

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1947)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Sulle involuzioni cubiche di 2a specie  
**Autor:** Longhi, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-12816>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

est unitaire; sa norme  $N(U) = 1$ ; son conjugué

$$U' = \cos \frac{\varphi}{2} + \hat{u} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

L'équation (5')  $\hat{p}_1 = U' \cdot \hat{p} \cdot U$  est équivalente aux formules (3') et (4'). Elle est commode pour la composition de deux ou plusieurs rotations parce que le produit de deux quaternions unitaires est encore unitaire.

Dans son cours dactylographié *Vektorielle Geometrie* STIEFEL démontre la formule (5') en ramenant la rotation d'angle  $\varphi$  à deux symétries successives relativement à deux plans passant par l'axe et faisant entre eux l'angle  $\frac{\varphi}{2}$ .

LOUIS KOLLROS, Zurich

## Sulle involuzioni cubiche di 2<sup>a</sup> specie

Scopo di questo articolo è di indicare alcune proprietà dell'involuzione  $I_3^2$ , in un campo binario, strettamente collegate alla sua coppia neutra e ad una notevole terza covariante di elementi.

1. Sopra un ente razionale  $\Omega$ , semplicemente infinito e irriducibile, si abbia una involuzione  $I_3^2$  d'ordine 3 e di specie 2 (o serie lineare  $g_3^2$ ), cioè una totalità  $\infty^2$  di terne di elementi individuate ciascuna, in generale, da due di essi.

La  $I_3^2$  possiede, come è noto, tre elementi tripli  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) costituenti un gruppo della  $I_3^2$  stessa; e due elementi  $N_1, N_2$  formanti una *coppia neutra*, ossia tali da imporre una sola condizione ai gruppi di  $I_3^2$  costretti a contenerli: in tutto il seguito si supporranno distinti (dal punto di vista della geometria sull'ente) tanto  $N_1$  ed  $N_2$  che  $T_1, T_2, T_3$ .

Indichi  $x$  il parametro di un elemento variabile  $X$  di  $\Omega$  (e così  $x_i$  quello di un elemento  $X_i$ ): cioè, più precisamente, la coordinata proiettiva, in qualunque sistema di riferimento, del punto omologo di  $X$  sopra una punteggiata in corrispondenza birazionale con  $\Omega$ . Allora la  $I_3^2$  si può rappresentare con l'equazione:

$$\lambda_1 (x - t_1)^3 + \lambda_2 (x - t_2)^3 + \lambda_3 (x - t_3)^3 = 0, \quad (1)$$

variando ad arbitrio i coefficienti non tutti nulli  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

2. La coppia neutra  $(N_1, N_2)$  è caratterizzata dalla equivalenza, rispetto alle variabili  $\lambda_i$ , delle due equazioni che si ottengono ponendo nella (1)  $x = n_1$  ed  $x = n_2$ ; onde  $n_1$  ed  $n_2$  si determinano mediante le formule:

$$(n_1 - t_i)^3 = k (n_2 - t_i)^3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

insieme col fattore  $k$  di proporzionalità. Ne discende che  $T_1, T_2, T_3$  formano un gruppo della  $g_3$  che ha per elementi tripli  $N_1, N_2$ ; e quindi (opportunamente ordinati) un ciclo di ciascuna delle due proiettività cicliche del 3<sup>o</sup> ordine di elementi uniti  $N_1, N_2$ . In conclusione:

Teorema I. La coppia neutra  $(N_1, N_2)$  dell'involuzione  $I_3^2$  è il covariante Hessiano del gruppo degli elementi tripli  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

3. Assumendo come fondamentali, nella rappresentazione parametrica di  $\Omega$ , gli elementi  $N_1$  ed  $N_2$ , e disponendo in modo opportuno dell'elemento-unità, si può supporre, in base al n. 2, che sia  $t_i = \varepsilon^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) con  $\varepsilon$  radice cubica primitiva di 1; nonchè  $n_1 = 0$  e  $n_2 = \infty$ .

L'equazione (1) di  $I_3^2$  diviene allora:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i (x - \varepsilon^i)^3 = 0;$$

e se ne trae che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè tre elementi  $X_i$  di  $\Omega$  ( $i = 1, 2, 3$ ) appartengano ad un gruppo della  $I_3^2$  è:*

$$x_1 x_2 x_3 = 1. \quad (2)$$

4. Essendo  $Y$  un qualunque elemento di  $\Omega$ , non vi è che *un* elemento  $Y'$  tale che il gruppo  $2Y + Y'$  appartenga alla involuzione  $I_3^2$ ; mentre esistono *due* elementi  $Y_1$  ed  $Y_2$  avanti ciascuno la proprietà che  $Y + 2Y_i$  sia un gruppo di  $I_3^2$ : essi coincidono coi punti doppi della  $g_2$  residua di  $Y$  rispetto alla  $I_3^2$ .

Per brevità si diranno:  $Y'$  l'elemento *coniugato* di  $Y$  nell'involuzione  $I_3^2$ ; e  $Y_1$ ,  $Y_2$  i due elementi *anticoniugati* di  $Y$  in  $I_3^2$ .

Si può notare che in ciascun elemento della coppia neutra cadono il coniugato e gli anticoniugati dell'altro; e che ogni elemento triplo di  $I_3^2$  è insieme il coniugato di sé stesso ed uno dei suoi anticoniugati.

Dalla (2) si desumono le seguenti espressioni dei parametri di  $Y'$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  in funzione del parametro di  $Y$ :

$$y' = \left(\frac{1}{y}\right)^2, \quad y_1 = +\sqrt{\frac{1}{y}}, \quad y_2 = -\sqrt{\frac{1}{y}}.$$

Ne deriva (n. 3) che gli elementi  $Y'$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  riempiono un gruppo della  $I_3^2$  quando  $y' y_1 y_2 = 1$ , cioè se  $y^3 = -1$ ; confrontando questa equazione con l'altra  $x^3 = 1$  che fornisce (n. 3) i parametri degli elementi tripli  $T_i$ , si conclude:

**Teorema II.** *Il sostegno  $\Omega$  (n. 1) dell'involuzione  $I_3^2$  possiede tre elementi,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  caratterizzati dalla proprietà che l'elemento coniugato<sup>1)</sup>, in  $I_3^2$ , di  $E_k$  e i due elementi anticoniugati<sup>1)</sup> di  $E_k$  stesso, costituiscono insieme un gruppo  $\Gamma_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) della  $I_3^2$ .*

*Tali elementi  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  sono ordinatamente i coniugati armonici, su  $\Omega$ , degli elementi tripli  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  di  $I_3^2$  rispetto alla coppia neutra ( $N_1$ ,  $N_2$ ): che è l'Hessiano della terna  $(E_1 E_2 E_3)$ , oltre che (Teor. I) della terna  $(T_1 T_2 T_3)$ . Ciascuna di queste due terne di elementi è il covariante cubico dell'altra: così che  $E_k$  e  $T_k$  separano armonicamente tanto  $E_r$  ed  $E_s$  che  $T_r$  e  $T_s$ , qualunque sia la permutazione  $r, s, k$  degli indici 1, 2, 3.*

Il gruppo  $\Gamma_k$  si dirà *annesso* all'elemento  $E_k$ .

5. Risulta dal n. 4 che, essendo  $(-\varepsilon^k)$  il parametro dell'elemento  $E_k$ , quelli degli elementi  $E'_k$ ,  $E_{k1}$ ,  $E_{k2}$ , rispettivamente coniugato e anticoniugati di  $E_k$ , sono  $\varepsilon^k$ ,  $i\varepsilon^k$ ,  $-i\varepsilon^k$  (ove  $i^2 = -1$ ). Dunque (n. 3) è  $E'_k \equiv T_k$ ; e inoltre:

<sup>1)</sup> Nel senso dianzi precisato.

$$(N_1 N_2 E_{k1} E_{k2}) = (E_k E'_k E_{k1} E_{k2}) = -1.$$

Quindi:

Teorema III. Il coniugato (n. 4), nell'involuzione  $I_3^2$ , di ogni elemento  $E_k$  è l'elemento triplo  $T_k$ : che coi due elementi  $E_{k1}$ ,  $E_{k2}$  anticoniugati di  $E_k$  in  $I_3^2$  costituisce il gruppo  $\Gamma_k$  di  $I_3^2$  annesso ad  $E_k$  (Teor. II); mentre  $E_k$  è l'anticoniugato di  $T_k$  diverso (n. 4) da  $T_k$  medesimo. La coppia neutra  $(N_1, N_2)$ , la coppia  $(E_k, T_k)$  e l'altra  $(E_{k1}, E_{k2})$  si separano armonicamente a due a due ( $k = 1, 2, 3$ ).

Il prodotto dei parametri di  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $T_3$  vale:

$$(-\varepsilon) (-\varepsilon^2) (\varepsilon^3) = 1.$$

Pertanto (n. 3):

Teorema IV. Il gruppo, dell'involuzione  $I_3^2$ , passante per due qualunque  $E_r$  ed  $E_s$  dei tre elementi  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  (Teor. II) e il gruppo  $\Gamma_k$  annesso al terzo  $E_k$  (Teor. II e III) hanno in comune l'elemento triplo  $T_k$  di  $I_3^2$ .

L'equazione del gruppo  $\Gamma_k$  degli elementi  $T_k$ ,  $E_{k1}$ ,  $E_{k2}$  essendo:

$$(x - \varepsilon^k) (x^2 + \varepsilon^{2k}) = 0,$$

quella dell'involuzione  $g'_3$  individuata da  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  è:

$$(x - \varepsilon) (x^2 + \varepsilon^2) + \lambda (x - \varepsilon^2) (x + \varepsilon) = 0.$$

Il gruppo di tale  $g'_3$  corrispondente a  $\lambda = -1$  consta degli elementi  $x = 0$ ,  $x = \infty$ ,  $x = -1$  cioè  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $E_3$ . Allora:

Teorema V. I gruppi  $\Gamma_r$ ,  $\Gamma_s$  dell'involuzione  $I_3^2$  annessi a due qualunque  $E_r$ ,  $E_s$  degli elementi  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  (Teor. II e III), ed il gruppo di  $I_3^2$  costituito dal terzo  $E_k$  di tali elementi e dalla coppia neutra  $(N_1, N_2)$ , appartengono insieme ad una stessa involuzione  $I_3^1$ .

6. Sull'ente  $\Omega$  i gruppi  $3 T_1$  e  $3 T_2$  determinano una  $g'_3$  contenente il gruppo:

$$(x - \varepsilon)^3 - (x - \varepsilon^2)^3 = 0,$$

i cui elementi  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $E_3$  formano un ciclo della proiettività  $\pi$ :

$$\frac{x' - \varepsilon}{x' - \varepsilon^2} = \varepsilon \frac{x - \varepsilon}{x - \varepsilon^2},$$

di elementi uniti  $T_1$  e  $T_2$ .

La  $\pi$  porta l'elemento  $T_3$ , di parametro  $x = 1$ , nell'altro  $T'_3$  di parametro  $x' = -2$ ; e questo in un  $T''_3$  di parametro  $x'' = -\frac{1}{2}$ . Ne segue che le quaterne:

$$(N_1 N_2 E_3 T_3), \quad (N_2 E_3 N_1 T'_3), \quad (E_3 N_1 N_2 T''_3)$$

sono armoniche. Perciò:

Teorema VI. La terna costituita dagli elementi  $N_1$ ,  $N_2$  della coppia neutra dell'involuzione  $I_3^2$  e da uno qualunque  $E_k$  degli elementi  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  (Teor. II) ha per covariante Hessiano la coppia degli elementi tripli  $T_r$  e  $T_s$  di  $I_3^2$  diversi da quello,  $T_k$ , coniugato di  $E_k$  (Teor. III); mentre ha per covariante cubico il ciclo passante per  $T_k$  di ciascuna delle due proiettività cicliche del terz'ordine (inverse l'una dell'altra) i cui elementi uniti sono  $T_r$  e  $T_s$ .

A. LONGHI, Lugano