Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 6

PDF erstellt am: **01.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

findet darin ein Goldstück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich in der andern Schublade ein Silberstück befindet?

Die Voraussetzungen lauten $w(a) = w(b) = w(c)$ und $w_i(\mathrm{I}) = w_i(\mathrm{II})$ $(i = a, b, c)$. Die Frage ist die nach der Wahrscheinlichkeit $w_O(b)$, wenn das Erscheinen eines Goldstückes mit O bezeichnet wird.

Hier darf man nun nicht so schließen: Die Kästchen sind ursprünglich gleichmöglich. Wenn ein Goldstück gefunden wurde, so sind nur noch a und b möglich, sie bleiben gleichmöglich, es wäre $w_O(b) = 1:2$. Dieser Schluß ist falsch, weil die Bedingung, daß ein Goldstück gefunden wird, nur für a sicher erfüllt ist, aber nicht für b; hier hat man nur die Wahrscheinlichkeit $1:2$.

Der richtige Schluß geht so: Man zeigt zuerst, daß alle sechs Schubladen *a priori* gleichmöglich sind. Aus $w_a(\mathrm{I}) = w_a(\mathrm{II})$ folgt $w(a, \mathrm{I}) = w(a, \mathrm{II})$ nach der obigen Umkehrformel, außerdem ist $w(a) = w(a, \mathrm{I}$ oder $a, \mathrm{II}) = w(a, \mathrm{I}) + w(a, \mathrm{II}) = 1:3$, also $w(a, \mathrm{I}) = w(a, \mathrm{II}) = 1:6$ und dasselbe gilt für b und c. Unter der Bedingung, daß ein Goldstück gefunden wurde, sind dann nur noch a, I, a, II und b, I möglich; diese bleiben aber gleichmöglich, weil für sie die Bedingung O sicher erfüllt ist. Es ergibt sich also $w_O(b) = 1:3$.

Für den Schulunterricht scheint mir eine Häufigkeitsrechnung für endliche Folgen als Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz nützlich zu sein, denn es ergeben sich dabei Sätze und Beziehungen, die denen der Wahrscheinlichkeitsrechnung vollständig entsprechen. Das ist natürlich kein Zufall, es hat einen innern Grund. Man kann nämlich dem Begriff der Wahrscheinlichkeit eine genaue Häufigkeitsdeutung geben, nur nicht, wie es oft versucht wurde, in bezug auf eine zufällige, sondern in bezug auf eine bestimmte endliche Folge:

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der relativen Häufigkeit in einer Folge, in der alle gleichmöglichen Fälle gleich oft auftreten.

Die Häufigkeit in einer endlichen Folge ist unabhängig von der Anordnung; man braucht also keine Regellosigkeitsforderung, sondern kann sich die möglichen Fälle ganz regelmäßig angeordnet denken. Wenn man dann abzählt, wie viele davon für das Ereignis günstig sind, und dies durch die Gesamtzahl der Fälle dividiert, so hat man die klassische Definition $w = \frac{g}{m}$. Diese muß nur noch durch die Existenzforderung ergänzt werden, daß sich die möglichen Fälle tatsächlich in gleichmögliche zerlegen lassen und somit die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten existieren, und dann noch durch die Forderung, daß gleichmögliche Ereignisse gleichmöglich bleiben, wenn eine für sie sicher erfüllte Bedingung vorausgesetzt wird. Damit ist die erwähnte Lücke ausgefüllt, und darauf läßt sich die ganze Wahrscheinlichkeitsrechnung aufbauen.

P. FINSLER, Zürich.

Kleine Mitteilungen

Ein Nomogramm zur normalen Axonometrie

In einer normalen Axonometrie gehe die Projektion der z-Achse senkrecht nach oben, die Projektionen der x- und y-Achse mögen mit der Waagrechten die Winkel σ und τ bilden. Die Bilder der Einheitsstrecken auf den drei Achsen sollen die Maßzahlen 1, λ und μ haben. Es kann stets $\lambda, \mu \leqq 1$ angenommen werden (Fig. 1).

Es sei nun ein Nomogramm zu konstruieren, das gestattet, sowohl aus λ und μ die Winkel σ und τ zu bestimmen als auch aus diesen Winkeln auf die Verkürzungen zu

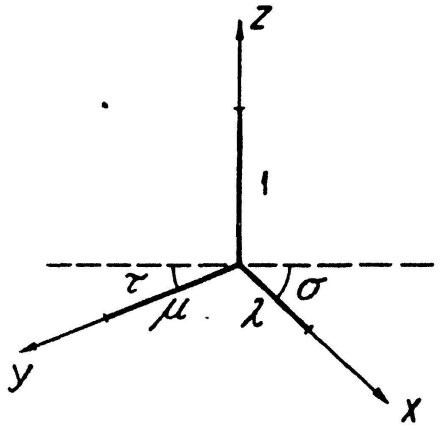

Fig. 1

schließen, und zwar mit einer Genauigkeit, die innerhalb der gebräuchlichen Grenzen von λ und μ den zeichnerischen Ansprüchen genügt.

Es gelten die Beziehungen[1])

$$\cos 2\tau = \frac{1+\mu^4-\lambda^4}{2\mu^2}, \quad \cos 2\sigma = \frac{1-\mu^4+\lambda^4}{2\lambda^2}.$$

Einfache Umformungen liefern

$$\mu^2 \sin 2\tau - \lambda^2 \sin 2\sigma = 0, \tag{1}$$

$$\mu^2 \cos 2\tau + \lambda^2 \cos 2\sigma = 1. \tag{2}$$

(1) ist erfüllt in einem Dreieck mit den Seiten μ^2 und λ^2 und den Gegenwinkeln 2τ und 2σ,

(2) besagt, daß die dritte Seite dieses Dreiecks die Länge 1 haben muß.

Hieraus ergibt sich folgendes Nomogramm (Fig. 2):

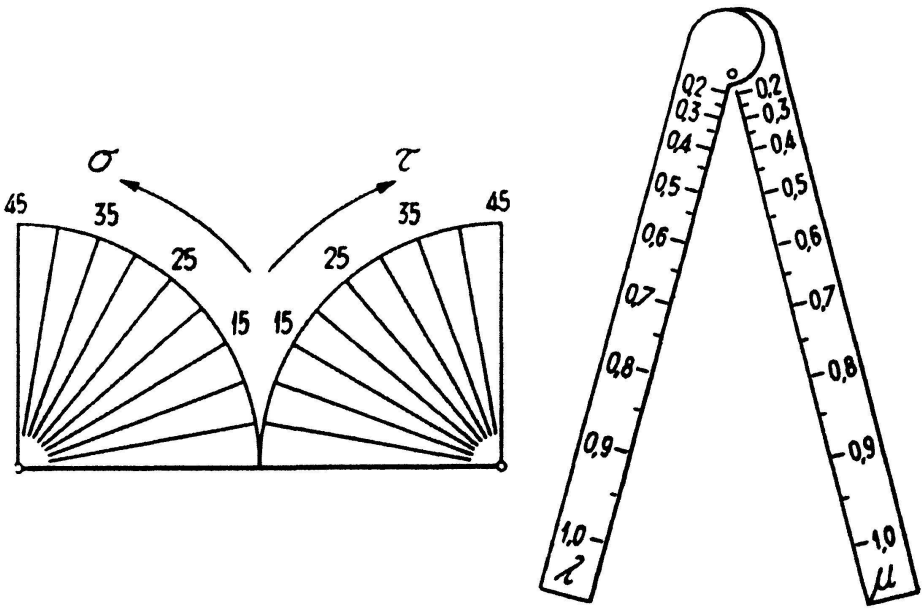

Fig. 2

[1]) Eine gute Zusammenstellung von Formeln und Zahlentabellen findet sich bei Delabar, Anleitung zum Linearzeichnen. 4. Heft. Freiburg i. Br. 1870.

In den Endpunkten einer festen Basis wird je ein Transporteur angebracht und mittels der Funktionen $\alpha = 2\tau$ bzw. $\beta = 2\sigma$ beziffert. Zwei bewegliche gerade Leitern sind um einen Punkt drehbar, auf beiden wird die Funktion $x = z^2$ dargestellt, wobei der gemeinsame Drehpunkt der Nullpunkt ist und als Einheitsstrecke die oben gewählte Basis benützt wird. Der Gebrauch des Nomogramms ist leicht verständlich.

WILLI LÜSSY, Winterthur.

Aufgaben

Aufgabe 15. Die im Intervall $|x - x_0| \leqq a$ eindeutige Funktion $y = f(x)$ mit $y_0 = f(x_0)$ bestimme eine im Intervall $|y - y_0| \leqq b$ eindeutige Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$. Wenn die Funktion $y = f(x)$ an der Stelle x_0 differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(x_0) = 1$, ist dann auch die Umkehrfunktion an der Stelle y_0 differenzierbar? Mit anderen Worten: Wenn das Bild der Funktion $y = f(x)$ im Punkte (x_0, y_0) eine unter 45^0 geneigte Tangente besitzt, hat dann auch das Bild der Umkehrfunktion $x = \varphi(y)$ im entsprechenden Punkte eine Tangente?

P. FINSLER.

Erste Lösung. Die aufgeworfene Frage ist zu verneinen. Funktionsbeispiel:

Es bezeichne β_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ die Folge derjenigen rationalen Zahlen β des Intervalls $0 < \beta \leqq 1$, für welche die Gleichung

$$x + 2x^2 = \beta$$

keine positive rationale Lösung x aufweist. Um einzusehen, daß eine unendliche Menge derartiger Zahlen β existiert, genügt es beispielsweise, zu verifizieren, daß alle Zahlen

$$\beta = \frac{1}{8k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

jedenfalls zu dieser Menge gehören. Es sei ferner $\alpha_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ die Folge der rationalen Zahlen des Intervalls $\frac{1}{2} < \alpha \leqq 1$. (Die Zahlen der vorliegenden abzählbar unendlichen Mengen werden in irgendeiner an sich beliebigen Weise numeriert.) Nun geben wir die Funktion durch die folgende Vorschrift: Es sei

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{für irrationale } x \text{ des Intervalls } 0 < x < 1 \\ x + 2x^2 & \text{für rationale } x \text{ des Intervalls } 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ \beta_n & \text{für } x = \alpha_n \text{ des Intervalls } \frac{1}{2} < x \leqq 1 \\ -F(-x) & \text{für negative } x \text{ des Intervalls } -1 \leqq x < 0. \end{cases}$$

Die Funktion $y = F(x)$ bildet das Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ eindeutig auf das Intervall $-1 \leqq y \leqq 1$ ab, so daß sie dort eine eindeutige inverse Funktion $x = F^*(y)$ zuläßt. Nun ist $F(0) = 0$ und $F'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} = 1$; dagegen ist $F^*(0) = 0$ und $F^*\left(\frac{1}{8k}\right) > \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, so daß $F^*(y)$ bei $y = 0$ unstetig, also auch nicht differenzierbar ist. Die hier erörterte Funktion stellt somit ein Gegenbeispiel im Sinne der Aufgabe mit $a = b = 1$ und $x_0 = y_0 = 0$ dar.

H. HADWIGER, Bern.