

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1947)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane  
**Autor:** Rham, Georges de  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-12825>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

---

El. Math.      Band II      Nr. 5      Seiten 89–104      Basel, 15. September 1947

---

## Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane

(SUITE)

5. En désignant par  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  les vecteurs de base du système de coordonnées introduit au n° 4, les côtés de  $P_0$ , considérés comme des vecteurs orientés dans le sens positif de parcours, sont  $2\vec{i}, 2\vec{j}, -2\vec{i}, -2\vec{j}$ . Ceux de  $P_1$  sont  $\frac{2}{3}\vec{i}, \frac{2}{3}(\vec{i} + \vec{j}), \frac{2}{3}\vec{j}, \dots$ . Ceux de  $P_2$  sont  $\frac{2}{9}\vec{i}, \frac{2}{9}(\vec{i} + \vec{j}), \frac{2}{9}(\vec{i} + \vec{j}), \frac{2}{9}(\vec{i} + 2\vec{j}), \frac{2}{9}\vec{j}, \dots$ .

Bornons nous à ceux dont les composantes ne sont pas négatives, et multiplions ceux de  $P_n$  par  $\frac{3^n}{2}$ ; on obtient une suite de vecteurs qui sera désignée par  $\Pi_n$ . Les suites  $\Pi_0, \Pi_1$  et  $\Pi_2$  sont respectivement:

$$\begin{aligned}\Pi_0: & \quad \vec{i} & & \vec{j}, \\ \Pi_1: & \quad \vec{i} & \quad \vec{i} + \vec{j} & \vec{j}, \\ \Pi_2: & \quad \vec{i} \quad 2\vec{i} + \vec{j} \quad \vec{i} + \vec{j} \quad \vec{i} + 2\vec{j} \quad \vec{j}.\end{aligned}$$

D'une manière générale, la suite  $\Pi_n$  se déduit de  $\Pi_{n-1}$  en intercalant, dans chaque intervalle compris entre deux vecteurs consécutifs de  $\Pi_n$ , la somme de ces deux vecteurs.

Cette loi de formation si simple entraîne les conséquences suivantes.

a) *Les composantes des vecteurs de  $\Pi_n$  sont des nombres entiers.*

En remarquant que l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{a} + \vec{b}$ , ou sur les vecteurs  $\vec{a} + \vec{b}$  et  $\vec{b}$ , est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , on voit que:

b) *L'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs consécutifs de  $\Pi_n$  est égale à l'unité.*

De la résulte:

c) *Les composantes de tout vecteur de  $\Pi_n$  sont des entiers premiers entre eux.*

d) *Si le coefficient angulaire d'un côté de  $P_n$  est égal à la fraction irréductible  $\frac{b}{a}$ , les projections de ce côté sur les axes sont égales à  $\frac{2a}{3^n}$  et  $\frac{2b}{3^n}$ .*

En effet, d'après c), les projections du vecteurs correspondant de  $\Pi_n$  sont égales à  $a$  et  $b$ .

Suivant LUCAS<sup>1)</sup>, nous appellerons *suite de BROcot d'indice n*, et nous désignerons par  $B_n$ , la suite des coefficients angulaires des vecteurs de  $\Pi_n$ .

e) La suite  $B_0$  se réduit à:  $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ .

La suite  $B_n$  est obtenue en prenant  $B_{n-1}$  et en intercalant, dans chaque intervalle entre deux termes consécutifs  $\frac{b}{a}$  et  $\frac{d}{c}$  de  $B_{n-1}$ , leur médiane  $\frac{b+d}{a+c}$ .

Cela résulte, en effet, directement de la loi de formation des suites  $\Pi_n$ . En outre, d'après b) et c), les fractions sont obtenues directement sous forme irréductible.

f) Toute fraction de la suite  $B_n$  est la médiane des fractions voisines.

D'après e), cela est exact pour les fractions de  $B_n$  n'appartenant pas à  $B_{n-1}$ . Mais cela est aussi vrai pour celles qui appartiennent à  $B_{n-1}$ , car si la propriété f) appartient à  $B_{n-1}$ , elle appartient aussi à  $B_n$ , comme on le vérifiée immédiatement.

g) La différence de deux fractions consécutives de  $B_n$  a pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le produit des dénominateurs de ces deux fractions.

Si  $\frac{b}{a}$  et  $\frac{d}{c}$  sont deux fractions consécutives de  $B_n$ , on a en effet

$$\frac{d}{c} - \frac{b}{a} = \frac{ad - bc}{ac} = \frac{1}{ac},$$

car  $ad - bc = 1$  d'après b).

h) Si  $\frac{y}{x}$  est un nombre rationnel compris entre les deux termes consécutifs  $\frac{b}{a}$  et  $\frac{d}{c}$  de la suite  $B_n$ , on a  $y \geq b + d$  et  $x \geq a + c$ .

En effet, le vecteur entier  $x\vec{i} + y\vec{j}$  est égal, d'après b), à une combinaison linéaire à coefficients entiers des vecteurs  $a\vec{i} + b\vec{j}$  et  $c\vec{i} + d\vec{j}$ , qui sont des vecteurs consécutifs de  $\Pi_n$ . D'après l'hypothèse, les coefficients de cette combinaison linéaire sont des entiers positifs, d'où résulte immédiatement h).

i) Le numérateur ou le dénominateur de toute fraction de  $B_n$  n'appartenant pas à  $B_{n-1}$  dépasse  $n - 1$ .

Cette proposition est vraie pour  $B_1$  et s'étend immédiatement de  $B_{n-1}$  à  $B_n$ , en tenant compte de la loi de formation e).

De h) et i) résulte immédiatement:

j) Tout nombre rationnel positif, dont le numérateur et le dénominateur ne dépassent pas  $n$ , appartient à la suite  $B_n$ .

De g) et i) résulte encore:

k) La différence de deux termes consécutifs de  $B_n$ , tous deux non supérieurs à 1, est au plus égale à  $\frac{1}{n}$ .

En effet, l'un de ces termes n'appartient pas à  $B_{n-1}$ , et son dénominateur est par suite au moins égal à  $n$ . La différence est donc une fraction de numérateur 1 et de dénominateur au moins égal à  $n$ .

l) L'angle de deux côtés consécutifs de  $P_n$  est au plus égal à  $\text{arc tg } \frac{1}{n}$ .

<sup>1)</sup> ED. LUCAS, Théorie des Nombres, - Paris 1891. G.-H. HALPHEN, Sur des suites de fractions analogues à la suite de FAREY (Œuvres de G.-H. HALPHEN, t. II, p. 102–107). - Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode, par ACHILLE BROCOT, horloger, Paris 1862 (cité par HALPHEN et par LUCAS).

A cause de la symétrie de  $P_n$ , on peut supposer que les coefficients angulaires  $m_1$  et  $m_2$  de ces côtés sont compris entre 0 et 1 (limites non exclues):  $0 \leq m_1 < m_2 \leq 1$ . Si  $m_1 = \operatorname{tg} \alpha$  et  $m_2 = \operatorname{tg} \beta$ ,  $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \leq m_2 - m_1 \leq \frac{1}{n}$ , d'après k), d'où  $0 < \beta - \alpha \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ . C. q. f. d. Cette proposition a été utilisée au n° 4 pour prouver que la courbe  $C$  a une tangente en chaque point.

6. Pour exprimer les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M(t)$  de l'arc  $M_0 M_1$ , ainsi que le coefficient angulaire  $m$  de la tangente en ce point, en fonction du paramètre  $t$ , développons  $t$  dans le système de numération de base 2:

$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 0, a_1 a_2 \dots \quad (a_i = 0 \text{ ou } 1).$$

Supposons que le chiffre 1 apparaisse  $k_1$  fois immédiatement après la virgule, et qu'il y ait ensuite  $k_2$  fois le chiffre 0, puis  $k_3$  fois le chiffre 1, etc.:

$$t = \underbrace{0,11\dots1}_{k_1} \underbrace{00\dots0}_{k_2} \underbrace{11\dots1}_{k_3} \underbrace{00\dots0}_{k_4} 1\dots$$

Si  $t$  est dyadique, la suite des entiers  $k_i$  est finie et se termine par le symbole  $\infty$ .  $k_1$  peut être nul, tandis que  $k_2, k_3, \dots$  sont des entiers positifs. En sommant les progressions géométriques de raison  $\frac{1}{2}$  et contenant respectivement  $k_1, k_3, k_5, \dots$  termes qui apparaissent ainsi dans le développement de  $t$ , on obtient l'expression suivante de ce développement:

$$t = 1 - \frac{1}{2^{k_1}} + \frac{1}{2^{k_1+k_3}} - \frac{1}{2^{k_1+k_3+k_5}} + \dots, \quad (1)$$

série limitée ou illimitée selon que  $t$  est dyadique ou non.

*Théorème.* Le paramètre  $t$  étant donné par le développement (1), le coefficient angulaire  $m$  de la tangente à la courbe  $C$  au point  $M(t)$  est donné par la fraction continue

$$m = k_1 + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots \quad (2)$$

$\frac{B_n}{A_n}$  étant la  $n^e$  réduite de cette fraction continue,

$$\frac{B_n}{A_n} = k_1 + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n},$$

et en convenant que  $A_0 = 0, A_{-1} = 1, B_0 = 1, B_{-1} = 0$ , les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M(t)$  sont données par les formules

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A_n + A_{n-1}}{3^{k_1+\dots+k_n}} \quad (3)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n + B_{n-1}}{3^{k_1+\dots+k_n}}. \quad (4)$$

*Démonstration de la formule (2).* Désignons par  $t_n$  la somme des  $(n + 1)$  premiers termes de la série (1). Remarquons que  $t_0 = 1$ , et convenons que  $t_{-1} = 0$ .

Nous allons d'abord prouver que le coefficient angulaire  $m(t_n)$  de la tangente à  $C$  au point  $M(t_n)$  est égal à

$$m(t_n) = \frac{B_n}{A_n}. \quad (2')$$

La formule (2') est vraie pour  $n = -1$ , puisque, la tangente en  $M_0 = M(0)$  étant confondue avec  $Ox$ ,  $m(0) = \frac{0}{1}$ . Elle est également vraie pour  $n = 0$ , puisque la tangente en  $M_1 = M(1)$  étant parallèle à  $Oy$ ,  $m(1) = \frac{1}{0}$ .

Supposons qu'elle est valable pour  $n = 1, 2, \dots, n - 1$ , et montrons qu'alors elle l'est encore pour  $n$ .

Par hypothèse, on a alors

$$m(t_{n-1}) = \frac{B_{n-1}}{A_{n-1}}, \quad m(t_{n-2}) = \frac{B_{n-2}}{A_{n-2}}.$$

Pour abréger, posons  $k = k_1 + \dots + k_{n-1}$ . Comme  $2^k t_{n-1}$  et  $2^k t_{n-2}$  sont entiers et  $2^k t_{n-1} - 2^k t_{n-2} = (-1)^{n-1}$ , les points  $M(t_{n-1})$  et  $M(t_{n-2})$  sont deux sommets consécutifs du polygone  $Q_k$  (cf. n° 3),  $M(t_{n-1})$  précédent ou suivant  $M(t_{n-2})$  selon que  $n$  est pair ou impair.

Le point  $M(t_n)$  est un sommet du polygone  $Q_{k+k_n}$  situé entre  $M(t_{n-1})$  et  $M(t_{n-2})$ , et comme  $t_n = t_{n-1} + \frac{(-1)^n}{2^{k+k_n}}$ ,  $M(t_n)$  et  $M(t_{n-1})$  sont deux sommets consécutifs de  $Q_{k+k_n}$ .

Les tangentes à la courbe  $C$  aux sommets des polygones inscrits  $Q$  coïncidant avec les côtés correspondants des polygones  $P$ , il résulte des propriétés des suites de BROCOT établies au n° 5 que le coefficient angulaire  $m(t_n)$  se déduit des fractions  $m(t_{n-1})$  et  $m(t_n)$  en effectuant  $k_n$  médiations successives, entre  $m(t_{n-1})$  et  $m(t_{n-2})$  d'abord, puis entre  $m(t_{n-1})$  et les médiantes successivement obtenues. Ces médiantes sont

$$\frac{B_{n-1} + B_{n-2}}{A_{n-1} + A_{n-2}}, \quad \frac{2B_{n-1} + B_{n-2}}{2A_{n-1} + A_{n-2}}, \quad \dots, \quad \frac{k_n B_{n-1} + B_{n-2}}{k_n A_{n-1} + A_{n-2}}$$

de sorte que

$$m(t_n) = \frac{k_n B_{n-1} + B_{n-2}}{k_n A_{n-1} + A_{n-2}}$$

et comme, d'après les formules classiques de la théorie des fractions continues,

$$B_n = k_n B_{n-1} + B_{n-2} \quad \text{et} \quad A_n = k_n A_{n-1} + A_{n-2},$$

la formule (2') est établie.

La formule (2) est ainsi établie dans le cas où  $t$  est un nombre dyadique, le développement (1) et la fraction continue (2) étant alors limités. Lorsque  $t$  n'est pas un nombre dyadique, la formule (2) se déduit de (2') en faisant tendre  $n$  vers l'infini,  $\frac{B_n}{A_n}$  tendant alors par définition vers la valeur de la fraction continue illimitée  $m$ ,  $t_n$  tendant vers  $t$  et  $m(t_n)$  tendant vers  $m(t)$  en vertu de la continuité de la tangente à  $C$  (n° 4).

*Démonstration des formules (3) et (4).* Soient  $X_n$  et  $Y_n$  les projections du vecteur  $\overrightarrow{M(t_{n-1}) M(t_n)}$  sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ . En convenant comme ci-dessus que  $t_{-1} = 0$ , il est clair que les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M(t)$  sont données par

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} X_n, \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n,$$

séries limitées dans le cas où  $t$  est dyadique.

Or,  $M(t_{n-1})$  et  $M(t_n)$  sont deux sommets consécutifs du polygone  $Q_k$  d'indice  $k = k_1 + \dots + k_n$ . Ce sont aussi les points milieux de deux côtés consécutifs du polygone  $P_k$ . Les coefficients angulaires de ces côtés de  $P_k$  étant  $\frac{B_{n-1}}{A_{n-1}}$  et  $\frac{B_n}{A_n}$ , leurs projections sur  $Ox$  sont (d'après n° 5, d) égales à  $\frac{2A_{n-1}}{3^k}$  et  $\frac{2A_n}{3^k}$ .

Cela entraîne que la projection du vecteur  $\overrightarrow{M(t_{n-1}) M(t_n)}$  sur  $Ox$  est égale en valeur absolue à  $\frac{A_{n-1} + A_n}{3^k}$ , et comme le signe de cette projection est le même que celui de  $t_n - t_{n-1}$ , soit  $(-1)^n$ , on a  $X_n = (-1)^n \frac{A_{n-1} + A_n}{3^k}$ , ce qui, substitué dans l'expression ci-dessus de  $x$ , fournit la formule (3). La formule (4) s'établit de la même manière.

7. La fonction  $t$  de  $m$ , définie par les formules (1) et (2), a été introduite par MINKOWSKI, qui l'a désignée par le symbole ? (point d'interrogation). Avec la notation de MINKOWSKI, on doit écrire  $t = 2 ? (m)$ <sup>1)</sup>.

C'est une fonction croissante; si  $t$  est dyadique,  $m$  est rationnel, et réciproquement. M. DENJOY<sup>2)</sup> a prouvé qu'elle a une dérivée nulle presque partout (c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle). Il est probable que la fonction  $m$  de  $x$  jouit de propriétés analogues.

Je me bornerai ici à quelques remarques. On sait qu'un nombre dyadique possède deux développements:

$$t = 0, a_1 a_2 \dots a_{p-1} 1000 \dots \text{ et } t = 0, a_1 a_2 \dots a_{p-1} 0111 \dots$$

Les deux fractions continues correspondantes, représentant le même nombre  $m$ , sont évidemment égales: l'une se déduit de l'autre en y remplaçant le dernier quotient  $k_n$  par  $k_n - 1 + \frac{1}{1}$ . Le nombre des quotients incomplets  $k_i$  est augmenté d'une unité, mais leur somme n'est pas changée. Pour l'un des deux développements, et pour l'un seulement, le dernier quotient  $k_n$  est supérieur à 1: nous pouvons convenir de choisir celui-là.

Soit  $k = \sum_{i=1}^n k_i$  la somme des quotients incomplets.  $2^k t$  étant alors un entier impair, les premiers polygones  $P_n$  et  $Q_n$  qui portent le point  $M(t)$  sont ceux d'indice  $k$ . Il en

<sup>1)</sup> H. MINKOWSKI. Zur Geometrie der Zahlen (Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904, p. 171 et 172). Voir aussi: LOUIS KOLLROS. Un algorithme pour l'approximation simultanée de deux grandeurs (Thèse présentée à l'Université de Zurich, 1905).

<sup>2)</sup> A. DENJOY. Sur quelques points de la théorie des fonctions (Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences, Paris, t. 194, p. 44–46 (1932)). — Sur une fonction de MINKOWSKI (ibid. t. 198, p. 44–47 (1934)). — Sur les fonctions minkowskianes (ibid. t. 201, p. 584–586 (1935)). — Sur une fonction réelle de MINKOWSKI (Journal de mathématiques pures et appliquées, 1938, p. 105–151)).

résulte immédiatement la propriété suivante, d'ailleurs connue, des suites de BROCOT: l'indice de la première suite de BROCOT qui contient un nombre rationnel donné  $m$  est égal à la somme des quotients incomplets  $k_i$  du développement de  $m$  en fraction continue, et le rang occupé par ce nombre dans cette suite est

$$h = 2^k t = 2^{k_1} + \dots + k_n - 2^{k_1} + \dots + k_n + 2^{k_1} + \dots + k_n - \dots + (-1)^n.$$

Proposons nous encore de calculer les entiers  $k_i$  lorsque  $x$  est donné, de manière à pouvoir calculer  $y$  et  $m$  en fonction de  $x$ .

Le rapport du terme général de la série (3) au précédent est

$$\frac{1}{3^{k_n}} \frac{A_{n+1} + A_n}{A_{n-1} + A_{n-2}} = \frac{1}{3^{k_n}} \frac{(k_n + 1) A_{n-1} + A_{n-2}}{A_{n-1} + A_{n-2}} = \frac{1}{3^{k_n}} \left( 1 + \frac{k_n}{1 + \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}}} \right).$$

Ce rapport est donc inférieur à  $\frac{1+k_n}{3^{k_n}}$ , et par suite inférieur à  $\frac{2}{3}$  si  $n > 1$ , inférieur ou égal à 1 si  $n = 0$ . Les termes de la série (3) décroissent en valeur absolue.

Soit  $\Sigma_n$  la somme des  $n$  premiers termes de la série (3).  $x$  étant compris entre  $\Sigma_n$  et  $\Sigma_{n+1}$ , on a

$$|x - \Sigma_n| \leq |\Sigma_{n+1} - \Sigma_n| = \frac{A_n + A_{n-1}}{3^{k_1} + \dots + k_n} \quad (5)$$

et il ne peut y avoir égalité, dans la relation  $\leq$ , que si  $x = \Sigma_{n+1}$ , c'est-à-dire si la suite des  $k_i$  est limitée et se termine avec  $k_n$ .

Supposons que la suite des  $k_i$  ne se termine pas avec  $k_n$ . On peut alors remplacer  $n$  par  $n + 1$  dans la relation ci-dessus et il vient

$$|x - \Sigma_{n+1}| \leq \frac{A_{n+1} + A_n}{3^{k_1} + \dots + k_n + k_{n+1}} = \frac{(k_{n+1} + 1) A_n + A_{n-1}}{3^{k_1} + \dots + k_n + k_{n+1}}. \quad (6)$$

Posons

$$F_n(\xi) = \frac{(\xi + 1) A_{n-1} + A_{n-2}}{3^{k_1} + \dots + k_{n-1} + \xi}.$$

Comme on le vérifie aisément,  $F_n(\xi)$  décroît de  $F_n(0)$  à 0 lorsque  $\xi$  croît de 0 à  $\infty$ . Il en est de même pour  $F_{n+1}(\xi)$ , et comme  $k_{n+1} \geq 1$ , cela entraîne

$$\frac{(k_{n+1}) A_n + A_{n-1}}{3^{k_1} + \dots + k_n + k_{n+1}} \leq \frac{2 A_n + A_{n-1}}{3^{k_1} + \dots + k_n + 1} \quad (7)$$

et il ne peut y avoir égalité que si  $k_{n+1} = 1$ .

D'après la remarque faite à propos de (5), il ne peut, d'autre part, y avoir égalité dans (6) que si la suite des  $k_i$  est limitée et se termine par  $k_{n+1}$ . Dans ce dernier cas, en adoptant la convention énoncée plus haut,  $k_{n+1} > 1$  et il y a inégalité dans (7). En définitive, il ne peut donc y avoir égalité à la fois dans (6) et dans (7), d'où résulte

$$|x - \Sigma_{n+1}| < \frac{2 A_n + A_{n-1}}{3^{k_1} + \dots + k_n + 1}. \quad (8)$$

Comme

$$|x - \Sigma_{n+1}| = \frac{A_n + A_{n-1}}{3^{k_1} + \dots + k_n} - |x - \Sigma_n|,$$

cela entraîne

$$|x - \Sigma_n| > \frac{A_n + 2 A_{n-1}}{3^{k_1} + \dots + k_n + 1}. \quad (9)$$

Les inégalités (5) et (9) peuvent s'écrire

$$F_n(k_n + 1) < |x - \Sigma_n| \leq F_n(k_n)$$

et, d'après la propriété énoncée de la fonction  $F_n(\xi)$ , elles montrent que  $k_n$  est la partie entière de la racine  $\xi = \xi_n$  de l'équation  $F_n(\xi) = |x - \Sigma_n|$ .

D'après (8) où l'on remplace  $n$  par  $n - 1$ , on a  $|x - \Sigma_n| < F_n(1)$ , ce qui montre que l'entier  $k_n = [\xi_n]$  est bien au moins égal à 1 pour  $n > 1$ .

Le problème posé est ainsi résolu. L'équation en  $\xi_1$  s'écrit par exemple, comme  $F_1(\xi) = \frac{1}{3^\xi}$  et  $\Sigma_1 = 1$ ,  $\frac{1}{3^\xi} = 1 - x$ , d'où  $\xi_1 = \frac{-\log(1-x)}{\log 3}$  et  $k_1 = [\xi_1]$ . Ayant déterminé  $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ , on pourra former la fonction  $F_n(\xi)$  et la détermination de  $k_n$  se ramènera au calcul de la partie entière de la racine d'une équation de la forme  $a\xi + b = c3^\xi$ , avec des coefficients  $a, b$  et  $c$  donnés.

8. En projetant sur un axe fixe les vecteurs de la suite  $\Pi_n$ , on obtient des suites de nombres qui, d'après BACHMANN, ont été considérées notamment par STERN<sup>1)</sup>. La suite des projections sur  $Oy$  est particulièrement intéressante, désignons-la par  $U_n$ .

Considérons d'autre part la suite de nombres entiers  $u_h$  ( $h = 0, 1, 2, \dots$ ) définie par les conditions suivantes:

$$1^0 \ u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1; \quad 2^0 \ u_{2h} = u_h; \quad 3^0 \ u_{2h+1} = u_h + u_{h-1}.$$

Les premiers termes de cette suite, que l'on désignera par  $U$ , sont:

$$0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \ 1 \ 4 \ 3 \ 5 \ 2 \ 5 \ 3 \ 4 \ 1 \ 5 \ 4 \ 7 \ 3 \ 8 \ 5 \ 7 \ 2 \ \dots$$

Je dis que la suite  $U_n$  des projections sur  $Oy$  des vecteurs de la suite  $\Pi_n$  se compose des  $2^n + 1$  premiers termes de la suite  $U$ , soit des nombres  $u_h$  ( $h = 0, 1, \dots, 2^n$ ).

En effet, cela est vrai pour  $U_0$ , et si c'est vrai pour  $U_{n-1}$ , ce l'est aussi pour  $U_n$  comme on le vérifie immédiatement en remarquant que, d'après  $2^0$  et  $3^0$ ,  $u_{2h+1} = u_{2h} + u_{2h+2}$ , et en tenant compte de la loi de formation de  $\Pi_n$  énoncée au n°5.

Cherchons à calculer directement  $u_h$  en fonction de  $h$ . A cet effet, posons,  $l_1 \dots l_n$  étant des entiers positifs:

$$H(l_1 \dots l_n) = 2^{l_1} + \dots + 2^{l_n} - 2^{l_1} + \dots + 2^{l_n} + \dots - (-1)^n \ 2^{l_n} + (-1)^n.$$

On a évidemment

$$H(l_1 \dots l_n) = 2^{l_n} H(l_1 \dots l_{n-1}) + (-1)^n,$$

formule qui permettrait de définir la fonction  $H$  par récurrence, en convenant que  $H = 1$  pour  $n = 0$ .

On établit sans aucune difficulté la proposition suivante:

*Lemme.* A tout entier positif impair  $h$  correspondent deux suites finies d'entiers positifs  $l_1 \dots l_n$ , et deux seulement, telles que

$$H(l_1 \dots l_n) = h.$$

Dans l'une de ces suites, le dernier terme  $l_n$  est supérieur à 1. L'autre suite est alors  $(l_1, \dots, l_n - 1, 1)$  et contient un terme de plus.

<sup>1)</sup> Voir P. BACHMANN, Niedere Zahlentheorie (Enzyklopädie der math. Wissenschaften, I, C. 1), où sont cités, à côté du Mémoire de STERN, d'autres travaux sur le même sujet de HERMÉS et EISENSTEIN. Voir aussi l'ouvrage de LUCAS cité plus haut.

Désignons encore par  $C(l_1 \dots l_n)$  le *cumulant* défini par la relation de récurrence

$$C(l_1 \dots l_n) = l_n C(l_1 \dots l_{n-1}) + C(l_1 \dots l_{n-2})$$

en convenant que  $C = 1$  pour  $n = 0$  et  $C = 0$  pour  $n = -1$ , de sorte que  $C(l_1) = l_1$ .

Le problème posé est alors résolu par le théorème suivant.

*Théorème.* Si  $h = H(l_1 \dots l_n)$ ,  $u_h = C(l_1 \dots l_n)$ .

*Démonstration.* Pour  $n = 0$ ,  $h = 1$  et  $u_1 = 1$ , de sorte que le théorème est exact; de même pour  $n = 1$ , puisque  $h = 2^l - 1$  et  $u_h = u_{2^l} + u_{2^{l-2}} = 1 + u_{2^{l-1}-1} = 1 + 1 + u_{2^{l-2}-1} = 1 + 1 + 1 + u_{2^{l-3}-1} = \dots = l + u_0 = l$ .

Supposons-le établi pour  $n = 1, 2, \dots, n-1$  et vérifions qu'il est encore valable pour  $n$ .

En posant  $h' = H(l_1 \dots l_{n-1})$ , on a  $h = 2^l h' + (-1)^n$  et, par hypothèse,  $u_{h'} = C(l_1 \dots l_{n-1})$ . D'après 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup>,  $h$  étant impair, on a

$$u_h = u_{h+1} + u_{h-1} = u_{h'} + u_{2^l n h' + 2(-1)^n} = u_{h'} + u_{2^l n - 1 h' + (-1)^n} = \dots = l_n u_{h'} + u_{h' + (-1)^n}.$$

$$\text{Or, } h' + (-1)^n = 2^l n - 1 H(l_1 \dots l_{n-2}), \text{ d'où } u_{h' + (-1)^n} = C(l_1 \dots l_{n-2})$$

et  $u_h = l_n C(l_1 \dots l_{n-1}) + C(l_1 \dots l_{n-2}) = C(l_1 \dots l_n)$ , ce qui achève la démonstration.

L'une des propriétés les plus frappantes de la suite  $U$ , mentionnée par BACHMANN (loc. cit.), peut aisément se déduire de là. C'est celle exprimée par le théorème suivant.

**THÉORÈME.** *a et b étant deux entiers positifs premiers entre eux, le nombre b apparaît dans la suite U une fois et une seule suivi de a, et une fois et une seule précédé de a.*

*Démonstration.* Si  $h = H(l_1 \dots l_n)$ ,  $h - (-1)^n = 2^l n H(l_1 \dots l_{n-1})$ , et d'après le théorème précédent  $u_h = C(l_1 \dots l_n)$  et  $u_{h - (-1)^n} = C(l_1 \dots l_{n-1})$ , d'où résulte

$$\frac{u_h}{u_{h - (-1)^n}} = \frac{C(l_1 \dots l_n)}{C(l_1 \dots l_{n-1})} = l_n + \frac{1}{l_{n-1}} + \dots + \frac{1}{l_1} \quad (10)$$

en vertu des propriétés bien connues des cumulants.

Supposons  $b > a$ , ce qui est permis. Remarquons que, d'après 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup>, si  $h$  est impair,  $u_h$  est supérieur à  $u_{h-1}$  et à  $u_{h+1}$ , de sorte que les indices  $h$  tels que  $u_h = b$  et  $u_{h-1} = a$  ou  $u_{h+1} = a$  sont nécessairement impairs. Remarquons aussi que deux termes consécutifs de la suite  $U$  sont nécessairement premiers entre eux.

Cela posé, pour trouver un rang  $h$  tel que  $u_h = b$  et  $u_{h-1} = a$ , développons  $\frac{b}{a}$  en fraction continue de manière à avoir un nombre pair de quotients incomplets. Soient  $l_n, l_{n-1}, \dots, l_1$  ces quotients. Comme  $b > a$ ,  $l_n > 0$ . En posant  $h = H(l_1 \dots l_n)$ , on a en vertu de (10),  $n$  étant pair,  $u_h = b$  et  $u_{h-1} = a$ .

C'est la seule solution. En effet, supposons que  $u_h = b$  et  $u_{h-1} = a$ . D'après le lemme ci-dessus, il existe un système d'entiers positifs *en nombre pair*, et un seul,  $l_1 \dots l_n$ , tel que  $h = H(l_1 \dots l_n)$ . D'après (10),  $l_n \dots l_1$  sont les quotients incomplets de  $\frac{b}{a}$  et la valeur de  $h$  est par suite identique à celle déterminée ci-dessus.

Pour déterminer un rang  $h'$  tel que  $u_{h'} = b$  et  $u_{h'+1} = a$ , on partira du développement de  $\frac{b}{a}$  en fraction continue avec un nombre impair de quotients incomplets, et la démonstration s'achève comme ci-dessus.

Si  $h = H(l_1 \dots l_n)$ ,  $n$  étant pair, on a  $h' = H(1, l_1 - 1, l_2 \dots l_n)$  ou  $H(l_2 + 1, l_3 \dots l_n)$  selon que  $l_1 > 1$  ou  $l_1 = 1$ , d'où résulte immédiatement la relation  $h + h' = 2^{l+1} - 2^{l-1}$  entre les rangs  $h$  et  $h'$ ,  $l$  désignant la somme  $l_1 + \dots + l_n$  des quotients incomplets de  $\frac{b}{a}$ .

Comme on l'a remarqué ci-dessus, la projection sur  $Oy$  du vecteur de rang  $h$  de la suite  $\Pi_m$ , c'est-à-dire le  $m^{\text{e}}$  terme de la suite  $U_m$ , est égale à  $u_h$ . Par raison de symétrie, la projection sur  $Ox$  de ce même vecteur est égale à la projection sur  $Oy$  du vecteur de rang  $2^m - h$  de la même suite  $\Pi_m$ , soit à  $u_{2^m-h}$ . Par conséquent, *le terme de rang  $h$  de la suite de BROCOT  $M_m$  est égal à  $\frac{u_h}{u_{2^m-h}}$* . C'est aussi la valeur de  $m\left(\frac{h}{2^m}\right)$ . Cette remarque permet de retrouver aisément les propriétés des suites de BROCOT, ainsi que la formule (2) du n° 6.

Dans un autre article, je montrerai que la courbe  $C$ , ainsi que les fonctions  $x$ ,  $y$  et  $m$  de  $t$  du n° 6, appartiennent à une classe assez vaste de courbes et de fonctions qui peuvent être définies par des équations fonctionnelles. La fonction  $m(t)$ , par exemple, satisfait aux équations

$$m\left(\frac{1+t}{2}\right) = 1 + m(t) \quad \text{et} \quad m\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{m(t)}{m(t)+1}$$

et c'est la seule fonction définie et continue pour  $0 \leq t < 1$  jouissant de cette propriété.  
GEORGES DE RHAM, Lausanne.

## Elementare Ableitung der Coriolisbeschleunigung in der Ebene und im Raume

(Nachtrag zur Abhandlung in Band II, Heft 2, Seite 31–35)

Bei der Aufstellung der Formel

$$c = 2\omega v_{\text{rel}} \sin \delta$$

für die Coriolisbeschleunigung im Raum, wurde übersehen, daß in den vorher behandelten Beispielen für die Ebene nur der Fall betrachtet wird, daß die relative Geschwindigkeit *radial* bezüglich des Drehpunktes des «mitführenden» Systems gerichtet ist. Die obige Formel erscheint daher nur für den Fall bewiesen, daß die relative Geschwindigkeit im Raum in einer Ebene durch die Momentanachse liegt, d. h. daß sie die Momentanachse schneidet, wie dies im zuletzt behandelten Beispiel des genannten Aufsatzes zutrifft. Für den allgemeinen Fall, daß die relative Geschwindigkeit bezüglich der Momentanachse außer einer *radialen* und einer *achsialen* auch eine *transversale* Komponente aufweist, muß die Gültigkeit obiger Formel (auf elementarem Wege) noch nachgewiesen werden.

Zu dem Zwecke betrachten wir zunächst den einfachen Sonderfall in der Ebene (siehe Fig. 1), wo sich ein Massenpunkt  $m$  mit der konstanten Relativgeschwindigkeit  $v_{\text{rel}}$  auf einer *Kreisbahn*  $K$  bewegt, die ihrerseits mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um ihren Mittelpunkt 0 dreht, so daß ein «mitführender» Punkt des Systems