

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1947)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Kleine Mitteilungen

## *Didaktisches zur Behandlung der Exponential- und der Logarithmusfunktion auf der Mittelschule*

1. Wenn der Mathematikunterricht der Mittelschule ein einigermaßen abgerundetes Bild dieses Bildungsstoffes vermitteln und für die Bedürfnisse des Hochschulstudiums, z. B. der Medizin, genügen soll, so wird die Exponentialfunktion ( $E$ ) unbedingt einer sorgfältigen Behandlung bedürfen. Wie die trigonometrischen Funktionen findet auch die  $E$  sehr oft Verwendung, wenn irgendein Vorgang aus dem Gebiet der Naturwissenschaften mathematisch behandelt werden soll. Der Zugang zur Basis  $e$  der speziellen  $E$  ist aber auf der Mittelschule nicht ganz leicht, und es soll daher im Folgenden einiges zur Didaktik dieses Kapitels beigetragen werden.

2. Die Durchsicht der bekannten Lehrbuchliteratur zeigt zunächst einmal Werke, welche ganz unvermittelt die Definition  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  zum Ausgangspunkt nehmen<sup>1)</sup>.

Eine andere Gruppe von Lehrbüchern<sup>2)</sup> beginnt natürlich und einfach mit der Besprechung der allgemeinen  $E a^x$  und leitet dann irgendwie zur speziellen  $E e^x$  über. Die erste Methode mag für den Mathematiker zweckmäßig sein; der Schüler dagegen zeigt für derartige unmotivierte Ausgangssituationen im allgemeinen wenig Verständnis, er empfindet sie als willkürlich und geht daher nur widerstrebend darauf ein. Ich möchte daher im Folgenden für das zweite Verfahren eintreten und dann unter Ziffer 4 besonders zeigen, wie ein Übergang von  $a^x$  zu  $e^x$  auf anschauliche Art vollzogen werden kann. Jüngere Kollegen sind vielleicht, da heute die Beschaffung der in der Anmerkung genannten ausländischen Werke auf Schwierigkeiten stossen dürfte, nicht in der Lage, sich allseitig in der vorhandenen Literatur zu orientieren, so daß ihnen unter Umständen durch die nachfolgenden Hinweise gedient werden kann.

3. Als Ausgangspunkt werden die bereits besprochenen  $E$  dienen können, also z. B. die Potenzen der Aufzinsfaktoren, oder die Glieder der geometrischen Folge, usw. Man wird dann an einigen einfachen Zifferbeispielen  $\left[2^x, 3^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$  die Hauptmerkmale der Kurven  $a^x$  für  $a \geq 1$  und  $0 < a < 1$  besprechen und zeigen, wie  $a < 0$  zu unmöglichen Situationen führt. Es ist recht instruktiv, wie hier mit primitivsten Mitteln die Krümmung der Kurve  $a^x$  untersucht werden kann<sup>3)</sup>. Erst wenn alle elementaren Möglichkeiten ausgeschöpft sind, wird man zur Differentialrechnung greifen und den Differenzenquotienten  $a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$  bilden. Daß der Grenzwert von  $\frac{a^h - 1}{h}$  existiert, kann bei dieser ersten Einführung kurz mit der Bemerkung erledigt werden, daß ja andernfalls auch die Steigung der Kurve unbestimmt würde, und daß unsere Annahme später auf keinen Widerspruch führt. Dieser Grenzwert ist von  $x$ , also von der Lage des Punktes auf der Kurve, unabhängig, dagegen abhängig von der Basis  $a$  der betrachteten  $E$ . Für eine bestimmte  $E a^x$  ist er also konstant und soll mit  $k$  bezeichnet werden. Dann gilt  $(a^x)' = a^x \cdot k$ , ferner  $(a^x)'' = a^x k^2$ ,  $(a^x)''' = a^x \cdot k^3$  usw. Hier lassen sich bereits die bekannten Regeln zur Bestimmung der Extrema und Wendepunkte auf die Kurve  $a^x$  anwenden.

4. Mit der Bestimmung der Konstanten  $k$  soll nun vorläufig zugewartet werden. Da sie von der Größe  $a$  abhängig ist, ändern wir zunächst die Problemstellung und

<sup>1)</sup> P. BUCHNER, Leitfaden der Algebra IV, VSM; REINHARDT-ZEISBERG, Math. Unterrichtswerk, Verlag Diesterweg, Frankfurt a. M.; FENKNER-HOLZMÜLLER, Math. Unterrichtswerk, Verlag Otto Salle, Berlin. HUMBERT, Problèmes d'Algèbre, Vuibert Paris.

<sup>2)</sup> BEHRENDSEN-GÖTTING-HARNACK, Lehrbuch der Math., Verlag Teubner; REIDT-WOLFF-KERST, Elemente der Math., Grothe'sche Buchhandlung, Berlin; FRITZ MALSCH, Zahl und Raum, Verlag Quelle und Meyer, Leipzig.

<sup>3)</sup> Siehe Aufgabensammlung STÄHLI und MEYER, IV. Teil, S. 132, Nr. 57.

treffen unter den vielen möglichen  $E$  eine Auswahl. Wir wollen diejenige  $E$  als die einfachste und wichtigste betrachten, für welche  $k = 1$  ist. Diese spezielle Basis soll nach Euler mit  $e$  bezeichnet werden, und es muß dann gelten:  $e^x = (e^x)' = (e^x)'' = \dots$ . Zur Bestimmung von  $e$  lassen sich folgende Wege beschreiten:

a) *Abschätzung mit Hilfe des Richtungsfeldes*: Wir suchen eine Funktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Die zugehörige Kurve muß also die Eigentümlichkeit besitzen, daß in jedem ihrer Punkte die Steigung mit dem Funktionswert übereinstimmt, oder: die Geschwindigkeit, mit der sich die Funktion ändert, soll proportional sein zur jeweils erreichten Größe. Wir zeichnen nach dieser Vorschrift ein Richtungsfeld und ziehen durch den Punkt  $A (0/1)$  eine Kurve, die gemäß diesen Pfeilen verläuft. Durch Vergleich mit den einleitend gezeichneten Kurven  $2^x$  und  $3^x$  wird man leicht feststellen, daß  $2 < e < 3$  ist und zwar, daß  $e$  näher bei 3 als bei 2 liegt (Fig. 1).

b) *Algebraisches Verfahren*: Eine Funktion, die mit ihrer Ableitung übereinstimmt, hat offenbar die Form<sup>1)</sup>:

$$y = f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad (1)$$

denn es ist  $y' = f'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$  (2)

Durch Subtraktion folgt

$$f(x) - f'(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad \text{ferner } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Wir müssen also in Gleichung (1) die Reihe nicht abbrechen lassen, dann gilt

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + i \cdot i \cdot \dots$$

speziell für  $x = 1$ :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + i \cdot i \cdot \dots$$

woraus eine Berechnung von  $e$  möglich ist.

c) *Geometrisches Verfahren*: Aus  $(a^x)' = k \cdot a^x$  folgt: Weil  $k = 1$  sein soll und auch  $a^0 = 1$  ist, so muß im Punkte  $S (0/1)$  die Steigung der speziellen  $E$   $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$  sein. Wir gehen von einer  $E$ -kurve  $a^x$  aus, deren Steigung in  $A (0/1)$  zu klein ist, also z. B. von  $2^x$ . Die

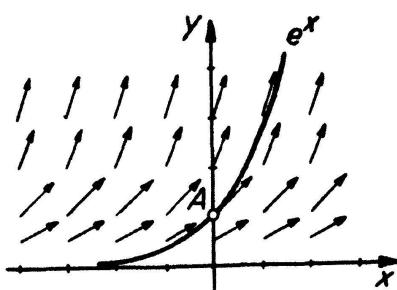


Fig. 1

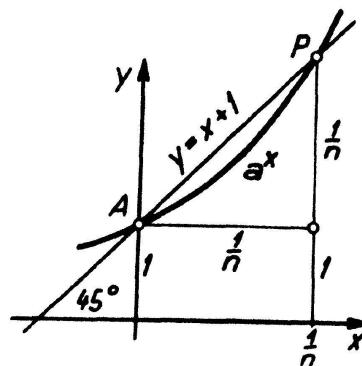


Fig. 2

Kurve wird dann in  $P$  mit der Geraden  $y = x + 1$  zum Schnitt kommen. Die Abszisse von  $P$  sei  $\frac{1}{n}$ . Dann ist die Ordinate von  $P$  einerseits  $a^{\frac{1}{n}}$  und anderseits (Fig. 2)  $1 + \frac{1}{n}$ . Es gilt also  $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$  oder  $a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Da die Kurve in  $A$  die Gerade  $y = x + 1$  berührt

<sup>1)</sup> Gegen dieses Verfahren kann der Vorwurf der Willkür erhoben werden (siehe Abschnitt 2). Man kann es aber, ohne Störung des Zusammenhangs, weglassen, und die Reihenentwicklung für  $e^x$  später behandeln

ren soll, so muß  $P$  mit  $A$  zusammenfallen. Die Basis der speziellen  $E$  wird daher  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Demnach gilt  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + i \cdot i$ .

Hier lassen sich die üblichen Betrachtungen über die Eigenschaften der Zahl  $e$  anschließen.

5. *Bestimmung der Konstanten  $k$ .* Nachdem dann  $e$  als Basis der natürlichen Logarithmen eingeführt worden ist, kann  $a = e^{\ln a}$  und  $y = a^x = e^{x \ln a}$  geschrieben werden. Durch Differenzieren folgt:  $(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$ ; also ergibt sich, daß  $k = \ln a$  ist.

6. *Die Logarithmusfunktionen.* Durch Spiegelung an der Geraden  $y = x$  folgt aus  $y = e^x$  die Logarithmusfunktion  $x = e^y$  oder  $y = \ln x$ . Das Differenzieren von  $x = e^y$  ergibt  $1 = e^y \cdot y'$  oder  $y' = (\ln x)' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$ . Wird aber  $y = a^x$  an der Geraden  $y = x$  gespiegelt, so ergibt sich  $x = a^y$  oder  $y = \log x$  und durch Logarithmieren von  $x = a^y$  folgt  $\ln x = y \ln a$  und durch Differenzieren dieser Gleichung  $\frac{1}{x} = y' \cdot \ln a$ , also  $y' = (\log x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ .

F. MEYER, Bern.

## Aufgaben

*Eine weitere Lösung zu Aufgabe 1:* Ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, dessen Seiten als gerade Linien (also eventuell in ihrer Verlängerung) der Reihe nach durch fünf in der Ebene gegebene Punkte hindurchgehen. Wann ist die Aufgabe lösbar? P. FINSLER.

L'énoncé peut se préciser comme suit sans en altérer le caractère: Etant donnés cinq points numérotés du plan, à quelle condition peut-on tracer un pentagone régulier convexe, dont les côtés (prolongés au besoin) passent successivement par les cinq points donnés, lorsque le polygone est parcouru dans le sens positif, c'est-à-dire en maintenant l'intérieur à gauche?

En cas de possibilité, on demande une construction effective.

1. Nous allons démontrer ce qui suit:

*Il existe en général un et un seul polygone régulier convexe à  $n$  sommets, dont les quatre premiers côtés, dans le sens de parcours positif, passent successivement par quatre points donnés  $P_1, P_2, P_3, P_4$  du plan.*

*A chaque triple  $P_1, P_2, P_3$  correspond cependant un point singulier d'indice  $n$ ; lorsque  $P_4$  est situé en ce point, il existe une infinité de polygones satisfaisant à la condition énoncée; il en est un et un seul dont le cinquième côté passera par un cinquième point donné  $P_5$ , à moins que  $P_5$  ne soit à son tour le point singulier d'indice  $n$  relatif au triple  $P_2, P_3, P_4$ ; en ce cas particulier, on peut faire passer le sixième côté par un sixième point quelconque donné  $P_6$ ; et ainsi de suite indéfiniment.*

*Pour cet énoncé on supposera le polygone parcouru (en sens positif) autant de fois qu'il le faudra, le  $(n+k)$ ème côté étant identique au  $k$ ème. On dit pour abréger que ce côté passe par un point  $P_k$ , en entendant éventuellement que c'est son prolongement qui passe par ce point. L'indice  $n$  est un entier donné quelconque supérieur à 2.*

On en déduit, pour le cas particulier  $n = 5$ , que la construction du pentagone demandé ne sera possible en général que si le cinquième point,  $P_5$ , est situé sur une droite déterminée par les quatre premiers,  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Elle sera encore possible cependant, quel que soit  $P_5$ , si  $P_4$  est singulier d'indice 5 relatif aux trois points précédents. La réponse sera unique dans les deux cas, à moins que  $P_4$  et  $P_5$  soient tous deux singuliers d'indice 5 relatifs aux trois points qui les précèdent.

2. Voici la construction effective dans le cas général:

(I) Sur la base  $P_k P_{k+1}$ , on cherche le sommet  $S_k$  du triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure  $2\pi/n$  radians, dans le sens positif de la mesure des angles, en passant de  $S_k P_k$  à  $S_k P_{k+1}$  ( $k = 1, 2, 3$ ).