, Bern.

Zweite Lösung. Es sei $x_0 = 1$, $y_0 = f(x_0) = \frac{1}{2}$. Man bestimme für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Werte von x_n, y_n aus den Gleichungen

$$x_1 = 0, \quad x_{4n-1} = x_{4n-3} + \frac{1}{2}, \quad x_{4n+1} = x_{4n-1}^2 - x_{4n-3},$$

$$y_{4n-3} = x_{4n-3}, \quad y_{4n-1} = \frac{1}{2} x_{4n-1}^2;$$

$$x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_{4n} = x_{4n-2} + \frac{1}{2}, \quad x_{4n+2} = \frac{1 + \sqrt{4 x_{4n-2} - 3}}{2},$$

$$y_{4n-2} = x_{4n} - 1, \quad y_{4n} = \frac{1}{2} x_{4n+2}^2.$$

Setzt man für $x_{2n-1} \leqq x < x_{2n+3}$: $\qquad f(x) = y_{2n-1} + \frac{1}{2}(x - x_{2n-1})$

und ebenso für $x_{2n+4} < x \leqq x_{2n}$: $\qquad f(x) = y_{2n} + \frac{1}{2}(x - x_{2n})$,

so genügt die Funktion $y = f(x)$ in den Intervallen $|x - x_0| \leqq 1$, $|y - y_0| \leqq \frac{1}{2}$ den verlangten Bedingungen, die Umkehrfunktion ist aber an der Stelle $y_0 = \frac{1}{2}$ nicht stetig und folglich nicht differenzierbar. Im Intervall $|x - x_0| \leqq \frac{1}{2}$ verläuft das Bild der Funktion $y = f(x)$ monoton steigend zwischen der Parabel $y = \frac{1}{2} x^2$ und ihrer Tangente $y = x - \frac{1}{2}$, und zwar mit der Steigung 0,5 und Sprungstellen vom Punkte $x_3 = 0{,}5$, $y_3 = 0{,}125$ der Parabel aus bis zum Punkte x_0, y_0 und von da bis zum Punkte $x_2 = 1{,}5$, $y_2 = 1$ der Tangente. P. FINSLER, Zürich.

Aufgabe 20. Man beweise für die Eulersche Gerade g des Dreiecks mit den Seiten a, b, c:
1. g ist dann und nur dann parallel zur Seite a, wenn

$$a^2(2a^2 - b^2 - c^2) = (b^2 - c^2)^2. \qquad (b \neq c)$$

2. g ist dann und nur dann Ecktransversale, wenn das Dreieck entweder rechtwinklig oder gleichschenklig ist.
3. Bildet man aus zwei Seiten des Dreiecks und einer zu g parallelen Geraden ein neues Dreieck, so ist seine Eulersche Gerade parallel zur dritten Seite des ursprünglichen Dreiecks (Satz von ZEEMAN). —
Wie lassen sich einfach Dreiecke mit zu einer Seite paralleler Eulerscher Geraden konstruieren? ERNST TROST.

Lösung. Beweis von 1. und 2. (Lösung nach L. KIEFFER, Luxemburg):
1. Im Dreieck ABC sei H der Höhenschnittpunkt, S der Schwerpunkt und M der Mittelpunkt von $BC = a$. g ist dann und nur dann parallel zu a, wenn

$$AH : h_a = AS : AM = 2 : 3.$$

Man findet

$$AH = \frac{b \cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{b\, c \cos\alpha}{h_a}.$$

Die zu beweisende Beziehung ergibt sich nach einiger Umformung, indem man $\cos\alpha$ und h_a^2 durch a, b, c ausdrückt.
Zur verlangten Konstruktion genügt es, auf h_a den Punkt H entsprechend obigem Verhältnis anzunehmen und das Dreieck durch Wahl einer zweiten Höhe festzulegen.
2. Die Bedingungen sind offenbar hinreichend. Liegen umgekehrt H, S, A auf einer Geraden und ist $H \neq A$, so fällt h_a mit der Schwerlinie AS zusammen, das heißt $AB = AC$. Ist $H = A$, so sind b und c Höhen, das heißt $\sphericalangle\, BAC = 90°$.

Beweis von 3 (Lösung des Aufgabenstellers):

Liegt a auf der x-Achse eines Koordinatensystems und sind $\operatorname{tg}\beta$ bzw. $-\operatorname{tg}\gamma$ die Steigungen von c bzw. b, so findet man nach einiger Rechnung für g die Steigung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma - 3}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}.$$

Ist $\operatorname{tg}\beta \neq \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{3}$, $\gamma = 60^\circ$, so wird $\varphi = 60^\circ$, das heißt *unabhängig* von β. In diesem Fall bildet eine Parallele zu g mit a und b ein gleichseitiges Dreieck, in dem die Eulersche Gerade unbestimmt ist. Das ist ein Grenzfall des Satzes von ZEEMAN. Der allgemeine Beweis folgt für $\operatorname{tg}\gamma \neq \sqrt{3}$ aus

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\gamma - 3}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\gamma} = \operatorname{tg}\beta.$$

Bemerkung: Die Bedingung $\operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = 3$ für $g \| a$ ist identisch mit der aus 1. folgenden Beziehung $3\cos\alpha = 2\sin\beta\sin\gamma$.

Aufgabe 24. Es bezeichne A eine abgeschlossene Menge auf der Peripherie des Einheitskreises und A_α, $0 \leqq \alpha < 2\pi$, die durch eine positive Drehung um den Winkel α um den Kreismittelpunkt aus A hervorgehende kongruente Menge. Kann man zu jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ noch eine Menge A vom Maß $M(A) < \varepsilon$ angeben, so daß für sämtliche Drehwinkel $0 \leqq \alpha < 2\pi$ stets $A \cdot A_\alpha \neq 0$ ist. H. HADWIGER.

Lösung. Man wähle auf dem Einheitskreis E einen abgeschlossenen Bogen B von der Länge b, $0 < b < \varepsilon$, und auf dem Komplementärbogen $E - B$ endlich viele Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$, welche diesen in Bogen, deren Längen kleiner als b sind, teilen. Dann ist $A = B + P_1 + P_2 + \cdots + P_n$ eine Punktmenge mit den geforderten Eigenschaften.

Anmerkung: Es scheint mir bemerkenswert, daß es auf dem Einheitskreis auch abgeschlossene Punktmengen vom linearen Maße 0 gibt, die ebenfalls die Eigenschaft besitzen, daß die durch Drehung um den beliebigen Winkel α aus der ursprünglichen Menge A hervorgehende Menge A_α mit A gemeinsame Punkte hat. Man betrachte etwa das Cantorsche triadische Diskontinuum D, bestehend aus allen reellen Zahlen des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$, die wenigstens eine triadische Entwicklung mit lauter Ziffern 0 und 2 (also ohne die Ziffer 1) aufweisen. A sei die Menge aller Einheitskreispunkte, deren Argumente die mit 2π multiplizierten Zahlen von D sind. A ist eine abgeschlossene Menge vom Maße 0. Um zu zeigen, daß $A \cdot A_\alpha \neq 0$ für jeden beliebigen Winkel α, muß man offenbar beweisen, daß es zwei Punkte von A gibt, deren Argumente sich um α unterscheiden. Dies bedeutet aber, daß man zu jeder reellen Zahl a, $0 \leqq a \leqq 1$ zwei Zahlen b und c des Diskontinuums D aufweisen muß, für die $a = c - b$. Dazu betrachtet man die triadische Entwicklung von a und bildet daraus die triadische Entwicklung von b folgendermaßen:

1. An jeder Stelle, wo bei a die Ziffer 0 steht, setzt man bei b die Ziffer 2.
2. An jeder Stelle, wo bei a die Ziffer 2 steht, setzt man bei b die Ziffer 0.
3. An denjenigen Stellen, wo a die Ziffer 1 aufweist, setzt man bei b abwechslungsweise die Ziffern 0 und 2, das heißt: an der Stelle, wo bei a erstmals die Ziffer 1 vorkommt, setzt man bei b die Ziffer 0; an den weiteren Stellen, wo bei a die Ziffer 1 vorkommt, setzt man bei b entweder 2 oder 0, je nachdem bei a vor dieser Stelle eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Ziffern 1 vorkommt (gleichgültig, ob dazwischen auch noch Ziffern 0 oder 2 vorkommen).

Es ist leicht einzusehen, daß nicht nur die so konstruierte Zahl b, sondern auch $c = a + b$ eine Zahl von D ist. ALICE ROTH, Bern.

Aufgabe 28. Eine Parabel ist durch zwei Punkte, A und B, und die zugehörigen Tangenten, die sich in T schneiden mögen, bestimmt. Man beweise die Richtigkeit der folgenden Konstruktion der Krümmungskreise in A und B:

Man zeichne das Rechteck über AT, dessen Gegenseite durch B geht. Dann verlängere man AT um sich selbst über T hinaus bis C und ziehe durch C die Normale zur

Rechtecksdiagonale aus A. Ihr Schnittpunkt mit der Parabelnormalen in A ist das Krümmungszentrum für A.

Ferner zeige man: Die drei Parabeln, von denen jede zwei Seiten eines Dreiecks in der Mitte berührt, oskulieren sich paarweise, und die Krümmungsradien in den Oskulationspunkten verhalten sich wie die Kuben der Dreiecksseiten. A. STOLL.

Aufgabe 29. Einem Dreieck können Ovale umschrieben werden, indem man über den Seiten als Sehnen Parabelbogen zeichnet, die sich in den Ecken berühren. Man zeige, daß genau eines dieser Ovale stetig gekrümmt ist. Für welche möglichst umfassende Teilmenge der Ovale ist das Oval mit stetiger Krümmung durch minimalen Flächeninhalt ausgezeichnet? E. TROST.

Aufgabe 30. Einem Dreieck vom Flächeninhalt F sollen drei Parabelbogen so eingeschrieben werden, daß jeder zwei Dreiecksseiten in Eckpunkten berührt. Man berechne den Inhalt der sieben Flächenstücke, in die das Dreieck aufgeteilt wird. E. TROST.

Berichte

Vortrag von Prof. Dr. H. HOPF im Mathematischen Kolloquium Winterthur (16.6.47) über

Einige geometrische Eigenschaften stetiger Funktionen.

Den Ausgangspunkt zu den Ausführungen von Herrn Prof. Dr. HOPF bildete eine Verallgemeinerung des Theorems von ROLLE, die von P. LÉVY stammt und so lautet:

Satz 1. Jede Kurve, die für $0 \leqq x \leqq 1$ durch eine stetige Funktion $y = f(x)$ mit $f(0) = f(1)$ dargestellt wird, besitzt für jede natürliche Zahl n wenigstens eine horizontale Sehne der Länge $1/n$.

Der Beweis ist ganz elementar. – Der Satz gewinnt dadurch an Interesse, daß anderseits folgendes gilt:

Satz 1'. Zu jeder reellen Zahl s, $0 < s < 1$, welche nicht von der Form $s = 1/n$ mit natürlichem n ist, gibt es eine Kurve von der im Satz 1 genannten Art, welche keine horizontale Sehne der Länge s besitzt.

Der Beweis erfolgte durch explizite Konstruktion eines Beispiels.

Der Satz 1 kann als Korollar eines allgemeineren Satzes aufgefaßt werden: Für eine stetige Funktion $f(x)$, die die Voraussetzung des Satzes 1 erfüllt, verstehen wir unter S_f die Menge der reellen Zahlen, welche als Längen der horizontalen Sehnen der durch $y = f(x)$ gegebenen Kurve auftreten, und unter $\bar{S}_f$ die Menge aller anderen nichtnegativen reellen Zahlen. Dann gilt:

Satz 2. Die Menge $\bar{S}_f$ ist «additiv-abgeschlossen», das heißt aus $a \varepsilon \bar{S}_f$, $b \varepsilon \bar{S}_f$ folgt $a + b \varepsilon \bar{S}_f$. ($a \varepsilon M$ soll heißen, daß a in M enthalten ist.)

Daß Satz 1 aus Satz 2 folgt, ist sehr leicht zu sehen. — Satz 2 läßt sich auch so formulieren: Ist $c = a + b$, $c \varepsilon S_f$, so ist $a \varepsilon S_f$ oder $b \varepsilon S_f$; für den Beweis darf man $c = 1$ annehmen, also:

Satz 2'. f erfülle die Voraussetzungen von Satz 1; dann gibt es für jedes a zwischen 0 und 1 entweder eine horizontale Sehne der Länge a oder eine horizontale Sehne der Länge $1 - a$.

Dieser Satz wiederum ist eine leichte Folgerung aus dem nachstehenden Satz A, der fast trivial ist:

Satz A. Auf einer Kreislinie K sei eine stetige Funktion f gegeben; dann existiert zu jeder positiven Zahl a, die kleiner ist als die Länge von K, ein solcher Teilbogen $\widehat{pq}$ von K, daß $f(p) = f(q)$ ist.

Es erhebt sich die Frage, ob sich der Satz A, der als die Quelle der Sätze 2', 2 und 1 gelten kann, auf mehr Dimensionen verallgemeinern läßt, also insbesondere, ob die Kugelfläche ähnliche Eigenschaften besitzt wie diejenige, die durch den Satz A von