

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	2 (1947)
<b>Heft:</b>	1
<b>Artikel:</b>	Bemerkungen zum Beitrag des Herrn P. Rossier über Funktionalgleichungen
<b>Autor:</b>	Pfluger, A.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-12813">https://doi.org/10.5169/seals-12813</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Bemerkungen zum Beitrag des Herrn P. Rossier über Funktionalgleichungen<sup>1)</sup>

In der genannten Arbeit werden einige Funktionalgleichungen mit Methoden der Differentialrechnung untersucht. Hierzu ist zu bemerken, daß die Forderung der Differenzierbarkeit nicht sachgemäß ist und auch keinerlei Vereinfachung der Methode mit sich bringt. Es genügt, die Funktionen als stetig vorauszusetzen. Für die Gleichungen der Nrn. 2–6 ist dies bekannt<sup>2)</sup>. Ob aber die Gleichungen

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(a - x_2) + f(x_2) f(a - x_1) \quad (1)$$

bzw.

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) f(x_2) + f(a - x_1) f(a - x_2) \quad (2)$$

in Nrn. 7 und 8, welche, abgesehen von Konstanten für die Sinus- und Kosinusfunktionen, charakteristisch sind, in der Literatur schon behandelt wurden, ist mir unbekannt. Ähnliche Gleichungen wurden schon gelegentlich untersucht; so z. B. von D'ALEMBERT<sup>3)</sup> die Gleichung  $f(x_1 + x_2) + f(x_1 - x_2) = 2 f(x_1) f(x_2)$ , welche neben  $\cos \mu x$  auch  $\cosh \mu x$  als Lösung zuläßt. VAN VLECK<sup>4)</sup> zeigte, daß  $\sin \frac{4n+1}{2a} \pi x$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , die allgemeinste stetige Lösung der Gleichung  $f(x_1 - x_2 + a) - f(x_1 + x_2 + a) = 2 f(x_1) f(x_2)$  darstellt. Da aber die Methode des Herrn ROSSIER Differenzierbarkeit voraussetzt, so möchte ich hier einen Beweis mitteilen, der nur Stetigkeit benützt. Ich beschränke mich dabei auf die Gleichung (1) und beweise, daß die einzigen überall stetigen Lösungen von (1) sind die Sinusfunktionen  $\sin \frac{4n+1}{2a} \pi x$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , und die Konstanten 0 und  $\frac{1}{2}$ .

Hiezu gehe ich aus von dem Gleichungssystem

$$S(x_1 + x_2) = S(x_1) C(x_2) + S(x_2) C(x_1) \quad (2)$$

$$C(x) = S(a - x), \quad (3)$$

wo  $a$  eine reelle Konstante  $\neq 0$  bedeutet. Dieses System ist mit (1) äquivalent. Für  $x_1 = x_2 = 0$  bzw.  $x_1 = 0, x_2 = x$  folgt aus (2)

$$S(0) = 2 S(0) C(0) \quad (4)$$

bzw.

$$S(x) = S(x) C(0) + S(0) C(x). \quad (5)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem ob  $S(0) = 0$  oder  $S(0) \neq 0$  ist.

<sup>1)</sup> Elemente der Mathematik, Bd. I, S. 81–87. Diese Bemerkungen sind im wesentlichen ein Auszug aus einem Brief an Herrn Rossier, den zu veröffentlichen er mich gebeten hatte.

<sup>2)</sup> Vgl. etwa CAUCHY, Cours d'analyse, 1821, Kap. 5.

<sup>3)</sup> Mémoire sur les principes de la mécanique, 1798.

<sup>4)</sup> Annals of Mathematics (2), Bd. 11 und 13.

1. Fall:  $S(0) = 0$ .

$S(x) \equiv 0$  ist eine Lösung, die Konstante 0. Sei also  $S(x) \not\equiv 0$ . Dann ist wegen (5)  $C(0) = S(a) = 1$ . Mit  $x_1 = a - x$  und  $x_2 = x$  folgt daher aus (2) und (3)  $C^2(x) + S^2(x) = 1$ . Der Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $\xi = C(x)$  und  $\eta = S(x)$  liegt also auf dem Einheitskreis  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ . Seine Lage hängt stetig vom Parameter  $x$  ab. Der Richtungswinkel  $\varphi$  des Vektors  $\overrightarrow{OP}$  (bestimmt bis auf Vielfache von  $2\pi$ ) ist eine (mehrdeutige) Funktion von  $x$ . Mit der Bedingung  $\varphi(0) = 0$  wird  $\varphi$  bei stetiger Fortsetzung eine eindeutige und stetige Funktion, und wir erhalten

$$C(x) = \cos \varphi(x) \quad \text{und} \quad S(x) = \sin \varphi(x).$$

In Verbindung mit (2) folgt dann

$$\begin{aligned} \sin(\varphi(x_1 + x_2)) &= S(x_1 + x_2) \\ &= \sin \varphi(x_1) \cos \varphi(x_2) + \sin \varphi(x_2) \cos \varphi(x_1) = \sin(\varphi(x_1) + \varphi(x_2)). \end{aligned}$$

Es ist also entweder für alle  $x_1$  und  $x_2$

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + 2k\pi \quad (6)$$

oder  $-\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) + (2k+1)\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (7)

Wegen  $\varphi(0) = 0$  fällt (7) außer Betracht und in (6) wird  $k$  die Konstante 0. Es folgt  $\varphi(x) = \mu \cdot x$  ( $\mu \neq 0$ ) und  $S(x) = \sin \mu x$ . Die Bedingung  $S(a) = 1$  ergibt  $\mu = \frac{4n+1}{2a}\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Die möglichen Lösungen im Falle 1 sind also die Sinusfunktionen  $\sin \frac{4n+1}{2a}\pi x$  und die Konstante 0.

Fall 2:  $S(0) \neq 0$ . Dann ist wegen (4)  $C(0) = S(a) = \frac{1}{2}$  und aus (5) wird

$$\frac{1}{2} S(x) = S(0) \cdot C(x). \quad (8)$$

Mit  $x = a$  folgt daraus  $S(0) = \pm \frac{1}{2}$ .

Fall 2a:  $S(0) = -\frac{1}{2}$ . Dann ist wegen (8)  $S(x) = -C(x)$  und für  $x_1 = x_2 = \frac{a}{2}$  wird aus (2)  $\frac{1}{2} = S(a) = -2S^2\left(\frac{a}{2}\right)$ , womit der Fall 2a ausgeschlossen ist.

Fall 2b:  $S(0) = \frac{1}{2}$ . Dann ist wegen (8)  $S(x) = C(x)$ . Aus (2) wird

$$S(x_1 + x_2) = 2 S(x_1) S(x_2) \quad (9)$$

und daraus

$$S(nx) = 2^{n-1} \cdot S^n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

$n = 2$  ergibt  $S(2x) = 2S^2(x)$ ,  $S(x)$  ist also nie negativ. Mit  $x = \frac{a}{n}$  folgt aus (10)  $S\left(\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{2}$  und weiter  $S(r a) = \frac{1}{2}$  für alle positiven rationalen  $r$ . Mit (9) kann dieser Sachverhalt auf die negativen rationalen  $r$  übertragen werden und aus der Stetigkeit von  $S(x)$  folgt schließlich  $S(x) \equiv \frac{1}{2}$ , womit alles bewiesen ist.