

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1947)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane  
**Autor:** Rham, Georges de  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-12823>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math.

Band II

Nr. 4

Seiten 73–88

Basel, 15. Juli 1947

## Un peu de mathématiques à propos d'une courbe plane<sup>1)</sup>

1. Les points qui divisent en trois parties égales les côtés d'un polygone fermé à  $n$  côtés  $P$  sont les sommets d'un nouveau polygone fermé  $P'$  à  $2n$  côtés. Pour abréger, disons que  $P'$  se déduit de  $P$  par *trisection* (fig. 1).

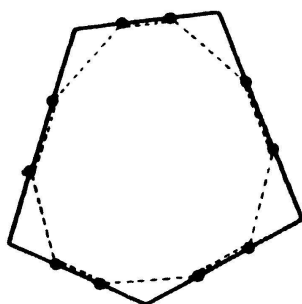


Fig. 1. Trisection d'un polygone

En partant d'un carré  $P_0$  et en répétant cette opération, on obtient une suite de polygones  $P_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), dont chacun se déduit du précédent par trisection. Ces polygones  $P_n$  tendent vers une *courbe limite*  $C$ , convexe, qui limite la région du plan formée des points qui appartiennent à tous les polygones  $P_n$ .

Ce procédé de trisection est utilisé pour tailler les manches de marteaux et donner au profil primitivement rectangulaire de l'ébauche une forme «arrondie». Après deux ou trois opérations, un coup de lime tient lieu de passage à la limite. M. ANDRÉ AMMANN, étudiant à Genève, à qui un élève de l'Ecole des Arts et Métiers qui construisait ainsi des marteaux avait demandé «l'équation» de la courbe  $C$ , en remarqua l'intérêt, et c'est à lui que je dois le sujet de cette conférence.

Dans les nos 2, 3 et 4, j'établis quelques propriétés de cette courbe et je prouve qu'elle n'a aucun arc analytique. Cette étude fait intervenir des suites de nombres rationnels, analogues aux suites de FAREY, considérées notamment par BROCAT, HALPHEN et LUCAS, que ce dernier appelle les *suites de BROCAT*. Pour ne pas renvoyer le lecteur à d'autres ouvrages, j'établis leurs propriétés essentielles au n° 5.

Aux nos 6 et 7, je détermine des procédés permettant de calculer les coordonnées d'un point de  $C$  et le coefficient angulaire de la tangente, soit en fonction d'un para-

<sup>1)</sup> Le thème de cet article a fait l'objet d'une conférence présentée au *Cours de Perfectionnement* organisé par la Société suisse des Professeurs de l'enseignement secondaire à Lausanne en octobre 1946.

mètre qui s'introduit naturellement, soit en fonction de l'abscisse. Là se présentent des fonctions remarquables, dont l'une est la fonction «point d'interrogation de  $x$ » de MINKOWSKI. Au n° 8, j'établis quelques propriétés d'une suite particulière de nombres entiers, la suite de STERN, qui permet de retrouver les résultats précédents.

Dans un autre article, j'envisagerai la courbe et les fonctions définies ici d'un point de vue plus général, en les rattachant à des équations fonctionnelles.

2. Il est clair que les points milieux des côtés de  $P_n$  sont aussi points milieux de côtés de  $P_{n+1}$ , et par suite aussi points milieux de côtés de  $P_{n+k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Ils appartiennent donc à la courbe  $C$ .

Désignons par  $Q_n$  le polygone obtenu en joignant les points milieux des côtés successifs de  $P_n$ .  $Q_n$  est un polygone convexe inscrit dans la courbe  $C$ , tandis que  $P_n$  est circonscrit à cette même courbe.  $Q_n$  est contenu dans  $Q_{n+1}$ . La région du plan comprise entre  $Q_n$  et  $P_n$  se compose de triangles, en nombre égal au nombre des côtés de  $P_n$  ou de  $Q_n$ , soit  $2^{n+2}$ . On les appellera les *triangles d'ordre  $n$* . Chacun de ces triangles est limité par un côté de  $Q_n$ , qu'on appellera sa *base principale*, et par deux demi-côtés de  $P_n$  (fig. 2).

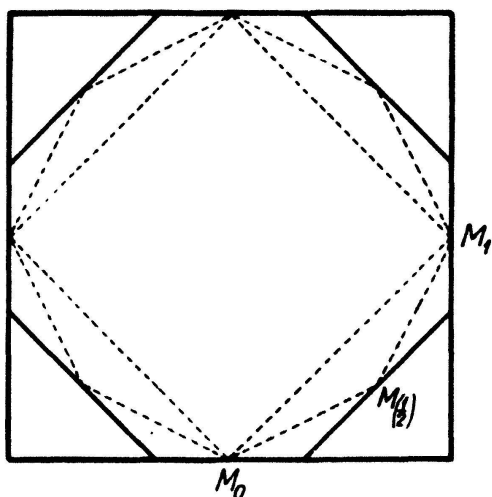


Fig. 2. Les polygones  $P_0$  et  $P_1$  (en trait plein),  $Q_0$  et  $Q_1$  (en trait pointillé), délimitant les 4 triangles d'ordre 0 et les 8 triangles d'ordre 1.

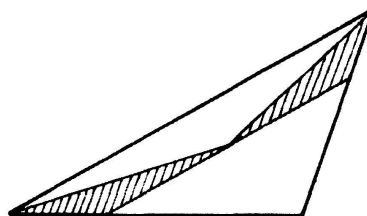


Fig. 3. Construction des deux triangles d'ordre  $n + 1$  contenus dans un triangle d'ordre  $n$ .

Chaque triangle d'ordre  $n$  contient deux triangles d'ordre  $n + 1$ , que l'on obtient par la construction suivante: on joint le centre de gravité du triangle d'ordre  $n$  aux deux extrémités de sa base principale, ce qui fournit les bases principales des deux triangles d'ordre  $n + 1$ , et l'on mène par le centre de gravité une parallèle à la base principale (fig. 3).

La courbe  $C$  est l'ensemble des points qui, pour tout entier  $n$ , appartiennent à un triangle d'ordre  $n$ . L'arc de  $C$  contenu dans un triangle d'un ordre donné est par suite complètement défini par la construction ci-dessus, et le caractère affine de cette construction entraîne la proposition suivante:

*Les arcs de la courbe  $C$  contenus respectivement dans un triangle  $T$  d'ordre  $n$  et dans un triangle  $T'$  d'ordre  $n'$  sont affines. L'affinité qui change  $T$  en  $T'$  de manière que la base principale de  $T$  soit changée en la base principale de  $T'$  change l'arc situé dans  $T$  en l'arc situé dans  $T'$ .*

3. Soient  $M_0$  et  $M_1$  les milieux de deux côtés consécutifs du carré  $P_0$ . Ce sont aussi deux sommets consécutifs du carré  $Q_0$ , et les extrémités de la base principale d'un triangle d'ordre 0.

Le polygone  $Q_n$  a  $2^n - 1$  sommets compris entre  $M_0$  et  $M_1$ . Chacun de ces sommets appartient aussi à  $Q_{n+1}$ , et celui qui dans  $Q_n$  occupe le rang  $h$  après  $M_0$ , occupe dans  $Q_{n+1}$  le rang  $2h$  après  $M_0$ , et dans  $Q_{n+k}$  le rang  $2^k h$  après  $M_0$ . Associons à ce point le nombre  $\frac{h}{2^n}$  et désignons le par  $M\left(\frac{h}{2^n}\right)$ . Aux sommets  $M_0$  et  $M_1$  de  $Q_0$  sont associés les nombres 0 et 1,  $M_0 \rightarrow M(0)$  et  $M_1 \rightarrow M(1)$ .

L'ensemble des sommets des polygones  $Q_n$  situés sur l'arc  $M_0 M_1$  de  $C$  est mis ainsi en correspondance biunivoque avec l'ensemble des nombres dyadiques (nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2) de l'intervalle (0,1).

Cette correspondance s'étend par continuité en une correspondance biunivoque et continue entre l'intervalle (0,1) et l'arc  $M_0 M_1$  de  $C$ . En effet, chaque nombre  $t$  de l'intervalle (0,1) appartient à une suite d'intervalles  $\left(\frac{h_n}{2^n}, \frac{h_n + 1}{2^n}\right)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) emboîtés les uns dans les autres, à laquelle correspond une suite de triangles  $T_n$  d'ordres  $n = 1, 2, \dots$  emboîtés également les uns dans les autres. D'après la construction indiquée au n° 2,  $L$  désignant la base principale de  $T_0$ , la base de  $T_n$  est inférieure à  $\left(\frac{2}{3}\right)^n L$  et tend par suite vers zéro pour  $n \rightarrow \infty$ . Il y a donc un point et un seul appartenant à tous les triangles  $T_n$  de la suite: c'est le point  $M(t)$  associé au nombre  $t$ . Il décrit l'arc  $M_0 M_1$  lorsque  $t$  varie de 0 à 1.

4. Introduisons un système de coordonnées rectangulaires  $Oxy$ , d'origine  $O$  au point  $M_0$ , l'axe des  $x$  passant par le côté du carré qui porte  $M_0$  et l'unité étant choisie de manière que les coordonnées de  $M_1$  soient  $x = 1$  et  $y = 1$  (fig. 4). Le côté du carré  $P_0$  est alors égal à 2.

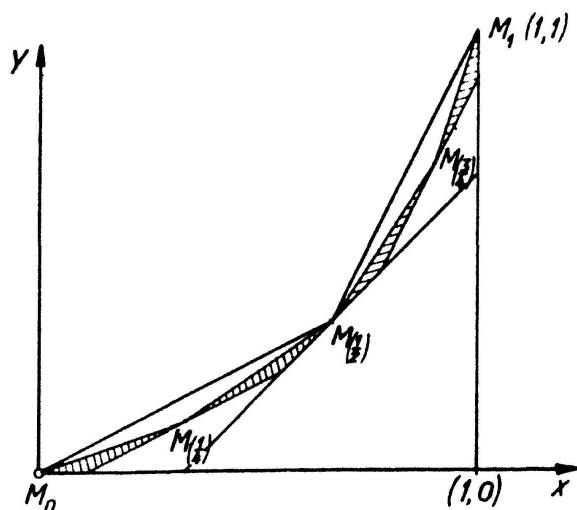


Fig. 4. Les axes de coordonnées et les 4 triangles d'ordre 2 contenant l'arc  $M_0 M_1$ .

L'affinité  $A$  qui change le triangle d'ordre 0 de base  $M_0 M_1$  en le triangle d'ordre 1 de base  $M_0 M\left(\frac{1}{2}\right)$  se traduit alors par les équations

$$x' = \frac{x + y}{3}, \quad y' = \frac{y}{3}$$

et la puissance  $n^e$  de  $A$ ,  $A^n$ , par les équations

$$x^{(n)} = \frac{x + ny}{3^n}, \quad y^{(n)} = \frac{y}{3^n}.$$

Le point  $(x, y)$  étant situé sur l'arc  $M_0 M_1$ , le point  $(x', y')$  est situé sur l'arc  $M_0 M\left(\frac{1}{2}\right)$ , le point  $(x^{(n)}, y^{(n)})$ , sur l'arc  $M_0 M\left(\frac{1}{2^n}\right)$ . Le coefficient angulaire de la corde passant par  $M_0$  et  $(x^{(n)}, y^{(n)})$ , égal à  $\frac{y}{x + ny}$ , tend vers zéro pour  $n = \infty$ . La courbe  $C$  a donc une tangente bien déterminée au point  $M_0$ , qui coïncide avec l'axe  $Ox$ , soit avec le côté de  $P_0$  qui porte  $M_0$ .

En tenant compte de la proposition établie au n° 2, on en déduit que, *en chacun des sommets de tous les polygones  $Q_n$ , la courbe  $C$  a une tangente bien déterminée, qui coïncide avec le côté correspondant de  $P_n$ .*

On démontrera au n° 5 que l'angle de deux côtés consécutifs de  $P_n$  est au plus égal à  $\arctg \frac{1}{n}$ , et tend par suite vers zéro pour  $n = \infty$ . Il est aisé d'en déduire que *la courbe  $C$  a en chaque point une tangente*. En effet, étant convexe, la courbe  $C$  possède en chaque point  $M$  deux tangentes parfaitement déterminées, qui ne sont distinctes que si  $M$  est un point anguleux. Soient  $\alpha$  et  $\alpha + \beta$  les angles qu'elles forment avec  $Ox$ . L'angle des côtés consécutifs de  $P_n$  tangents à  $C$  en deux points situés de part et d'autre de  $M$  étant supérieur à  $\beta$ ,  $\beta$  est inférieur à  $\arctg \frac{1}{n}$  quel que soit  $n$ . Donc  $\beta = 0$  et  $M$  ne peut être un point anguleux. A cause de la convexité de  $C$ , on est assuré que la tangente en  $M$  varie d'une manière continue avec  $M$ .

Le rayon du cercle tangent à  $C$  en  $M_0$  et passant par le point  $(x^{(n)}, y^{(n)})$  est, comme le montre un calcul immédiat,

$$R_n = \frac{x^{(n)^2} + y^{(n)^2}}{2 y^{(n)}} = \frac{(x + ny)^2 + y^2}{2 \cdot 3^n \cdot y}.$$

Si  $n$  tend vers l'infini,  $(x^{(n)}, y^{(n)})$  tend vers  $M_0$  et  $R_n$  tend vers zéro. Le rayon de courbure de  $C$  est donc nul au point  $M_0$ .

Comme le rapport des rayons de courbure de deux courbes affines, en deux points correspondants, est fini et non nul, il résulte immédiatement de là et de la proposition établie au n° 2 que *le rayon de courbure de  $C$  est nul en chacun des sommets de tous les polygones  $Q_n$ .*

Chaque arc de  $C$  contenant un sommet de  $Q_n$ , si  $n$  est assez grand, on voit que *sur chaque arc de  $C$  se trouvent des points où le rayon de courbure est nul, où la courbure est infinie*. Aucun arc de  $C$  ne peut donc être analytique. (A suivre.)

GEORGES DE RHAM, Lausanne.

## Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises

Es sei  $\mathfrak{C}$  eine stetige und stetig gekrümmte Kurve und  $SAB$  das vom Schnittpunkt  $S$  von zwei Tangenten als Spitze und der Berührungssehne  $AB$  als Basis gebildete «Tangentendreieck». Sind *alle* Tangentendreiecke gleichschenkelig, so ist  $\mathfrak{C}$  ein Kreis, wie man durch einfache geometrische Überlegungen sofort einsieht. Wir betrachten