

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 2 (1947)
Heft: 4

Artikel: Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises
Autor: Trost, Ernst
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-12824>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

et la puissance n^e de A , A^n , par les équations

$$x^{(n)} = \frac{x + ny}{3^n}, \quad y^{(n)} = \frac{y}{3^n}.$$

Le point (x, y) étant situé sur l'arc $M_0 M_1$, le point (x', y') est situé sur l'arc $M_0 M\left(\frac{1}{2}\right)$, le point $(x^{(n)}, y^{(n)})$, sur l'arc $M_0 M\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Le coefficient angulaire de la corde passant par M_0 et $(x^{(n)}, y^{(n)})$, égal à $\frac{y}{x + ny}$, tend vers zéro pour $n = \infty$. La courbe C a donc une tangente bien déterminée au point M_0 , qui coïncide avec l'axe Ox , soit avec le côté de P_0 qui porte M_0 .

En tenant compte de la proposition établie au n° 2, on en déduit que, *en chacun des sommets de tous les polygones Q_n , la courbe C a une tangente bien déterminée, qui coïncide avec le côté correspondant de P_n .*

On démontrera au n° 5 que l'angle de deux côtés consécutifs de P_n est au plus égal à $\arctg \frac{1}{n}$, et tend par suite vers zéro pour $n = \infty$. Il est aisé d'en déduire que *la courbe C a en chaque point une tangente*. En effet, étant convexe, la courbe C possède en chaque point M deux tangentes parfaitement déterminées, qui ne sont distinctes que si M est un point anguleux. Soient α et $\alpha + \beta$ les angles qu'elles forment avec Ox . L'angle des côtés consécutifs de P_n tangents à C en deux points situés de part et d'autre de M étant supérieur à β , β est inférieur à $\arctg \frac{1}{n}$ quel que soit n . Donc $\beta = 0$ et M ne peut être un point anguleux. A cause de la convexité de C , on est assuré que la tangente en M varie d'une manière continue avec M .

Le rayon du cercle tangent à C en M_0 et passant par le point $(x^{(n)}, y^{(n)})$ est, comme le montre un calcul immédiat,

$$R_n = \frac{x^{(n)^2} + y^{(n)^2}}{2 y^{(n)}} = \frac{(x + ny)^2 + y^2}{2 \cdot 3^n \cdot y}.$$

Si n tend vers l'infini, $(x^{(n)}, y^{(n)})$ tend vers M_0 et R_n tend vers zéro. Le rayon de courbure de C est donc nul au point M_0 .

Comme le rapport des rayons de courbure de deux courbes affines, en deux points correspondants, est fini et non nul, il résulte immédiatement de là et de la proposition établie au n° 2 que *le rayon de courbure de C est nul en chacun des sommets de tous les polygones Q_n .*

Chaque arc de C contenant un sommet de Q_n , si n est assez grand, on voit que *sur chaque arc de C se trouvent des points où le rayon de courbure est nul, où la courbure est infinie*. Aucun arc de C ne peut donc être analytique. (A suivre.)

GEORGES DE RHAM, Lausanne.

Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises

Es sei \mathfrak{C} eine stetige und stetig gekrümmte Kurve und SAB das vom Schnittpunkt S von zwei Tangenten als Spitze und der Berührungssehne AB als Basis gebildete «Tangentendreieck». Sind *alle* Tangentendreiecke gleichschenkelig, so ist \mathfrak{C} ein Kreis, wie man durch einfache geometrische Überlegungen sofort einsieht. Wir betrachten

im folgenden nur die gleichschenkligen Tangentendreiecke D_α mit dem *festen* Winkel α an der Spitze und untersuchen, ob sich der Kreis durch diese Dreiecke allein charakterisieren läßt.

Wir fassen \mathfrak{C} als Enveloppe ihrer in der Hesseschen Normalform geschriebenen Tangenten $t(\varphi) \equiv x \cos \varphi + y \sin \varphi - p(\varphi) = 0$ auf. Aus dem Gleichungssystem $t(\varphi) = 0$, $t'(\varphi) = 0$ ergeben sich die Koordinaten des Berührungspunktes und damit die Parameterdarstellung

$$x = p(\varphi) \cos \varphi - p'(\varphi) \sin \varphi, \quad y = p(\varphi) \sin \varphi + p'(\varphi) \cos \varphi. \quad (1)$$

Die «Stützfunktion» $p(\varphi)$ ist unter den gemachten Voraussetzungen stetig und zweimal stetig differenzierbar. Die Tangenten $t(\varphi) = 0$ und $t(\varphi + \beta) = 0$ mit den Berührungspunkten A und B schließen den Winkel $\alpha = 180^\circ - \beta$ ($\beta \neq 0^\circ, \neq 180^\circ$) ein. Für die Koordinaten ihres Schnittpunktes S gilt:

$$\begin{aligned} x_S \cdot \sin \beta &= p(\varphi) \sin(\varphi + \beta) - p(\varphi + \beta) \sin \varphi \\ y_S \cdot \sin \beta &= p(\varphi + \beta) \cos \varphi - p(\varphi) \cos(\varphi + \beta). \end{aligned}$$

Die Berührungsstrecke $SA = \sqrt{(x_S - x_A)^2 + (y_S - y_A)^2}$ läßt sich ausrechnen, da die Quadratwurzel aufgeht. Man findet

$$SA = d(\varphi) = \frac{p(\varphi + \beta) - p(\varphi) \cos \beta - p'(\varphi) \sin \beta}{\sin \beta}. \quad (2)$$

Ersetzt man φ durch $\varphi + \beta$ und gleichzeitig β durch $-\beta$, so ergibt sich die Berührungsstrecke auf der zweiten Tangente

$$SB = \frac{p(\varphi) - p(\varphi + \beta) \cos \beta + p'(\varphi + \beta) \sin \beta}{\sin \beta}. \quad (3)$$

Die Vorzeichen der Wurzeln sind dabei so gewählt worden, daß für $p(\varphi) = R$ (Kreis) (2) und (3) denselben Wert $d = R \operatorname{tg} \beta/2 = R \operatorname{ctg} \alpha/2$ annehmen. Jetzt verlangen wir, daß $SB = SA = d(\varphi)$ für alle φ gilt. Drückt man $p(\varphi + \beta)$ mit (2) durch $p(\varphi)$ und $p'(\varphi)$ aus, differenziert nach φ und setzt in (3) ein, so ergibt sich als Differentialgleichung der Stützfunktion bei gegebener «Distanzfunktion» $d(\varphi)$

$$p'' + p = d \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - d'. \quad (4)$$

Nach einer bekannten Übungsaufgabe der Differentialrechnung ist $\rho = p'' + p$ der Krümmungsradius der Kurve mit der Parameterdarstellung (1). Ist also d konstant, das heißt $d' = 0$, so ist auch ρ konstant. Es gilt somit der Satz:

Sind alle Tangentendreiecke D_α kongruente gleichschenklige Dreiecke mit dem Schenkel d , so ist \mathfrak{C} ein Kreis mit dem Radius $R = d \operatorname{tg} \alpha/2$.

Ist die rechte Seite von (4) eine nach Voraussetzung stetige Funktion $f(\varphi)$, so läßt sich die allgemeine Lösung von (4) in der Form

$$p(\varphi) = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(t) \sin(\varphi - t) dt$$

darstellen, wo C_1 und C_2 Integrationskonstanten sind. Zur Probe differenziere man

nach der bekannten Formel

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ \int_{u(\varphi)}^{v(\varphi)} F(t, \varphi) dt \right\} = \frac{dv}{d\varphi} \cdot F(v, \varphi) - \frac{du}{d\varphi} \cdot F(u, \varphi) + \int_u^v \frac{\partial F(t, \varphi)}{\partial \varphi} dt.$$

Setzt man den Ausdruck für $p(\varphi)$ in (2) und (3) ein, so folgt aus der Forderung $SA = SB$

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi}^{\varphi+\beta} f(t) \sin(\varphi + \beta - t) dt + \int_{\varphi}^{\varphi+\beta} f(t) \sin(\varphi - t) dt \\ &= 2 \cos \frac{\beta}{2} \cdot \int_{\varphi}^{\varphi+\beta} f(t) \sin\left(\varphi + \frac{\beta}{2} - t\right) dt = 0, \end{aligned}$$

das heißt bei festem β muß für jeden endlichen Wert von φ gelten

$$\int_{-\beta/2}^{+\beta/2} f\left(\varphi + \frac{\beta}{2} - z\right) \sin z dz = 0. \quad (5)$$

Jede derartige Funktion $f(t)$ liefert eine Kurve \mathfrak{C} mit gleichschenkligen Tangentendreiecken D_α . Die Gleichung von \mathfrak{C} ergibt sich aus (1) in der Form¹⁾

$$x = C_1 - \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(t) \sin t dt, \quad y = C_2 - \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(t) \cos t dt.$$

Für die Bogenlänge von $\varphi = \varphi_0$ an findet man den Ausdruck $s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi) d\varphi$.

Beispiele:

1. $f(t) \equiv at$. Die Bedingung (5) ist nur erfüllt, wenn

$$\int_{-\beta/2}^{+\beta/2} z \sin z dz = 2 \sin \frac{\beta}{2} - \beta \cos \frac{\beta}{2} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}.$$

Nach passender Wahl von C_1 und C_2 erhält man die Parameterdarstellung:

$$x = a \varphi \cos \varphi - a \sin \varphi, \quad y = a \varphi \sin \varphi + a \cos \varphi.$$

Das ist die im Punkt $(0/a)$ beginnende Evolvente des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$. Die Bedingung für gleiche Berührungsstrecken, $\operatorname{tg} \beta/2 = \beta/2$, läßt sich unmittelbar in der Form $a \varphi + a \operatorname{tg} \beta/2 = a(\varphi + \beta) - a \operatorname{tg} \beta/2$ an einer Figur ablesen. Dem ersten möglichen Winkel $\beta = 514^\circ 54'$ entspricht $\alpha = 25^\circ 6'$.

2. $f(t) \equiv at + bt^2$. Man erhält wieder die Bedingung $\operatorname{tg} \beta/2 = \beta/2$, und als Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= (b \varphi^2 + a \varphi - 2b) \cos \varphi - (2b \varphi + a) \sin \varphi \\ y &= (b \varphi^2 + a \varphi - 2b) \sin \varphi + (2b \varphi + a) \cos \varphi. \end{aligned}$$

¹⁾ Dieselbe Darstellung besitzen alle Kurven, die ihren eigenen Evoluten ähnlich sind. Vergleiche G. LORIA, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, 2. Auflage, Bd. II, S. 256.

Das ist die Evolvente der Kreisevolventen¹⁾, bei der die Abwicklung mit der Fadenlänge a im Punkt $(-2b/0)$ des Kreises $x^2 + y^2 = 4b^2$ beginnt.

3. $f(t) \equiv ce^{kt}$. Die Bedingung (5) geht über in

$$0 = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} e^{-kz} \sin z \, dz = \frac{1}{k^2+1} \left[2 \cos \frac{\beta}{2} \sin \left(k \frac{\beta}{2} \right) - 2k \sin \frac{\beta}{2} \cos \left(k \frac{\beta}{2} \right) \right],$$

das heißt $\operatorname{Tg}(k\beta/2) = k \cdot \operatorname{tg} \beta/2$ oder $\operatorname{Tg} w = 2/\beta \operatorname{tg} \beta/2 \cdot w$ mit $w = k\beta/2$. Diese Gleichung hat nur für $\beta > 2\pi$ von Null verschiedene Lösungen. Als Parameterdarstellung erhalten wir

$$(k^2 + 1) x = ce^{k\varphi} (\cos \varphi - k \sin \varphi)$$

$$(k^2 + 1) y = ce^{k\varphi} (k \cos \varphi + \sin \varphi).$$

Setzt man $k = \operatorname{tg} \mu = \ln A$, $\varphi + \mu = \vartheta$, $c = \frac{e^{k\mu}}{\cos \mu}$,

so wird $x = A^\vartheta \cos \vartheta$, $y = A^\vartheta \sin \vartheta$ oder $r = A^\vartheta$,

das ist die Polargleichung einer logarithmischen Spirale²⁾. Aus den obenstehenden Formeln folgt, daß es zu jedem vorgegebenen Tangentenwinkel α logarithmische Spiralen gibt, für die alle Tangendendreiecke D_α gleichschenkelig sind. Die Berührungspunkte liegen dabei auf verschiedenen Windungen.

Zahlenbeispiel: $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 510^\circ$, $\operatorname{Tg} w = \frac{12 \operatorname{tg} 75^\circ}{17\pi} \cdot w = 0,839 w$
 $w = 0,773$, $k = 0,174$, $A = 1,19$
 $r = 1,19^\vartheta$

4. $f(t) \equiv \sin at$ ($a > 1$). Aus (5) wird nach kurzer Rechnung

$$\sin k\psi = k \sin \psi, \quad \text{wo} \quad \psi = \frac{1}{2}(a-1)\beta, \quad k = \frac{a+1}{a-1} \text{ } ^3).$$

Als Kurvengleichung erhält man mit $R = 2a$, $r = a+1$, $(a+1)\varphi = \vartheta$

$$\begin{aligned} x(\vartheta) &= \frac{1}{2(R-r)r} \left[(R-r) \sin \vartheta - r \sin \frac{R-r}{r} \vartheta \right], \\ y(\vartheta) &= \frac{-1}{2(R-r)r} \left[(R-r) \cos \vartheta + r \cos \frac{R-r}{r} \vartheta \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Das ist die Parameterdarstellung einer gemeinen Hypozykloide. Sie ist ähnlich zur Hypozykloide mit dem Festkreisradius R und dem Rollkreisradius r .

Zahlenbeispiel: $k = 1,5$, $a = 5$, $\psi = 3,646$, $\beta = 1,823 = 104^\circ 28'$, $\alpha = 75^\circ 32'$.

Das ist die dem regulären Sternfünfeck entsprechende fünfspitzige Hypozykloide.

¹⁾ Vergleiche LORIA, a. a. O., S. 148.

²⁾ Aus der allgemeinen Formel für die Bogenlänge ergibt sich sofort die natürliche Gleichung $\rho = ks$.

³⁾ Diese Bedingung kann auch in der Form $\operatorname{tg} a\beta/2 = a \operatorname{tg} \beta/2$ geschrieben werden. Sie erweist sich als notwendig und hinreichend dafür, daß die vom Scheitel S beschriebene «isoptische» Kurve eine zur Ausgangskurve ähnliche Kurve ist. Bei der logarithmischen Spirale gilt dies für jeden Winkel β bzw. α .

α muß der Schnittwinkel in den Doppelpunkten sein¹⁾. Wir zeigen zur Probe, daß allgemein einer der Schnittwinkel in einem Doppelpunkt von (6) ein gleichschenkliges Tangendendreieck D_α liefert, sofern a eine ganze Zahl von der Form $4m \pm 1$ ist. Das mit (6) gebildete Gleichungssystem $x(\vartheta_1) = x(\vartheta_2)$, $y(\vartheta_1) = y(\vartheta_2)$, $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$ erhält nach goniometrischer Umformung die Gestalt

$$(R-r) \sin \frac{1}{2} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) = r \sin \frac{R-r}{2r} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \cos \frac{R-r}{2r} (\vartheta_1 + \vartheta_2) \\ - (R-r) \sin \frac{1}{2} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) = r \sin \frac{R-r}{2r} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \sin \frac{R-r}{2r} (\vartheta_1 + \vartheta_2),$$

daraus durch Division

$$- \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\vartheta_1 + \vartheta_2) = \operatorname{tg} \frac{R-r}{2r} (\vartheta_1 + \vartheta_2), \quad \text{also } \vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{2r\pi}{R}.$$

Da $\sin \frac{r\pi}{R} = \sin \frac{R-r}{R} \pi$, $\vartheta_1 - \vartheta_2 = (a+1)(\varphi_1 - \varphi_2) = (a+1)\bar{\beta}$, wo $\bar{\beta}$ einer der Schnittwinkel im Doppelpunkt ist, erhält man

$$- (R-r) \sin \frac{1}{2} (a+1) \bar{\beta} = r \sin \frac{(R-r)(a+1)}{2r} \bar{\beta}$$

oder
$$(a-1) \sin \frac{1}{2} (a+1) (\pi - \bar{\beta}) = (a+1) \sin \frac{1}{2} (a-1) (\pi - \bar{\beta}).$$

Setzt man $\frac{1}{2} (a-1) (\pi - \bar{\beta}) = u$, $\frac{1}{2} (a+1) (\pi - \bar{\beta}) = v$, $\frac{v}{u} = \frac{a+1}{a-1} = k$,

so folgt
$$\sin ku = k \sin u$$

also $u = v$, das heißt $\pi - \bar{\beta} = \bar{\beta}$, $\alpha = \pi - \bar{\beta} = \bar{\beta}$, w. z. b. w.

ERNST TROST, Zürich.

Kleine Mitteilungen

I. Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen

P. ROSSIER hat im Heft 5 (Bd. 1) der Elemente die Differentialgleichung der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ aus ihren Additionstheoremen hergeleitet. Es ist nicht ohne Interesse, den umgekehrten Weg einzuschlagen, das heißt, aus der Differentialgleichung allein auf die charakteristischen Eigenschaften dieser Funktionen zu schließen. Dies sei im folgenden für die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen gemeinsam durchgeführt.

Wir gehen aus von der Differentialgleichung

$$y''(x) + k y(x) = 0 \quad \text{mit } k = \pm 1. \quad (1)$$

Bekanntlich besitzt (1) für willkürlich vorgeschriebene Anfangsbedingungen $y(0)$, $y'(0)$ genau eine Lösung, die sich über den ganzen Bereich $-\infty < x < +\infty$ erstreckt.

¹⁾ Die Spitzen der von S beschriebenen ähnlichen Hypozykloide liegen in den Doppelpunkten der ursprünglichen.