Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **2 (1947)**

Heft 4

PDF erstellt am: **01.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

(Vergleiche Fig. 4.) Betrachten wir jetzt etwa das Dreieck 1, 2, 3 unseres Fünfseits, so wird offenbar durch die verbleibenden Seiten 4, 5 eine verbundene Involution festgelegt im Sinne des angeführten Satzes. Und zwar liegt auf 1 gerade die gewünschte Involution, auf 2 die Involution (e_1, e_3). ((1, 2) (2, 3)), auf 3 ist es wieder die verlangte Involution. Die in den genannten Involutionen zu g_1, g_2, g_3 gepaarten Punkte liegen daher auf einer Geraden g^*. Es sind dies die Punkte G_1, G_2^*, G_3.

Bedeuten U und V die Schnittpunkte der Geraden $e_1 G_1$ mit 3, respektive der Geraden $e_3 G_3$ mit 1, so folgt durch Anwendung des Involutionssatzes vom vollständigen Viereck[1]) auf das Viereck G_1, G_3, U, V:

Die Punkte U, V, g_2 liegen auf einer Geraden.

Nochmalige Anwendung des Involutionssatzes auf das Viereck U, P, V, e_2 (unendliches Vierecksgebiet) liefert die Aussage:

Die Strahlen $e_1 G_1$, $e_2 G_2$, $e_3 G_3$ gehen durch einen Punkt P. Durch Wiederholung derselben Schlußweise gelangt man zu einem Beweis des Satzes.

Liegt g im Unendlichen, so ergibt sich der Satz 2.

(*Bemerkung:* Zu analogen Theoremen gelangt man, wenn man auf den Seiten des Fünfergebildes andere Involutionen setzt.) H. MEIER-WUNDERLI, Rorbas.

Aufgaben

Aufgabe 13. Aus dem Gebiet des Werkzeugmaschinenbaues wird uns die folgende Aufgabe zur möglichst praktischen Lösung auf $^1/_{100}$ mm genau vorgelegt: In eine verlängerte Zykloide soll parallel der Abwälzgeraden ein Streifen konstanter Breite so hineingelegt werden, daß zwei gegenüberliegende Schnittpunkte der gleichen Schleife in einer Senkrechten zum Streifen (das heißt zur Abwälzgeraden) liegen. E. METTLER.

Lösung: Es sei r der Radius des auf der Geraden g ohne Gleiten rollenden Kreises k, a sei der Abstand des die verschlungene Zykloide beschreibenden Punktes vom Mittelpunkt von k.

$$x = r\varphi - a \sin\varphi, \quad y = r - a\cos\varphi$$

ist die Parameterdarstellung der Zykloide. $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ seien zwei Punkte einer Schleife derart, daß $P_1 P_2$ senkrecht zu g und gleich der Breite b des Streifens wird. Somit gilt $x_1 = x_2$ und $y_1 - y_2 = b$. Für die P_1, P_2 entsprechenden Wälzungswinkel $\varphi = u$ und $\varphi = v$ ergibt sich daraus das Gleichungssystem

$$\cos v - \cos u = A, \quad \sin v - \sin u = B(v - u) \text{ mit } A = \frac{b}{a}, \quad B = \frac{r}{a}.$$

Hat man u, v, so kann man y_1 und y_2 berechnen, womit die Aufgabe gelöst ist. (Probe: $y_1 - y_2 = b$.) Zur Lösung des Systems quadriere man die Gleichungen und addiere; man erhält mit $z = v - u$:

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} B^2 z^2.$$

Diese transzendente Gleichung ist mit wenig Mühe mit der verlangten Genauigkeit zu lösen. (Die Diskussion ist interessant.) Aus $z = v - u$ ergibt sich $v + u$ mit Hilfe von $\operatorname{ctg} \frac{v+u}{2} = -\frac{B}{A} z$. Damit hat man u und v. L. LOCHER, Winterthur.

Aufgabe 18. Le rectangle $ABCD$ est la base d'une pyramide dont le sommet S est sur la perpendiculaire au plan du rectangle menée par son centre. Trouver le volume du solide commun au parallélépipède dont $ABCD$ est la section droite et au

[1]) Vgl. LOCHER, Projektive Geometrie, Satz 49, Seite 174.

paraboloïde de révolution de sommet S passant par le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$. Le volume est limité au plan du rectangle. L. KOLLROS.

Lösung: Legen wir durch den Mittelpunkt des Rechtecks parallel zu den Seiten a, b die x-, resp. y-Achse eines räumlichen Koordinatensystems, so hat das Paraboloid mit dem Scheitel S (0; 0; h) die Gleichung

$$z = h\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2}\right), \quad r^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Der Schnitt mit der Ebene $x = t\left(\frac{1}{2}a \leqq t \leqq r\right)$ hat den Flächeninhalt

$$F_t = \frac{4h}{3r^2}(r^2 - t^2)^{3/2}.$$

Eine leichte Rechnung ergibt

$$2\int_{a/2}^{r} F_t\,dt + 2\int_{b/2}^{r} F_t\,dt = \frac{hr^2\pi}{2} - \frac{abh(a^2+b^2)}{6r^2}.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite ist das Volumen des Paraboloids, somit erhält man für das gesuchte Volumen des Stoßkörpers $V = 2/3\ abh$, d. h. das doppelte Pyramidenvolumen. E. TROST, Zürich.

27. Gegeben sind zwei in einer Ebene festliegende Kreise k_1, k_2. Der eine Schenkel eines unveränderlichen Winkels berührt k_1, der andere Schenkel berührt k_2. Man bestimme den geometrischen Ort des Scheitels. R. SCHOECK.

Literaturüberschau

PAULI ET POST. *Trigonométrie.* Payot, Lausanne 1946.

An der Jahresversammlung 1938 des Vereins Schweizerischer Mathematiklehrer hielt Herr Prof. KOLLROS ein Referat über die Elemente der Vektorrechnung, an dessen Schluß es hieß[1]): «... il serait dangereux de l'introduire (c.-à-d. la méthode vectorielle) trop vite dans l'enseignement moyen dont les programmes sont déjà surchargés. Avant de calculer avec des vecteurs, il faut savoir le faire en coordonnées rectangulaires...» Nun sind es gerade zwei westschweizerische Autoren, die doch den Versuch wagen, dem Lehrgang in Trigonometrie eine Einleitung über (ebene) Vektorrechnung vorangehen zu lassen. Die traditionelle Methode, die an die Ähnlichkeitslehre anschließt, wird damit verlassen, was den großen Vorteil bringt, daß die trigonometrischen Funktionen sofort allgemein eingeführt und die Hauptsätze rasch entwickelt werden können. Dagegen dauert es ziemlich lange, bis der Lernende zur eigentlichen Trigonometrie, das heißt zur Dreiecksberechnung kommt. Dieser Seite des Stoffes wird überhaupt weniger Gewicht beigemessen als gewöhnlich in unsern Schulbüchern; von insgesamt 366 Aufgaben gehören nur rund 60 in dieses Gebiet, der Großteil der übrigen stellt Übungen zur Goniometrie dar. Die Aufgaben sind durchwegs sehr sorgfältig und abwechslungsreich ausgewählt und bieten viele Anregungen. Das Buch will offenbar bewußt nur das Werkzeug für alle möglichen Anwendungen der Trigonometrie bereitstellen, in den Aufgaben fehlen diese Anwendungen fast vollständig, so besonders auch solche aus der Stereometrie.

In seinem knappen, klaren Aufbau und in seiner Beschränkung auf Aufgaben vor allem theoretischer Natur atmet das Buch den Geist bester französischer Lehrbücher.

WILLI LÜSSY.

---

[1]) Zitiert aus dem 67. Jahrbuch des VSG. 1938, S. 147/48.