Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 2 (1947)

Heft: 5

Artikel: Elementare Ableitung der Coriolisbeschleunigung in der Ebene und im Raume

Autor: Michael, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12826

Si $h = H(l_1 \ldots l_n)$, n étant pair, on a $h' = H(1, l_1 - 1, l_2 \ldots l_n)$ ou $H(l_2 + 1, l_3 \ldots l_n)$ selon que $l_1 > 1$ ou $l_1 = 1$, d'où résulte immédiatement la relation $h + h' = 2^{l+1} - 2^{l-1}$ entre les rangs h et h', l désignant la somme $l_1 + \cdots + l_n$ des quotients incomplets de $\frac{b}{a}$.

Comme on l'a remarqué ci-dessus, la projection sur Oy du vecteur de rang h de la suite Π_m, c'est-à-dire le m^e terme de la suite U_m, est égale à u_h. Par raison de symétrie, la projection sur Ox de ce même vecteur est égale à la projection sur Oy du vecteur de rang $2^m - h$ de la même suite Π_m, soit à $u_{2^m - h}$. Par conséquent, *le terme de rang h de la suite de* BROCOT *M_m est égal à* $\frac{u_h}{u_{2^m - h}}$. C'est aussi la valeur de $m\left(\frac{h}{2^m}\right)$. Cette remarque permet de retrouver aisément les propriétés des suites de BROCOT, ainsi que la formule (2) du n° 6.

Dans un autre article, je montrerai que la courbe C, ainsi que les fonctions x, y et m de t du n° 6, appartiennent à une classe assez vaste de courbes et de fonctions qui peuvent être définies par des équations fonctionnelles. La fonction $m(t)$, par exemple, satisfait aux équations

$$m\left(\frac{1+t}{2}\right) = 1 + m(t) \quad \text{et} \quad m\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{m(t)}{m(t)+1}$$

et c'est la seule fonction définie et continue pour $0 \leq t < 1$ jouissant de cette propriété.

GEORGES DE RHAM, Lausanne.

Elementare Ableitung der Coriolisbeschleunigung in der Ebene und im Raume

(Nachtrag zur Abhandlung in Band II, Heft 2, Seite 31–35)

Bei der Aufstellung der Formel

$$c = 2\omega v_{rel} \sin \delta$$

für die Coriolisbeschleunigung im Raume, wurde übersehen, daß in den vorher behandelten Beispielen für die Ebene nur der Fall betrachtet wird, daß die relative Geschwindigkeit *radial* bezüglich des Drehpunktes des «mitführenden» Systems gerichtet ist. Die obige Formel erscheint daher nur für den Fall bewiesen, daß die relative Geschwindigkeit im Raume in einer Ebene durch die Momentanachse liegt, d. h. daß sie die Momentanachse schneidet, wie dies im zuletzt behandelten Beispiel des genannten Aufsatzes zutrifft. Für den allgemeinen Fall, daß die relative Geschwindigkeit bezüglich der Momentanachse außer einer *radialen* und einer *achsialen* auch eine *transversale* Komponente aufweist, muß die Gültigkeit obiger Formel (auf elementarem Wege) noch nachgewiesen werden.

Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst den einfachen Sonderfall in der Ebene (siehe Fig. 1), wo sich ein Massenpunkt m mit der konstanten Relativgeschwindigkeit v_α auf einer *Kreisbahn K* bewegt, die ihrerseits mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Mittelpunkt 0 dreht, so daß ein «mitführender» Punkt des Systems die Geschwindigkeit $v_s = \omega r$ hat. Der Massenpunkt m besitzt somit die *absolute* Geschwindigkeit $v_s + v_x$, die stets tangential zur Kreisbahn gerichtet ist. Infolge dieser Geschwindigkeit entsteht bekanntlich eine absolute *zentripetale Beschleunigung* von der Größe:

$$b_a = \frac{(v_s + v_x)^2}{r} = \frac{v_s^2}{r} + \frac{v_x^2}{r} + \frac{2\,v_s v_x}{r}\ ^{1)}.$$

Wie ersichtlich, setzt sich b_a aus *drei* Komponenten zusammen, nämlich: 1. aus der Beschleunigung des «mitführenden» Systemspunktes $b_s = \frac{v_s^2}{r} = \omega^2 r$; 2. aus der relativen Beschleunigung des Massenpunktes $b_{rel} = \frac{v_x^2}{r}$ und 3. aus der Coriolisbeschleunigung

$$c_r = \frac{2\,v_s v_x}{r} = 2\,\omega\,v_x.$$

Alle drei Komponenten sind *radial* gerichtet; während aber die zwei ersten Komponenten stets *zentripetal* gerichtet sind, kann die Corioliskomponente sowohl

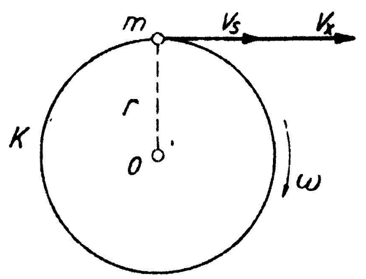

Fig. 1

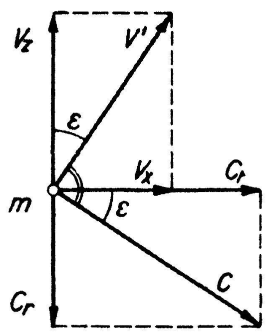

Fig. 2a

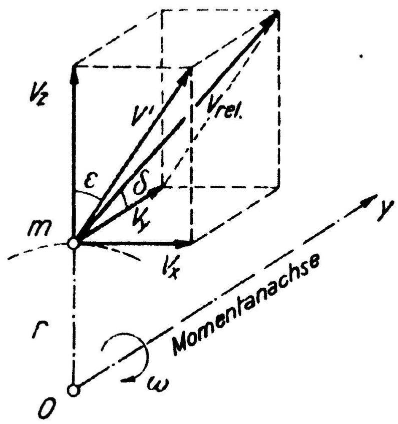

Fig. 2

zentripetal als auch *zentrifugal* gerichtet sein, je nachdem v_x gleich oder entgegengesetzt zu v_s gerichtet ist. (Für $v_x = -v_s$ ist $c_r = -2\,v_s^2/r$ und $b_a = 0$; m ruht im absoluten Raume).

In Fig. 2 ist nun der allgemeine Fall veranschaulicht, in welchem die Relativgeschwindigkeit v_{rel} des Massenpunktes m windschief zur Momentanachse y des mitführenden Systems ist. v_{rel} kann man in die drei Komponenten zerlegen: die *transversale* v_x, die *achsiale* v_y und die *radiale* v_z. Es ist einleuchtend, daß die Komponente v_y keinen Beitrag zur Coriolisbeschleunigung liefern kann, da durch die momentane Drehung um die y-Achse nur eine Parallelverschiebung des Geschwindigkeitsvektors v_y bewirkt wird. Dagegen liefern die beiden andern Komponenten je einen Beitrag zur Coriolisbeschleunigung, nämlich v_x den oben ermittelten Beitrag

$$c_r = 2\,\omega\,v_x = 2\,\omega\,v' \sin\varepsilon \qquad \text{(radial gerichtet)}$$

und v_z den früher ermittelten Beitrag

$$c_t = 2\,\omega\,v_z = 2\,\omega\,v' \cos\varepsilon \qquad \text{(transversal gerichtet).}$$

1) Wenn v_x und v_s bzw. ω veränderlich sind, kämen noch die tangentialen Beschleunigungen $\dot v_x$ und $\dot v_s$, die uns hier nicht weiter interessieren.

Wie in Fig. 2a veranschaulicht, kann man diese beiden Komponenten zur ***resultierenden Coriolisbeschleunigung*** zusammensetzen:

$$c = \sqrt{c_r^2 + c_t^2} = 2\,\omega\, v' = 2\,\omega\, v_{rel} \sin\delta.$$

Damit ist die allgemeine Gültigkeit der obigen Formel für die Coriolisbeschleunigung im Raume bewiesen. Aus Fig. 2a ist zugleich ersichtlich, daß der Vektor der Coriolisbeschleunigung senkrecht zur Projektion des Vektors der Relativgeschwindigkeit auf eine zur Momentanachse senkrecht gelegten Ebene steht. W. MICHAEL, BERN.

Kleine Mitteilungen

I. *Lehrerfehler*

Daß damit nicht Charakterfehler gemeint sein können, folgt aus der Einordnung dieser Zeilen unter den «Kleinen» Mitteilungen. Vielmehr handelt es sich um die inverse Funktion jener Schülerfehler, wie sie LIETZMANN und TRIER seinerzeit in einem bekannten Bändchen der Mathematisch-physikalischen Bibliothek zusammengestellt haben.

Wir heutigen Lehrer pflegen über den ehrwürdigen EDUARD HEIS mitleidig zu lächeln (also doch Charakterfehler ?), der in seiner trotz allem immer noch wertvollen Aufgabensammlung beispielsweise berechnen läßt, daß die Entfernung zwischen Aachen und Köln 8,514739 Meilen betrage oder eine schwimmende Hohlkugel mit dem spezifischen Gewicht 7,5 g/cm³ und der Wanddicke 1 cm einen Halbmesser von 21,4682 cm haben müsse.

Wie steht es in dieser Beziehung mit unseren «modernen» Aufgaben? Wir geben etwa einer Klasse die beiden parallelen Seiten eines Trapezes $a = 25{,}4$ m und $c = 37{,}5$ m sowie die Fläche $F = 449{,}5$ m² und erwarten dann als Ergebnis der Höhenberechnung $h = 14{,}293$ m. Oder wir muten einem Schüler zu, uns 5,5646 m als berechnete Kantenlänge eines Würfels anzugeben, welcher aus den 1344000 kg Eisen vom spezifischen Gewicht 7,8 kg/dm³ gegossen werden könnte, die zum Bau der Kirchenfeldbrücke in Bern benötigt wurden. Oder wir veranlassen einen Kandidaten, für π den Näherungswert 22/7 zu verwenden, und brechen dann den Stab über ihn, wenn er als Gewicht eines durch weitere vernünftige Angaben bestimmten Drahtes nicht, wie wir, 24,492 kg, sondern aus Trägheit oder auf Grund unverbildeten Empfindens «nur» 24,5 kg erhält. Schließlich lassen wir zur Krönung unseres Trigonometrieunterrichtes ganze Generationen über die Eleganz des Halbwinkelsatzes und die Präzision der von Mathematikern erfundenen Logarithmen staunen, wenn bei der Berechnung der drei Winkel eines Dreiecks aus den Seiten $a = 4{,}356$ m, $b = 5{,}673$ m und $c = 7{,}239$ m für $\alpha = 36^0 58' 52''$, $\beta = 51^0 34' 30''$, $\gamma = 91^0 26' 38''$ herauskommt, was auf die Sekunde genau eine Winkelsumme von $180^0 0' 0''$ ergibt.

Aus Bescheidenheit habe ich diese Beispiele nicht der eigenen Werkstatt entnommen, sondern häufig verwendeten Aufgabensammlungen prominenterer Kollegen. Sie sollen bestätigen, daß von Zeit zu Zeit auch HOMER zu schlafen pflegt, und uns veranlassen, folgende Zusammenhänge gelegentlich aus dem Dunkel scheinbarer Bedeutungslosigkeit ans Lampenlicht unserer Studierstube und von dort ins helle Licht der Schulstube zu ziehen:

1. Es gibt genaue und ungenaue Zahlen.
2. Jedes Messungsergebnis ist eine ungenaue Zahl.
3. Von den drei Angaben:
   Mittlere Entfernung Erde–Sonne = 149504200 km
   Länge des Simplon-Tunnels = 19,73 km
   Kernabstand beim Cl-Molekül = 0,000198 μ