

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 2 (1947)
Heft: 3

Artikel: Gerdstellen ebener Kurven
Autor: Krakowski, Viktor
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-12821>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die begrenzende «Kappenkörperkurve», deren Gleichung also

$$y = x^2$$

lautet, ist etwas stärker nach innen gekrümmmt (vergleiche Figur 2) als die «isoperimetrische Kurve». In der Tat läßt sich die zweite Minkowskische Ungleichung (III) als Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung (I) auffassen, indem sie durch eine geeignete algebraische Umformung auf die Gestalt

$$F^3 - 36 \pi V^2 \geq \frac{9 V^2}{F} (M^2 - 4 \pi F) \quad (\text{III}^*)$$

gebracht werden kann.

Es ist nun ohne weiteres klar, daß in analoger Weise eine weitere Ungleichung

$$? \geqq 0 \quad (\text{IV})$$

neben (III) bestehen muß, die ihrerseits eine Verschärfung der Art

$$M^2 - 4 \pi F \geqq ? \quad (\text{IV}^*)$$

sein wird. Das Gleichheitszeichen in (IV) hat für eine Körperschar zu gelten, die eine interpolierende Schar zwischen Kreisscheibe und Kugel darstellt und die also die rechte von D nach B führende Randkurve liefert.

Die in verschiedener Hinsicht plausible Annahme, daß diese Körperschar durch die Parallelkörper des Kreises, durch die Torotope, geliefert werde, stellte eine Vermutung von W. BLASCHKE dar, die sich aber später als unrichtig erwies. Es gibt Körper, deren Diagrammpunkte auf der rechten Seite der durch die kubische Gleichung

$$(\pi^2 - 8)^3 (2 - 3x + y)^2 - 4\pi^2 (12 - \pi^2)^2 (1 - x)^3 = 0$$

dargestellten «Torotopkurve» liegen. Dies trifft beispielsweise zu für die Halbkugel, für welche

$$x = \frac{48}{(4 + \pi)^2}; \quad y = \frac{256}{(4 + \pi)^3}$$

ist.

Zahlreiche Anstrengungen, diese fehlende Randkurve beziehungsweise die fehlende Ungleichung (IV) aufzufinden, verliefen bisher ohne Resultat.

H. HADWIGER, Bern.

Geradstellen ebener Kurven

Aus didaktischen Gründen, aber auch aus Gründen mathematischer Sauberkeit scheinen mir, wenigstens für die Schule, die üblichen Krümmungsbegriffe für ebene Kurven einer zielbewußten, wenn auch einschränkenden Klarstellung zu bedürfen. Zur Rechtfertigung meines Unterfangens müßte ich korrekterweise diese Begriffe, wie sie in der Literatur oder in anerkannt guten Lehrbüchern geboten werden, einer umfassenden Analyse kritisch unterziehen. Ich möchte mich jedoch lediglich mit wenigen kontrollierbaren Feststellungen begnügen, die ich mit Absicht Hochschulbüchern entnehme.

Auf Seite 342–348 seines berühmten *Traité* (Tome I, deuxième édition) behandelt E. PICARD das Problem der Berührungen höherer Ordnung zweier ebener Kurven und gelangt zu einem hier interessierenden Ergebnis, daß die Kurve $x = f(t), y = F(t)$ von einer Geraden $y = a_1x + a_2$ (a_1 und a_2 sind Parameter) in jenen Punkten von mindestens zweiter Ordnung berührt wird, die der Relation

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

genügen; «ce sont les points d'infexion», sagt PICARD kommentarlos im Anschluß daran. Dieser Zusatz kann offenbar nur definierende Bedeutung haben, da diese Punkte gar nicht Wendepunkte im üblichen Sinn des Wortes zu sein brauchen. Die Inkorrekttheit der Benennung tadelt SCHEFFERS auf Seite 21 in seiner «Einführung in die Theorie der Kurven» (2. Auflage 1910), sucht aber trotzdem diese Bezeichnung durch Berufung auf imaginäre Kurven beizubehalten und im reellen Fall durch Unterscheidung in eigentliche und uneigentliche Wendepunkte zu retten. Auch bei ihm heißt also jede Nullstelle der zweiten Ableitung von y nach x Wendestelle. Andere Autoren unterscheiden deutlich zwischen Wendepunkten im geometrischen Sinn des Wortes und Nichtwendepunkten, ohne jedoch damit einem sich aufdrängenden Bedürfnis gerecht zu werden. Denn genau wie bei der Wahl der Benennung der Nullstellen der ersten Ableitung (Waagestellen, Horizontalstellen), das durch sie repräsentierte eindeutig Geometrische im reellen Fall wegleitend war (man wollte nämlich damit Stellen mit dem Steigungsmaß Null andeuten), so sollte man den Nullstellen der zweiten Ableitung im reellen Falle ebenfalls eindeutig Geometrisches zuordnen können. Um zu einer solchen für alle reellen Nullstellen von y'' gültigen, einheitlichen geometrischen Interpretation bei reellen Kurven zu gelangen, könnte man versucht sein, die Begriffe «Konvexität und Konkavität» einer ebenen Kurve heranzuziehen: wird doch eine Kurve an einer Stelle (bei Vorhandensein der zweiten Ableitung und im Falle deren Nichtverschwindens an dieser Stelle) auf diese Charaktere hin untersucht, indem man bekanntlich das Vorzeichen von y'' an dieser Stelle ermittelt. Aber sie eignen sich für unser Vorhaben schlecht, denn gerade im Fall $y''=0$ wird der Zusammenhang zerrissen, da die Kurve an einer reellen Nullstelle von y'' sowohl Konvexität nach oben als auch Konkavität nach oben als auch einen Übergang von der einen Krümmungsart in die andere bieten kann.

Dagegen bringt der engere Begriff des «Gekrümmtseins» einer ebenen Kurve an einer Stelle, wie er nachstehend auseinandergesetzt werden soll, eine, wie ich glaube, befriedigende, weil für die Schule natürlichere Lösung.

Für das Folgende seien Kurven vorausgesetzt, die Schaubilder eindeutiger reeller Funktionen einer reellen Variablen sind, und die im Definitionsbereich ebenfalls eindeutige erste und zweite Ableitungen, letztere überdies stetig, besitzen. Vertikalstellen, also Stellen mit dem Steigungsmaß ∞ , sind vorläufig demnach auszuschließen.

1. *Definition:* Eine Kurve unserer Art $y=f(x)$ heiße an einer Stelle x_1 gekrümmmt, falls $\frac{d\alpha}{dx}$ an dieser Stelle $\neq 0$. Dabei bedeute α den Steigungswinkel, d. h. $\operatorname{tg}\alpha = y'$ und

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Satz 1: Eine Kurve $y=f(x)$ ist dann und nur dann an einer Stelle x_1 gekrümmmt, falls die zweite Ableitung, also y'' , an dieser Stelle $\neq 0$.

Beweis: a) Die Bedingung ist notwendig, denn aus $y' = \tan \alpha$ folgt $\alpha = \arctan y'$ und

$$\left(\frac{d\alpha}{dx} \right)_{x_1} = \frac{1}{1 + (y')_{x_1}^2} \cdot (y'')_{x_1}. \quad (2)$$

Wegen $\left(\frac{d\alpha}{dx} \right)_{x_1} \neq 0$ und des endlichen von Null verschiedenen Nenners ergibt sich $(y'')_{x_1} \neq 0$.

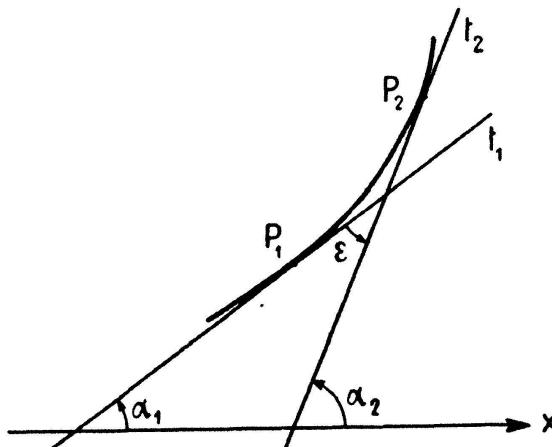
b) Die Bedingung ist hinreichend, denn aus $(y'')_{x_1} \neq 0$ und $1 + (y')_{x_1}^2 \neq 0$ folgt

$$\left(\frac{d\alpha}{dx} \right)_{x_1} \neq 0.$$

Anmerkung: In den meisten Fällen, so für Schulgattungen vom Typus A und B, wird man von der Arcustangens-Funktion keinen Gebrauch machen dürfen. Die Formel (2) wird dann elementar mit Hilfe des Additionstheorems für die Tangensfunktion wie folgt hergeleitet (Figur): Es ist

$$\tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1} = \frac{(y')_{x_2} - (y')_{x_1}}{1 + (y')_{x_2} \cdot (y')_{x_1}}.$$

Aber, wenn P_2 auf der Kurve ganz nahe beim Kurvenpunkt P_1 angenommen wird, ist $\varepsilon = \alpha_2 - \alpha_1$ sehr klein, daher darf man bekanntlich statt $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$, bei Benutzung



des Bogenmaßes für die vorkommenden Winkel, $\alpha_2 - \alpha_1$ setzen. Man macht dabei einen Fehler, der aber der Null zustrebt, wenn P_2 auf der Kurve sich P_1 nähert.

Daraus folgt:

$$\left(\frac{d\alpha}{dx} \right)_{x_1} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{x_2 - x_1} \approx \frac{\tan(\alpha_2 - \alpha_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(y')_{x_2} - (y')_{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{1}{1 + (y')_{x_1} \cdot (y')_{x_2}} \cdot \left(\frac{dy'}{dx} \right)_{x_1}.$$

Strebt x_2 gegen x_1 , dann

$$\left(\frac{dy'}{dx} \right)_{x_1} \rightarrow (y'')_{x_1} \text{ und } \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)_{x_1} \rightarrow \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)_{x_1} = \frac{1}{1 + (y')_{x_1}^2} \cdot (y'')_{x_1}.$$

2. Definition: Eine Kurve $y=f(x)$ heißt an einer Stelle x_1 positiv bzw. negativ gekrümmmt, falls an dieser Stelle $\frac{d\alpha}{dx} > 0$ bzw. < 0 .

Satz 2: Eine Kurve $y=f(x)$ ist an einer Stelle x_1 dann und nur dann positiv bzw. negativ gekrümmmt, falls an dieser Stelle $y'' > 0$ bzw. < 0 .

Beweis analog wie bei Satz 1.

3. *Definition:* Eine Kurve $y=f(x)$ heißt an einer Stelle *gerade (flach)*, falls daselbst $\frac{d\alpha}{dx} = 0$. Eine solche Stelle heißt *Geradstelle*, der zugehörige Kurvenpunkt *Geradpunkt* (auch Flachstelle bzw. Flachpunkt).

Satz 3: Eine Kurve $y=f(x)$ besitzt an einer Stelle x_1 dann und nur dann einen Geradpunkt, falls $(y'')_{x_1} = 0$.

Beweis an Hand der Beziehung (2).

Zusammenfassende Ergebnisse:

1. *Nullstellen der ersten Ableitung sind Waagestellen.* Damit will man im reellen Fall Stellen mit dem Steigungsmaß Null kennzeichnen.

2. *Nullstellen der zweiten Ableitung heißen Geradstellen.* Damit will man andeuten, daß die Kurve sich an einer solchen Stelle im reellen Fall wie eine Gerade verhält.

3. Die Tangente in einem Geradpunkt kann die Kurve durchsetzen, dann ist die Geradstelle eine Wendestelle. Oder aber die unmittelbare Umgebung des Geradpunktes auf der Kurve liegt auf demselben Ufer bezüglich dieser Tangente.

4. Ob sich die Kurve an einer Geradstelle wendet oder nicht, kann durch Feststellung des Gekrümmteins ermittelt werden: man braucht nur das Vorzeichen von y'' in der Umgebung dieser Stelle festzustellen.

5. Darf man die TAYLOR-Reihe voraussetzen, so kann man für den Fall, daß $y=f(x)$ beliebig viele Ableitungen besitzt, y'' in eine nach Potenzen von $x - x_1$ fortschreitende Reihe entwickeln (x_1 = Geradstelle). Unter Heranziehung des Satzes 2 läuft dann die gewünschte Entscheidung auf die bekannte Bedingung hinaus: ist eine reelle Geradstelle eine k -fache Nullstelle von y'' (das heißt die erste an dieser Stelle nicht verschwindende Ableitung, ausgehend von der zweiten, ist von der Ordnung $k+2$), so ist die Geradstelle eine Wendestelle oder nicht, je nachdem k ungerade ist oder nicht ($k=1, 2, 3, \dots$).

6. Eine Geradstelle kann auch Waagestelle sein. Dann ist sie entweder Extremstelle (Maximum oder Minimum) oder Wendestelle. Im letzteren Falle heißt sie zweckmäßig Terrassenstelle.

7. Die Untersuchung auf Gekrümmtsein kann auch bei den eingangs ausgeschlossenen Vertikalstellen vorgenommen werden. Man braucht zu diesem Zweck nur das Koordinatensystem um einen zwischen 0° und 90° (obere Grenze eingeschlossen) gelegenen Winkel β zu drehen und mit der neuen Funktionsgleichung zu arbeiten.

8. Das Attribut «gekrümmt an einer Stelle» kommt einer Kurve zu, wenn sie an dieser Stelle einen endlichen Krümmungsradius $\neq 0$ aufweist.

Einige Beispiele

$$1. \underline{y = x^4 - 4x^3 + 6x^2}. \quad y' = 4x^3 - 12x^2 + 12x; \quad y'' = 12x^2 - 24x + 12 = 12(x-1)^2.$$

Für $x=1$ ist $y''=0$ und $y'=4$. Für $x \neq 1$ ist $y'' > 0$, also Kurve positiv gekrümmmt, somit ist $x=1$ eine Geradstelle, die keine Wendestelle und keine Waagestelle ist.

2. $y = x^4$; $y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$.

Für $x=0$ ist $y'=0$ und $y''=0$. Für $x \neq 0$ ist $y'' > 0$. Daher: $x=0$ ist hier Geradestelle und Extremstelle, weil Waagestelle und keine Wendestelle.

3. $y = x^3$; $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$.

Für $x=0$ ist $y'=0$, $y''=0$, aber für $x > 0$ ist $y'' > 0$ und für $x < 0$ ist $y'' < 0$, somit Kurve positiv gekrümmmt für positives x und negativ gekrümmmt für negatives x , daher ist $x=0$ Terrassenstelle.

4. $y = \sqrt[3]{x}$; $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$x=0$ ist eine Vertikalstelle. Dreht man das Koordinatensystem um 90° , so heißt das, man ersetze in der Funktionsgleichung x durch $(-\bar{y})$ und y durch \bar{x} . Man erhält so die neue Funktionsgleichung $\bar{y} = -\bar{x}^3$; die frühere Vertikalstelle ist jetzt Waagestelle und behandelbar. Sie erweist sich als Terrassenstelle.

VIKTOR KRAKOWSKI, Zürich.

Anwendung der Fourier-Sätze in der Theorie der Seismographen und Schwingungsmesser

§ 1. Komplexe Darstellung reeller Zahlen

$$a, b = \text{reelle Zahlen}, \quad k = +\sqrt{a^2 + b^2}, \quad x = \arctg \frac{b}{a},$$

$$j = \sqrt{-1}, \quad e = 2,718 \dots = \text{Basis der natürlichen Logarithmen.}$$

$$\mathbf{f} = a + jb = ke^{ix} = k(\cos x + j \sin x).$$

$\bar{\mathbf{f}} = a - jb = k \cdot e^{-xi}$ stellt die zu \mathbf{f} konjugiert komplexe Zahl dar.

$$\underline{a = \frac{1}{2} (\mathbf{f} + \bar{\mathbf{f}})}$$
 ist die komplexe Darstellung der reellen Zahl a .

§ 2. Komplexe Darstellung einer Sinusschwingung

$t = \text{Zeit}$. $s = R \cos(\omega t + \psi) =$ Sinusschwingung mit der Amplitude R , der Kreisfrequenz ω und der Phase ψ . ($R > 0$, $\omega > 0$, ψ reell).

Man setze

$$\mathbf{f} = R e^{i(\omega t + \psi)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2} R e^{i\psi} = \text{komplexe Amplitude.}$$

Dann ist

$$s = \frac{1}{2} (\mathbf{f} + \bar{\mathbf{f}})$$

oder

$$s = \mathfrak{S} e^{i\omega t} + \bar{\mathfrak{S}} e^{-i\omega t} \text{ die komplexe Darstellung der Sinusschwingung } s.$$