

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 2 (1947)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Rotation d'un corps solide autour d'un axe  
**Autor:** Kollros, Louis  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-12815>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math.      Band II      Nr. 2      Seiten 25-48      Basel, 15. März 1947

## Rotation d'un corps solide autour d'un axe

On fait tourner un corps d'un angle  $\varphi$  autour d'un axe passant par un point fixe  $O$ , origine d'un système de coordonnées rectangulaires. Un point quelconque  $P(x, y, z)$  du corps aura après la rotation la position  $P_1$  dont on cherche les coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Soit  $I$  le point d'intersection des tangentes en  $P$  et  $P_1$  au cercle de centre  $C$  et de rayon  $r$ , trajectoire du point mobile; les angles  $PCI$  et  $ICP_1$  sont égaux à  $\frac{\varphi}{2}$  et soit  $\alpha$  l'angle  $POC = P_1OC$ .

On peut arriver de  $O$  à  $I$  par le chemin  $OPI$  et par  $OP_1I$ . Introduisons les vecteurs  $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ ,  $\overrightarrow{OP_1} = \vec{p}_1$ ,  $\overrightarrow{PI}$  et  $\overrightarrow{P_1I}$ ; on aura:

$$\vec{p}_1 + \overrightarrow{P_1I} = \vec{p} + \overrightarrow{PI}.$$

Or,  $\overrightarrow{PI}$  est égal au produit vectoriel  $\vec{a} \times \vec{p}$  si la longueur du vecteur  $\vec{a}$  porté par l'axe est  $a = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ ; on a, en effet:

$$|\vec{a} \times \vec{p}| = a p \sin \alpha = a r = r \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = PI.$$

On voit de même que

$$\overrightarrow{P_1I} = \vec{p}_1 \times \vec{a},$$

et on a l'égalité fondamentale:

$$\vec{p}_1 + (\vec{p}_1 \times \vec{a}) = \vec{p} + (\vec{a} \times \vec{p}) \quad (1)$$

qu'il faut résoudre par rapport à  $\vec{p}_1$ ; si on la multiplie vectoriellement à gauche par  $\vec{a}$ , en appliquant la formule du double produit vectoriel:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{p}_1 \times \vec{a}) &= a^2 \vec{p}_1 - (\vec{a} \cdot \vec{p}_1) \vec{a} \\ \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{p}) &= (\vec{a} \cdot \vec{p}) \vec{a} - a^2 \vec{p} \end{aligned}$$

on aura:

$$(\vec{a} \times \vec{p}_1) + a^2 \vec{p}_1 - (\vec{a} \cdot \vec{p}_1) \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{p}) + (\vec{a} \cdot \vec{p}) \vec{a} - a^2 \vec{p}. \quad (2)$$

La somme de (1) et (2) donne le résultat cherché:

$$\underline{(1 + a^2) \vec{p}_1 = (1 - a^2) \vec{p} + 2(\vec{a} \cdot \vec{p}) \vec{a} + 2(\vec{a} \times \vec{p})} \quad (3)$$

puisque  $\vec{a} \times \vec{p}_1 = -(\vec{p}_1 \times \vec{a})$  et que les deux produits scalaires  $(\vec{a} \cdot \vec{p}_1)$  et  $(\vec{a} \cdot \vec{p})$  sont égaux.

*Exemple:* La rotation de  $120^\circ$  autour de l'axe  $(-13; 5; 13)$ , dans le sens positif, amène le point  $P(2; 6; 9)$  en  $P_1(x_1, y_1, z_1)$ . Le vecteur  $(-13; 5; 13)$  a la longueur  $\sqrt{363} = 11\sqrt{3}$ ; puisque  $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$ , il faut porter sur l'axe le vecteur  $\vec{a}\left(-\frac{13}{11}; \frac{5}{11}; \frac{13}{11}\right)$  de longueur  $a = \sqrt{3}$ ;  $1 + a^2 = 4$ ;  $1 - a^2 = -2$ ; le produit scalaire  $(\vec{a} \cdot \vec{p}) = 11$ , et le produit vectoriel  $(\vec{a} \times \vec{p})$  a les composantes  $(-3; 13; -8)$ . L'équation (3) donne

$$2\vec{p}_1 = -\vec{p} + 11\vec{a} + (\vec{a} \times \vec{p})$$

ou

$$\begin{cases} 2x_1 = -2 - 13 - 3 = -18 \\ 2y_1 = -6 + 5 + 13 = 12 \\ 2z_1 = -9 + 13 - 8 = -4. \end{cases}$$

$P_1$  a donc les coordonnées  $(-9; 6; -2)$ .

Si  $P$  tourne de  $120^\circ$  dans le sens inverse, il n'y a que le produit vectoriel qui change de signe dans l'équation (3);  $P$  prend alors la position  $P_2(-6; -7; 6)$ .

La formule (3) est identique aux trois formules connues sous le nom de CAYLEY (ou d'Olinde RODRIGUES en France):

Si  $(b; c; d)$  sont les composantes du vecteur  $\vec{a}$ ,  $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$ ;  $(\vec{a} \cdot \vec{p}) = bx + cy + dz$  et les trois composantes de  $(\vec{a} \times \vec{p})$  sont  $(cz - dy; dx - bz; by - cx)$ ; l'équation (3) est équivalente aux trois équations de CAYLEY:

$$\begin{cases} (1 + b^2 + c^2 + d^2)x_1 = (1 + b^2 - c^2 - d^2)x + 2(bc - d)y + 2(bd + c)z \\ (1 + b^2 + c^2 + d^2)y_1 = 2(cb + d)x + (1 - b^2 + c^2 - d^2)y + 2(cd - b)z \\ (1 + b^2 + c^2 + d^2)z_1 = 2(db - c)x + 2(dc + b)y + (1 - b^2 - c^2 + d^2)z. \end{cases} \quad (4)$$

En donnant à  $b, c, d$  des valeurs réelles quelconques, ces formules déterminent toutes les transformations orthogonales réelles; elles conservent la forme  $x^2 + y^2 + z^2$  laissent donc invariante l'ombilicale, l'absolu de la géométrie euclidienne à trois dimensions.

*Formules d'EULER.* Si l'on a sur l'axe un vecteur unitaire  $\vec{u}(\beta; \gamma; \delta)$ ,  $\vec{a} = a\vec{u}$ ;  $a = \text{tg } \frac{\varphi}{2}$ ;  $\frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \cos \varphi$ ;  $\frac{2a}{1 + a^2} = \sin \varphi$ ;  $\frac{2a^2}{1 + a^2} = 1 - \cos \varphi$ ; l'équation (3) devient alors:

$$\vec{p}_1 = \vec{p} \cos \varphi + (\vec{u} \cdot \vec{p}) \vec{u} (1 - \cos \varphi) + (\vec{u} \times \vec{p}) \sin \varphi. \quad (3')$$

Elle est équivalente aux trois formules d'EULER:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi + \beta(\beta x + \gamma y + \delta z)(1 - \cos \varphi) + (\gamma z - \delta y) \sin \varphi \\ y_1 = y \cos \varphi + \gamma(\beta x + \gamma y + \delta z)(1 - \cos \varphi) + (\delta x - \beta z) \sin \varphi \\ z_1 = z \cos \varphi + \delta(\beta x + \gamma y + \delta z)(1 - \cos \varphi) + (\beta y - \gamma x) \sin \varphi. \end{cases} \quad (4')$$

### Emploi des quaternions

La solution du problème des rotations s'écrit élégamment à l'aide des quaternions. Un quaternion  $A = a_0 + \vec{a}$  est la somme d'un nombre  $a_0$  et d'un vecteur  $\vec{a}$ ;  $A' = a_0 - \vec{a}$  est le quaternion conjugué de  $A$ .

Nous désignerons le produit de deux quaternions  $A$  et  $B$  par le symbole  $A \cdot B$ . La loi de multiplication de  $A = a_0 + \vec{a}$  par  $B = b_0 + \vec{b}$  s'exprime par la relation:

$$A \cdot B = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b} + a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{b})^1$$

dont la partie scalaire  $c_0 = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$ .  
et la partie vectorielle  $\vec{c} = a_0 \vec{b} + b_0 \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{b})$ .

Si l'on désigne les composantes du vecteur  $\vec{a}$  par  $(a_1, a_2, a_3)$  et de même pour  $\vec{b}$   $(b_1, b_2, b_3)$  et  $\vec{c}$   $(c_1, c_2, c_3)$ , on a

$$\begin{cases} c_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 = a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 = a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases}$$

En particulier:  $A \cdot A' = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ : Le produit d'un quaternion par son conjugué est réel: c'est la *norme* de  $A$ ; nous la désignerons par  $N(A) = A \cdot A' = A' \cdot A$ .

On vérifie aisément que  $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$  et  $N(A \cdot B) = N(A) N(B)$ . Le produit des quaternions est associatif et distributif, mais pas commutatif.

On appelle *inverse*  $A^{-1}$  d'un quaternion  $A$  le quotient de son conjugué  $A'$  par sa norme:

$$A^{-1} = \frac{A'}{N(A)}$$

et l'on a:  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = 1$ .

Si l'on multiplie le vecteur  $\vec{p}$  par le quaternion  $1 - \vec{a} = A$ , on trouve:

$$\vec{p} \cdot (1 - \vec{a}) = \vec{p} \cdot \vec{a} + \vec{p} - (\vec{p} \times \vec{a});$$

de même

$$(1 - \vec{a}) \cdot \vec{p}_1 = \vec{a} \cdot \vec{p}_1 + \vec{p}_1 - (\vec{a} \times \vec{p}_1).$$

Notre égalité fondamentale (1) peut donc s'écrire:

$$A \cdot \vec{p}_1 = \vec{p} \cdot A \tag{1'}$$

d'où, en multipliant à gauche par  $A^{-1}$ :

$$\vec{p}_1 = A^{-1} \cdot \vec{p} \cdot A$$

ou

$$\underline{N(A) \vec{p}_1 = A' \cdot \vec{p} \cdot A} \tag{5}$$

Cette formule est équivalente aux formules (3) et (4).

Si on remplace  $\vec{a}$  par  $\vec{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  et si on multiplie  $A = 1 - \vec{u} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$  par  $\cos \frac{\varphi}{2}$ , le quaternion

$$A \cos \frac{\varphi}{2} = U = \cos \frac{\varphi}{2} - \vec{u} \sin \frac{\varphi}{2}$$

<sup>1)</sup> HURWITZ, Zahlentheorie der Quaternionen, p. 3 et 4.

est unitaire; sa norme  $N(U) = 1$ ; son conjugué

$$U' = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{u} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

L'équation (5')  $\vec{p}_1 = U' \cdot \vec{p} \cdot U$  est équivalente aux formules (3') et (4'). Elle est commode pour la composition de deux ou plusieurs rotations parce que le produit de deux quaternions unitaires est encore unitaire.

Dans son cours dactylographié *Vektorielle Geometrie* STIEFEL démontre la formule (5') en ramenant la rotation d'angle  $\varphi$  à deux symétries successives relativement à deux plans passant par l'axe et faisant entre eux l'angle  $\frac{\varphi}{2}$ .

LOUIS KOLLROS, Zurich

## Sulle involuzioni cubiche di 2<sup>a</sup> specie

Scopo di questo articolo è di indicare alcune proprietà dell'involuzione  $I_3^2$ , in un campo binario, strettamente collegate alla sua coppia neutra  $c$  ad una notevole terna covariante di elementi.

1. Sopra un ente razionale  $\Omega$ , semplicemente infinito e irriducibile, si abbia una involuzione  $I_3^2$  d'ordine 3 e di specie 2 (o serie lineare  $g_3^2$ ), cioè una totalità  $\infty^2$  di terne di elementi individuate ciascuna, in generale, da due di essi.

La  $I_3^2$  possiede, come è noto, tre elementi tripli  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) costituenti un gruppo della  $I_3^2$  stessa; e due elementi  $N_1, N_2$  formanti una *coppia neutra*, ossia tali da imporre una sola condizione ai gruppi di  $I_3^2$  costretti a contenerli: in tutto il seguito si supporranno distinti (dal punto di vista della geometria sull'ente) tanto  $N_1$  ed  $N_2$  che  $T_1, T_2, T_3$ .

Indichi  $x$  il parametro di un elemento variabile  $X$  di  $\Omega$  (e così  $x_i$  quello di un elemento  $X_i$ ): cioè, più precisamente, la coordinata proiettiva, in qualunque sistema di riferimento, del punto omologo di  $X$  sopra una punteggiata in corrispondenza birazionale con  $\Omega$ . Allora la  $I_3^2$  si può rappresentare con l'equazione:

$$\lambda_1 (x - t_1)^3 + \lambda_2 (x - t_2)^3 + \lambda_3 (x - t_3)^3 = 0, \quad (1)$$

variando ad arbitrio i coefficienti non tutti nulli  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

2. La coppia neutra ( $N_1, N_2$ ) è caratterizzata dalla equivalenza, rispetto alle variabili  $\lambda_i$ , delle due equazioni che si ottengono ponendo nella (1)  $x = n_1$  ed  $x = n_2$ ; onde  $n_1$  ed  $n_2$  si determinano mediante le formule:

$$(n_1 - t_i)^3 = k (n_2 - t_i)^3 \quad (i = 1, 2, 3),$$

insieme col fattore  $k$  di proporzionalità. Ne discende che  $T_1, T_2, T_3$  formano un gruppo della  $g_3'$  che ha per elementi tripli  $N_1, N_2$ ; e quindi (opportunamente ordinati) un ciclo di ciascuna delle due proiettività cicliche del 3<sup>o</sup> ordine di elementi uniti  $N_1, N_2$ . In conclusione:

**Teorema I.** *La coppia neutra ( $N_1, N_2$ ) dell'involuzione  $I_3^2$  è il covariante Hessiano del gruppo degli elementi tripli  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).*