

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1947)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Solution d'un problème de Steiner  
**Autor:** Kollros, Louis  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-12827>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math. Band II Nr. 6 Seiten 105–120 Basel, 15. November 1947

## Solution d'un problème de Steiner

A la fin de son mémoire fondamental *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander*, STEINER a publié une liste de 85 problèmes (Œuvres complètes t. I, p. 439-458); quelques-uns sont des applications de la théorie qui précède; d'autres sont plus difficiles. Dans sa thèse de doctorat *Sur les 85 problèmes de la dépendance systématique de Steiner* (Impr. Leemann, Zurich 1939), M. AHMED KARAM a constaté que les problèmes 13, 70, 76 et 77 de cette série n'ont pas encore été résolus.

Voici la solution du problème 13:

«Zwei beliebige projektive Strahlenbüschel sind in einer Ebene so zu legen, daß sie entweder

a) die dem Kreise am nächsten kommende Ellipse oder

b) die von der gleichseitigen Hyperbel am meisten abweichende Hyperbel erzeugen.»

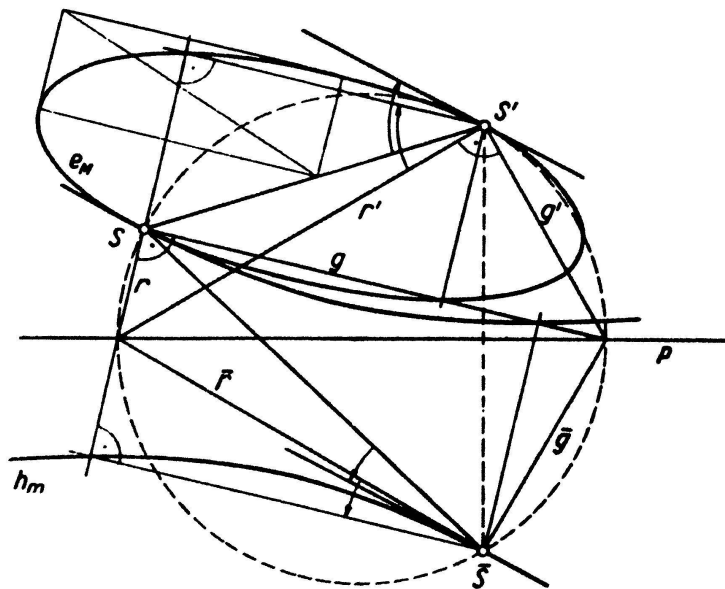


Fig. 1

Soient  $f$  et  $f'$  les deux faisceaux projectifs,  $S$  et  $S'$  leurs sommets. Supposons que l'un des faisceaux,  $f$  par exemple, soit fixe, et que l'autre  $f'$  tourne autour de son sommet  $S'$ ; dans toutes les positions de  $f'$ , les deux faisceaux de droites engendrent une conique.



2. Si par un point quelconque  $O$  d'un cercle  $k$  (fig. 2) on mène des parallèles à toutes les paires de diamètres conjugués d'une conique, on détermine sur  $k$  des cordes qui passent par un point  $P$ , pôle de l'involution sur  $k$  des extrémités de ces cordes. A chaque conique de notre faisceau ponctuel correspond ainsi un point  $P$  et inversement. Les directions  $OA$  et  $OB$  des axes de la conique se trouvent en joignant  $O$  aux extrémités  $A$  et  $B$  du diamètre de  $k$  passant par  $P$ . Suivant que  $P$  est à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la circonférence du cercle  $k$ , la conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Les droites joignant  $O$  aux points de contact des tangentes à  $k$  menées par le point extérieur  $P'$  donnent les directions asymptotiques de la conique correspondante.

Quand la conique varie dans le faisceau, le point  $P$  décrit une droite  $d$ , car les parallèles par  $O$  aux asymptotes des coniques d'un faisceau ponctuel coupent le cercle  $k$  en des paires de points  $CC'$  d'une involution; les cordes  $CC'$  passent donc par un point dont la polaire  $d$  est le lieu des points  $P$ .

Au point à l'infini de  $d$  correspond la seule hyperbole équilatère du faisceau; les directions de ses asymptotes sont  $r$  et  $g$  (fig. 2).

Si  $d$  ne coupe pas le cercle  $k$ , toutes les coniques du faisceau sont des hyperboles; c'est le cas des courbes engendrées par les faisceaux  $S$  et  $\bar{S}$ . Pour le point  $P'$ , les directions asymptotiques sont  $OC$  et  $OC'$ . L'angle aigu des asymptotes est minimum quand le point variable sur  $d$  vient en  $m$ , pied de la perpendiculaire abaissée du centre de  $k$  sur la droite  $d$ . A ce point  $m$  correspond l'hyperbole  $h_m$  qui diffère le plus de l'hyperbole équilatère; on voit que ses axes sont parallèles aux directions asymptotiques  $r$  et  $g$  de l'hyperbole équilatère du faisceau.

Si, au contraire, la droite  $d$  coupe le cercle  $k$  en deux points réels  $P_1$  et  $P_2$ , le faisceau de coniques se composera d'hyperboles, d'ellipses et des deux paraboles correspondant aux points  $P_1$  et  $P_2$ . Au point intérieur  $P$  correspond une ellipse dont  $OA$  et  $OB$  sont les directions des axes (fig. 2); si la corde  $DE$  est perpendiculaire au diamètre  $AB$ , les droites  $OD$  et  $OE$  (qui font des angles égaux avec  $OA$  et  $OB$ ) sont les directions des diamètres conjugués égaux de l'ellipse. L'angle aigu de ces diamètres conjugués égaux est maximum quand le point variable de la droite  $d$  vient au milieu  $M$  de la corde  $P_1 P_2$ ; c'est aussi l'angle des directions  $OP_1$  et  $OP_2$  des axes des deux paraboles du faisceau. A ce point  $M$  correspond l'ellipse  $e_M$  la plus rapprochée du cercle, celle dont le rapport  $b:a$  des axes est le plus grand possible; ses axes sont parallèles aux asymptotes  $r$  et  $g$  de l'hyperbole équilatère du faisceau. Les tangentes à cette ellipse  $e_M$  en  $S'$  et  $S$  (fig. 1) font avec la droite  $SS'$  l'angle complémentaire de l'angle  $(r, r')$ .

A deux points de la droite  $d$  symétriques par rapport à  $M$  correspondent des coniques semblables entre elles, mais pas homothétiques. Le faisceau ponctuel se compose donc d'une infinité de paires de coniques semblables, parmi lesquelles la paire de paraboles. Mais il n'y a qu'une seule hyperbole équilatère et une seule conique extrême: l'ellipse  $e_M$  du faisceau  $(S, S')$  et l'hyperbole  $h_m$  du faisceau  $(S, \bar{S})$ .

LOUIS KOLLROS, Zurich.