Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 6

Artikel: Johann I Bernoulli als Kritiker der "Principia" Newtons
Autor: Fleckenstein, J.O.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1211

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\left|2\sin\frac{\pi}{q}\right|^k = |P_k + iQ_k \sin\varphi|\,\Delta. \tag{12}$$

Da offensichtlich nicht beide Zahlen P_k und Q_k zugleich verschwinden können, kann jetzt auf

$$|P_k + iQ_k \sin\varphi| \geqq |\sin\varphi| > 0, \tag{13}$$

und damit auf

$$\left|2\sin\frac{\pi}{q}\right|^k \geqq \Delta\,|\sin\varphi| \tag{14}$$

geschlossen werden. Wegen $q > 6$ ist aber

$$\left|\sin\frac{\pi}{q}\right| < \frac{1}{2}, \tag{15}$$

so daß mit (14) für hinreichend große k ein Widerspruch erzielt ist. Damit ist die Unmöglichkeit der Gegenannahme gezeigt und der Beweis abgeschlossen.

H. HADWIGER, Bern

Johann I Bernoulli als Kritiker der «Principia» Newtons

1. In der Geschichte der Mathematik lebt JOHANN BERNOULLI (1667–1748) als eifrigster Partisan Leibnizens im Prioritätsstreit um die Entdeckung der Infinitesimalrechnung fort, der nach dem Tode seines großen Freundes allein «wie Horatius Cocles»[1]) den Kampf mit den zelotischen Newtonianern ausfechten mußte. In diesen Fehden konnte nun BERNOULLI mit nicht geringem Stolze darauf hinweisen, daß er in der «*Philosophiae naturalis principia mathematica*», auf die die Newtonianer wie auf die Bibel ihres Herrn und Meisters schworen, eine Reihe von Fehlern in der Behandlung der Zentralkräfte nachweisen konnte.

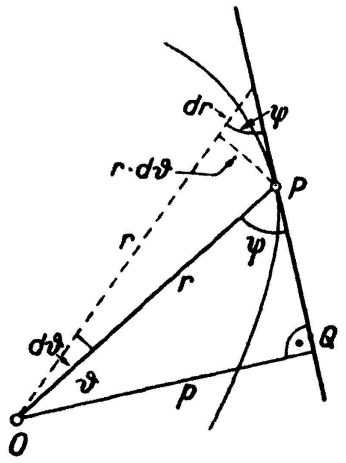

Fig. 1

Sind diese Fehler allerdings mehr bloße Versehen NEWTONS, so gaben sie doch andererseits BERNOULLI Anlaß, das Zweikörperproblem ganz allgemein, sowohl im Vakuum wie im widerstehenden Mittel analytisch zu entwickeln und dabei um

[1]) So nennt FONTENELLE BERNOULLI im Eloge vor der Pariser Akademie.

1710 diejenigen Formeln aufzustellen, die bis heute in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik immer wieder gebracht werden, wobei anscheinend ganz vergessen worden ist, daß diese Entwicklungen auf JOHANN I BERNOULLI zurückgehen.

Nachstehend sollen deshalb die Bemerkungen BERNOULLIS zu NEWTONS Versehen im Zusammenhang mit dem Zweikörperproblem zusammenfassend dargestellt werden, wobei die Transkription der BERNOULLIschen Ableitungen in die moderne analytische Mechanik nicht zu weit getrieben werden soll, damit die geometrischen Überlegungen der alten Analytiker noch genügend erkennbar bleiben.

2. Es sei $P(x, y)$ ein Punkt der Bahnkurve, die der Massenpunkt ($m = 1$ gesetzt) unter dem Einfluß einer Zentralkraft $\varphi(r)$, die von O aus wirke, beschreibt. Dann kann man einerseits, wenn die Bahn vorgegeben ist, das zugehörige Zentralkraftgesetz, oder andererseits bei vorgegebener Zentralkraft die zugehörige Bahnkurve bestimmen. So hat NEWTON aus der Bahnform der KEPLER-Ellipsen das Zentralkraftgesetz $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$ hergeleitet (Lib. I, Sect. III, Prop. XI–XIII). Hierbei passierte nun NEWTON ein Lapsus, indem er die Umkehrung dieses Satzes, aus dem Kraftgesetz $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$ folge auch «*vice versa*», daß die Bahnkurve ein Kegelschnitt ist, für selbstverständlich hielt[1]).

Nicht zuletzt wohl angeregt durch VARIGNONS Entdeckung von 1700[2]), daß sowohl die logarithmische $r = e^{\vartheta}$ wie die hyperbolische Spirale $r = \frac{1}{\vartheta}$ Bahnkurven des einen Kraftgesetzes $\varphi(r) = \frac{1}{r^3}$ sein können, obwohl (in Polarkoordinaten) die eine Kurve algebraisch, die andere transzendent ist, bemerkte BERNOULLI zuerst, daß NEWTONS Umkehrung eines Beweises bedürfe und führte 1710 den allgemeinen Beweis, daß das Kraftgesetz $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$ nur Kurven zweiten Grades, das heißt Kegelschnitte als Bahnkurven liefert[3]).

Bei der Herleitung der Differentialgleichung der Bahnkurve aus den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi(r)\frac{x}{r}; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi(r)\frac{y}{r} \tag{1}$$

benutzt BERNOULLI sowohl das Flächenintegral wie das Energieintegral. Nach Multiplikation mit x respektive y und Subtraktion sowie nachfolgender Integration folgt sofort aus (1) das Flächenintegral

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c.$$

Dieses Flächenintegral lautet dann in Polarkoordinaten

$$r^2 d\vartheta = x\,dy - y\,dx = 2\,dF = c\,dt,$$

[1]) In COROL. I zur Prop. XIII, Prob. VIII, heißt es: «... *si corpus quodvis P ....vi centripeta quae sit reciproce proportionalis quadrato distantiae a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum Conicarum....* & *contra*». Dieses Corollar wurde erst nach der BERNOULLIschen Kritik bei der zweiten Auflage der *Principia* (1713) durch die nachfolgenden erläuternden Zusätze ergänzt (vgl. Wolfers-Ausgabe, Seite 75, lin. 7—14).

[2]) Mém. Acad. Paris, 1700, pp. 83—101.

[3]) Extrait de la Réponse de M. BERNOULLI à M. HERMANN, datée de Basle le 7. Octobre 1710. Mém. Acad. Paris, 1710, pp. 521–533, Op. I, 470–480.

welches man mit dem Lot p (von O aus auf die Bahntangente in P) wegen $2\,dF = p\,ds$ in der Form

$$p\frac{ds}{dt} = pv = c \tag{2}$$

schreiben kann.

Andererseits folgt aus (1) sofort

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} + 2\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt} = -2\,\varphi(r)\,\frac{1}{r}\left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right\} = -2\,\varphi(r)\,\frac{dr}{dt},$$

weil $r^2 = x^2 + y^2$, das heißt $r\,dr = x\,dx + y\,dy$ ist. Nachfolgende Integration liefert dann

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -2\int\varphi(r)\,dr + 2\,h, \tag{3}$$

in welcher Form schon BERNOULLI das Energieintegral hat. Schreiben wir modern kürzer die Zentralkraft als Gradient einer Potentialfunktion U, welchen Begriff BERNOULLI natürlich noch nicht besitzt,

$$\varphi(r) = -\frac{\partial U}{\partial r},$$

so folgt aus (3)

$$\frac{v^2}{2} = U + h \tag{4}$$

oder mit (2) für die Gleichung (4)

$$\frac{c^2}{p^2} = 2(U + h).$$

Hieraus findet man durch Differentiation zuerst

$$-\frac{c^2}{p^3}\,dp = dU,$$

denn p ist wie U, weil v wegen (3) nur eine Funktion von r ist, wegen (2) ebenfalls nur eine Funktion von r. Damit haben wir für die Zentralkraft den Ausdruck:

$$\varphi(r) = -\frac{dU}{dr} = \frac{c^2}{p^3}\cdot\frac{dp}{dr}.$$

Es ist aber $\frac{dp}{dr} = \frac{r}{\varrho}$, wie schon HUYGHENS 1673 synthetisch in seinem *Horologium oscillatorium* gefunden hatte und wie analytisch leicht zu bestätigen ist. Die Zentralkraft ist also geometrisch durch den Ausdruck

$$\varphi(r) = \frac{c^2 r}{p^3\varrho} \tag{5}$$

gegeben, den man auch

$$\varphi(r) = \frac{v^2}{\varrho}\cdot\frac{r}{p}$$

schreiben kann[1]). Nun ist aber

$$\sec(r,p) = r:p = \frac{ds}{r\,d\vartheta},\ \text{womit}\ \frac{1}{p^2} = \frac{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}{r^4 d\vartheta^2} = \frac{1}{r^2} + \left(\frac{dr}{r^2 d\vartheta}\right)^2$$

[1]) Dieser Ausdruck für die Zentralkraft spielte bei den älteren Analytikern, die ihn geometrisch herleiteten, eine große Rolle. MOIVRE hat zuerst die Form (5) (Brief vom 27. Juli 1705 an JOH. I BERNOULLI) und wollte die Priorität beanspruchen, bis ihm NEWTON zeigte, daß dieser Ausdruck implizit in Sect. II des Lib. I der *Principia* steckt.

und nach der Substitution

$$\frac{1}{r} = u, \quad \frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2$$

folgt. Geht man auf den Ausdruck (4) zurück, so folgt mit $vp = c$ (2)

$$v^2 = 2(U+h) = c^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2\right). \tag{6}$$

Hieraus findet man durch Auflösen nach ϑ die Bahn, wenn das Kraftgesetz $\varphi(r) = \varphi\left(\frac{1}{u}\right)$ gegeben ist,

$$\varphi(r) = \vartheta(u) = \varphi\left(\frac{1}{u}\right) = \int \frac{c\,du}{\sqrt{2(U+h) - u^2c^2}}; \tag{6a}$$

andererseits braucht man (6) nur nach ϑ zu differenzieren,

$$c^2 u \frac{du}{d\vartheta} + \frac{du}{d\vartheta} \cdot \frac{d^2u}{d\vartheta^2} c^2 = \frac{dU}{d\vartheta} = -\varphi(r)\frac{dr}{d\vartheta} = \varphi(r)\frac{du}{u^2 d\vartheta},$$

um bei vorgegebener Bahnkurve $\vartheta(r) = \vartheta\left(\frac{1}{u}\right)$ das Kraftgesetz zu finden:

$$\varphi(r) = \varphi\left(\frac{1}{u}\right) = u^2c^2\left(u + \frac{d^2u}{d\vartheta^2}\right). \tag{6b}$$

Man erkennt unschwer, daß das NEWTONsche Problem, aus $\vartheta(r)$ das Kraftgesetz zu finden, einfacher ist als das «inverse Zentralkraftproblem», aus dem Kraftgesetz die Bahn herzuleiten. Denn das inverse Problem (6a) erfordert Integration, während NEWTONS Aufgabe (6b) nur auf Differentiationen führt.

Da nach KEPLERS Gesetzen die Planeten Kegelschnitte beschreiben, deren Polargleichung in der Form $\frac{1}{u} = r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$ gegeben ist, so reduziert sich wegen $u + \frac{d^2u}{d\vartheta^2} = \frac{1}{a(1-e^2)}$ die ganze Ableitung des NEWTONschen Gravitationsgesetzes nur noch auf die eine Zeile

$$\varphi(r) = \frac{c^2}{r^2} \cdot \frac{1}{a(1-e^2)} = \frac{k}{r^2}.$$

Daß dagegen im inversen Problem das Integral für den NEWTONschen Fall $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$, also $U = -\frac{1}{r} = -u$

$$\vartheta\left(\frac{1}{u}\right) = \int \frac{c\,du}{\sqrt{2(h-u) - u^2c^2}}$$

einen Kegelschnitt darstellt, ist nicht selbstverständlich, sondern wurde von BERNOULLI durch direkte Integration hergeleitet. In der Tat führt dieses Integral ja auf die zyklometrischen Funktionen von $u = \frac{1}{r}$, womit sich r umgekehrt als trigonometrische Funktion von ϑ ergibt, was man dann auf die Form der Polargleichung der Kegelschnitte bringen kann. Die Art derselben ist dann in bekannter Weise von der Konstanten h des Energieintegrals abhängig.

Setzt man das Kraftgesetz $\varphi(r) = \frac{k}{r^3} = ku^3$ voraus, so folgt nach (6) die Differentialgleichung $\varphi(r) = ku^3 = c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\vartheta^2}\right)$ oder

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u\left(1 - \frac{k}{c^2}\right) = 0,$$

welche Gleichung für $k = 2c^2$ wegen $\frac{d^2u}{d\vartheta^2} = u$ das partikuläre Integral $u = e^{\pm\vartheta}$ und für $k = c^2$ das partikuläre Integral $u = \frac{1}{r} = k\vartheta$ hat. Das erste entspricht der logarithmischen und das zweite der – übrigens von VARIGNON so benannten[1]) – hyperbolischen Spirale.

BERNOULLIS Forderung nach einem Beweis der NEWTONschen Umkehrung, daß ein Kraftgesetz $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$ *nur* Kegelschnitte liefere, war also durchaus gerechtfertigt. Der Historiker muß jedoch verzeichnen, daß der ehemalige BERNOULLI-Schüler, der seinerzeit sehr berühmte Basler Mathematiker JAKOB HERMANN, gleichzeitig mit BERNOULLI diesen Beweis zu führen versuchte[2]), dabei aber von dem formal gewandteren JOHANN BERNOULLI überflügelt wurde. Nachdem nun VARIGNON 1700 auch für das Zentralkraftgesetz $\varphi(r) = r$ Kegelschnittbahnen[3]) gefunden hatte, erhob sich die Frage, ob $\varphi(r) = r$, $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$ die einzigen Funktionen sind, die unter allen Anfangsbedingungen auf Kegelschnitte führen, was dann erst 1873 BERTRAND nachweisen konnte. JAKOB HERMANN[4]) warf in seiner Phoronomia schon die Frage auf, ob andere Zentralkraftgesetze auf andere algebraische Kurven führen; KOENIGS konnte 1889 beweisen, daß $\varphi(r) = r$, $\varphi(r) = \frac{1}{r^2}$ die einzigen Funktionen sind, die unter allen Anfangsbedingungen algebraische Bahnkurven liefern. Die Kegelschnitte sind also überhaupt (im allgemeinen) die einzigen, die unter dem Einfluß einer Zentralkraft als algebraische Kurven beschrieben werden.

3. Für die Bewegung im resistenten Medium mit dem Widerstandsgesetz $R = \pm a v^n$ leitet BERNOULLI leicht die Differentialgleichung her. Für die Tangentialkomponente der gesamten auf den Massenpunkt in P wirkenden Kraft ergibt sich dann der Ausdruck $\varphi \cos\psi \pm a v^n = K$. Mit Hilfe der Normalkomponente $\varphi \sin\psi = \frac{v^2}{\varrho}$ der Kraft erhält man, da $\operatorname{ctg}\psi = \frac{dr}{r\,d\vartheta}$ ist:

$$-dv = K\,dt = \left(\frac{v^2}{\varrho} \cdot \frac{dr}{r\,d\vartheta} \pm a v^n\right) dt.$$

Also ist

$$\left(\frac{v^2}{\varrho} \cdot \frac{dr}{r\,d\vartheta} \pm a v^n\right) \frac{ds}{v} + dv = 0,$$

oder

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dr\,ds}{r\,d\vartheta} \pm a v^{n-2}\,ds + \frac{dv}{v} = 0,$$

womit BERNOULLI seine Differentialgleichung hergeleitet hat. Sie gibt ihm Gelegenheit, seine 1694 publizierte Methode[5]) zur Lösung von linearen Differentialgleichungen

---

[1]) LORIA (Spezielle Kurven, Bd. II, p. 55) nennt BERNOULLI den Entdecker und Bezeichner dieser Spirale; es kommt aber mindestens VARIGNON (siehe Fußnote 2, p. 101), wenn nicht sogar dem von VARIGNON zitierten PÈRE NICOLAS die Priorität zu.

[2]) Extrait d'une lettre de M. HERMAN à M. BERNOULLI, datée de Padoue, le 12 juillet 1710. Mém. Acad. Paris, 1710, pp. 519–521.

[3]) Siehe Fußnote 2, p. 101. Zentralkraft im *Mittelpunkt*, nicht im Brennpunkt einer Ellipse.

[4]) Phoronomia (Amsterdam 1716), Lib. I, sect. II, prop. XXV, pp. 74–81.

[5]) JOH. BERNOULLI *de conoidibus et sphaeroidibus quaedam. Solutio analytica Aequationis in Actis A. 1695, pag.* 553 *proposita. Notatiunculae in Responsionem a Nob. D. T. nupero Novembri editam etc.* A. E. 1697 (März), pp. 113–118 = Op. I, pp. 174–79.

vom «BERNOULLIschen Typ» zu demonstrieren. Es sind nämlich bei vorgegebener Bahnkurve $\vartheta = \vartheta(r)$ und $ds = \sqrt{1 + r\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)}$ sowie $\varrho = \frac{ds}{d\vartheta}$ Funktionen von r. Setzt man deshalb $a\,ds = B(r)dr$ und $\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{ds}{r\,d\vartheta} = A(r)$, so hat man die BERNOULLIsche Differentialgleichung in der modernen Form

$$\frac{dv}{v} + A(r)\,dr \pm v^{n-2}\,B(r)\,dr = 0. \tag{7}$$

Mit dem Ansatz von 1694, die gesuchte Funktion v als Produkt zweier neuer unbekannter Funktionen $v = M(r) \cdot N(r)$ aufzufassen, erhält man

$$\frac{dM}{M} + \frac{dN}{N} + A(r)\,dr \pm (M \cdot N)^{n-2}\,B(r)\,dr = 0. \tag{7a}$$

Da die Funktionen $M(r), N(r)$ zunächst willkürlich angenommen wurden, kann man einer von ihnen noch die Nebenbedingung

$$\frac{dM}{M} + A(r)\,dr = 0$$

auferlegen, woraus dann $M = e^{-\int A(r)\,dr}$ folgt. Wegen (7a) folgt dann aber für N die Differentialgleichung

$$\frac{dN}{N} = \mp e^{(2-n)\int A(r)\,dr}\,N^{n-2}\,B(r)\,dr$$

oder

$$N^{2-n} = \pm (n-2) \int e^{(2-n)\int A(r)\,dr}\,B(r)\,dr,$$

woraus sich $v = M \cdot N$ dann ohne weiteres bestimmen läßt. Wenn die Bahnkurve gegeben ist, so läßt sich weiter aus $\varphi(r) = \frac{v^2}{\varrho}\,\frac{ds}{r\,d\vartheta}$ die zugehörige Zentralkraft im widerstehenden Mittel bestimmen. Das inverse Problem führt im widerstehenden Mittel, wie das ballistische Problem zeigt, im allgemeinen Falle auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Während aber NEWTON den Wurf nur für das Widerstandsgesetz $R = + a v$ bewältigen konnte, gelang BERNOULLI auch die Lösung für das Gesetz $R = + a v^2$.

BERNOULLI muß sich mit den Zentralkräften im resistenten Medium schon etliche Jahre vor 1711[1]) beschäftigt haben. Die aus der Differentialgleichung (7) folgenden Integralausdrücke für die Zentralkraft φ waren, wenn auch mit Rechenfehlern behaftet, schon 1710 in Italien[2]) von G. VERSAGLIA veröffentlicht worden. Dieser sonst ganz unbekannte Mathematiker hatte fast zwei Jahre (1707—08) als Schüler JOHANNS in dessen Hause zugebracht und dabei sogar Einsicht in die noch unveröffentlichten Papiere nehmen dürfen, da BERNOULLI ihn sogar noch für ein Plagiat zu dumm hielt. Es besteht kein Zweifel, daß VERSAGLIAS Formeln geistiges Eigentum BERNOULLIS sind, das dieser also spätestens 1708 schon besaß.

4. NEWTON hatte das zweite Buch seiner Prinzipien fast ausschließlich der Bewegung im widerstehenden Mittel gewidmet. Ohne von dem Infinitesimalkalkül

[1]) Extrait d'une lettre de M. BERNOULLI, écrite de Basle, le 10 janvier 1711. Touchant la maniere de trouver les forces centrales dans des milieux, resistans en raison composée de leurs densités et des puissances quelconques des vitesses du mobile. Mém. Acad. Paris, 1711, pp. 47—53 = Op. I, pp. 502—508.

[2]) Modo di trovare l'orbite che descrivono i Pianeti qualunque siasi la loro forza chiamata Centrale con una regola per la detta forza dentro un mezzo di variante densità, che resista al mobile. Del Sig. GIUSEPPE VERZAGLIA, da Cesena. Gior. lett. Italia, tom. 3 (1710), pp. 495—510.

Gebrauch zu machen, leitete er mit geometrischen Hilfsvorstellungen bei vorgegebenen Bahnkurven die wirkenden Zentralkraftgesetze her. JOHANN BERNOULLI bewaffnet mit dem allgemeinen analytischen Ansatz (7), konnte ihm nun gerade hier eine Reihe von Versehen nachweisen. So hatte NEWTON (Lib. II, sect. III, prop. XVI, th. XII) behauptet, daß beim Widerstandsgesetz $R = \pm \delta v^2$ (δ = Dichte) bei der Bewegung in einer logarithmischen Spirale das Zentralkraftgesetz algebraisch, nämlich $\varphi(r) = \frac{1}{r^{n+1}}$ ist, wenn nur die Dichtefunktion zu $\delta = \frac{1}{r^n}$ angenommen wird. Bei der logarithmischen Spirale ist aber nun bekanntlich $ds = \varrho\, d\vartheta = h\, dr$, und so findet man für die Differentialgleichung (7)

$$\left(\frac{v^2}{\varrho}\frac{dr}{r\,d\vartheta} \pm v^2\delta\right) ds + v\,dv = \frac{v^2}{r}\,dr \pm v^2 r^{-n}\,ds + v\,dv = 0,$$

oder

$$\pm h v^2 r^{1-n}\,dr + v^2 dr + r v\,dv = 0,$$

woraus dann

$$\frac{dv}{v} = \mp h r^{-n}\,dr - \frac{dr}{r}$$

folgt, was nach Integration

$$v = r^{-1} e^{\frac{\mp h}{1-n} r^{1-n}} \tag{8}$$

ergibt. Da bei der log. Spirale hier $\varphi(r) = \frac{v^2}{r}$ ist, so erkennt man, daß nur im Falle $n = 1$ das Kraftgesetz algebraisch wird[1]). In der zweiten Auflage der Prinzipien (1713) hat NEWTON dieses Versehen nicht verbessert[2]).

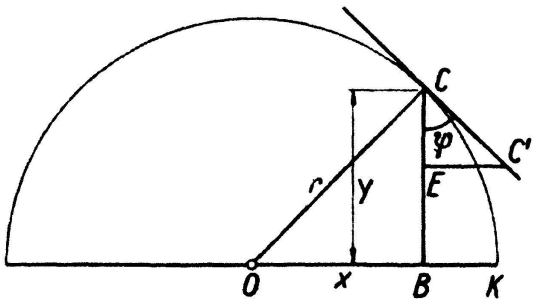

Fig. 2

Schlimmer war NEWTONS Fehlbehauptung, es würde sich die Schwere g zum Widerstand R wie $g : |R| = OK : OB$ verhalten, wenn ein Körper in einem wider-

[1]) Für $n \to 1$ wird der Ausdruck zwar zunächst singulär. Beachtet man jedoch, daß es sich um eine reine Verhältnisgleichung handelt, so kann man den Ausdruck (8) mit $e^{\frac{\pm h}{1-n} a^{1-n}}$ = const. multipizieren. (Brief von BERNOULLI an VARIGNON vom 17. November 1711). Für $n \to 1$ erhält man dann wegen $\lim\limits_{n \to 1} \frac{a^{1-n} - r^{1-n}}{1-n} = \ln \frac{a}{r}$ das algebraische Kraftgesetz $\varphi(r) = c\, r^{-3 \pm 2h}$.

[2]) BERNOULLI kritisiert auch die Prop. XV, p. 284. Die Zentralkraft braucht nicht nur reziprok quadratisch, sondern kann allgemein eine Potenz $\varphi = r^{-m}$ sein, wenn nur $\delta = \frac{3-m}{\mp 2b}$ ist, damit die Bahnkurve im widerstehenden Mittel eine logarithmische Spirale wird. Für $m = 3$ oder $\delta = 0$ erhält man dann das bekannte Resultat im Vakuum. Auch auf diese Kritik ging NEWTON nicht ein.

stehenden Mittel unter dem Einfluß der Schwere einen Halbkreis beschreibt[1]). Die in C wirkende Tangentialkraft ist $g \cos \psi = g \frac{dy}{ds}$. Demnach folgt für das Impulsdifferential

$$g\,dy \pm R\,ds = -v\,dv,$$

wobei $$\cos \psi = dy : ds = EC : CC' = OB : OC = OB : OK$$

und $BC = y$ gesetzt ist. Nun liefert der allgemeine Ausdruck für die Tangentialkomponente der Zentralkraft $g \cos \psi = \frac{v^2}{\varrho} \operatorname{ctg} \psi$ oder $v^2 = g \sin \psi \cdot r$, woraus wegen der ähnlichen Dreiecke OBC und CEC' schließlich $v^2 = g \frac{BC}{OC} r$ folgt. Dann aber ist $v^2 = gBC$, $vdv = \frac{1}{2} g\,dy$. Setzt man diesen Wert in die obige Gleichung für vdv ein, so folgt die richtige Relation $g : |R| = 2OK : 3OB$ statt der NEWTONschen. Dieser Irrtum um den Faktor 2/3 rührte nun fatalerweise davon her, daß NEWTON, wie ihm NIKOLAUS I BERNOULLI nachwies[2]), in Anwendung seiner Fluxionsrechnung bei der Bestimmung von $dBC = d\sqrt{r^2 - x^2}$ durch Reihenentwicklung die Reihenglieder als die sukzessiven höheren Ableitungen betrachtete und damit einen Koeffizientenfehler beging. Mit dem Hinweis auf diesen Fehler, der von den Leibnizianern geradezu als ein Beweis dafür ausgeschlachtet wurde, daß NEWTON die Infinitesimalrechnung gar nicht verstanden habe, wurde BERNOULLI 1713 in den berühmten Prioritätsstreit[3]) hineingezogen, nachdem er sich vorher nicht gerade bei NEWTON beliebt gemacht hatte, als er ihm einiges in den Prinzipien am Zeuge flickte. Denn sehr viel mehr als ein billiger Triumph, wenn «quandoque Homerus dormitat», waren BERNOULLIS Kritiken eigentlich nicht.

Immerhin war es ihm vergönnt, einmal den NEWTONschen Genius wirklich zu überflügeln, als er das oben erwähnte ballistische Problem für das Widerstandsgesetz $R = \pm a v^2$ löste und für den allgemeinen Fall die Differentialgleichungen aufstellte, womit er der Vater der modernen Ballistik wurde. In der Meinung, daß eine Aufgabe, welche die Kräfte NEWTONS übersteigt, auch für dessen Gegner zu schwer sei, hatten die NEWTONianer 1717 das ballistische Problem als Aufgabe gestellt. In den Worten[4]), mit denen der schottische Kämpe und «Kettenhund NEWTONS» KEILL den Wettstreit eröffnete, mag ein Körnchen Wahrheit stecken, wenn man die vorwiegend formal-mathematische Begabung JOHANN BERNOULLIS in böswilliger Verzerrung charakterisieren will:

---

[1]) *Principia*, Lib. II, Sect. II, Prop. X, Prob. II, p. 265. In der zweiten Auflage, p. 236, verbessert (vgl. Wolfers-Ausgabe, p. 256).

[2]) Addition de M. (NICOLAS) BERNOULLI, neveu de l'Auteur de ce memoire-cy. Annex zur Arbeit[1]).

[3]) LEIBNIZ veröffentlichte als Antwort auf das *Commercium epistolicum* der Royal Society 1712 ohne Wissen BERNOULLIS durch CHR. WOLFF am 29. Juli 1713 ein Flugblatt, in welchem ein «*Judicium primarii Mathematici*» abgedruckt wurde. Dieses war nichts anderes als ein Briefexzerpt BERNOULLIS an LEIBNIZ vom 7. Juni 1713, in welchem BERNOULLI das Versehen NEWTONS um den Faktor 2/3 mit scharfen Worten, wie Nichtverstehen des Infinitesimalkalküls etc. geißelt. Diesen Brief, der immerhin ohne Autorennennung von LEIBNIZ publiziert wurde, hat NEWTON BERNOULLI nie verziehen, obwohl sich später MOIVRE und VARIGNON sehr um eine Versöhnung bemühten, die schließlich nur zu einer Höftlichkeitsverständigung zwischen NEWTON und BERNOULLI führte.

[4]) Diese deutsche Übersetzung eines Exzerpts aus einem Briefe KEILLS an TAYLOR, den dieser an MONTMORT (18. Juli 1717) richtete, der ihn seinerseits an BERNOULLI weiterbeförderte (26. Januar 1718) wurde von NIKOLAUS I eigens für seinen Oheim JOHANN I verfaßt.

«Ich kann nicht läugnen, daß der Dr. BERNOULLI in dem Calculo sehr wohl versiert seye, aber Er hat, soviel ich weiß, seine Wissenschaft niemahlen auff problemata, die einigen Nutzen haben, appliciert. Es scheinet, Er habe einen sonderbaren zu nichtswerthen Dingen geschickten Geist. Dem eintzigen Theil von des NEWTON Philosophie, der von keiner Wichtigkeit ist, und nicht zeiget, wie die Phaenomena naturae zu explicieren, hat er fleissig gestudirt und examiniert. Wann er wolle seine wissenschaft auff etwas nützliches applicieren, so wünschte ich, daß Er dieses problema solvirte. Dr Leibnitz hat es tentiert, aber Er hat wüst gefehlt und konnte es nicht solviren etc.»

Aber der blinde Eifer der NEWTONIANER übersah, daß der Fortschritt der mathematischen Wissenschaften unzertrennlich mit der Entwicklung eines zweckmäßigen Kalküls verknüpft ist; und während die englische Mathematik im 18. Jahrhundert in ihrer Versteifung auf NEWTONS Fluxionsmethode in Stagnation verharrte, arbeitete JOHANN BERNOULLI als einer der gefeiertsten Lehrer des Jahrhunderts an der Ausgestaltung derjenigen Form der neuen Analysis, welche die von NEWTON begründete theoretische Physik erst eigentlich fruchtbar machte. J. O. FLECKENSTEIN, Basel

---

Bemerkungen zur normalen dimetrischen Axonometrie

Im folgenden wird eine einfache Konstruktion der Achsen x', y', z' und eine ebenso einfache Konstruktion der Achsen für jene Ellipsen gezeigt, welche (vergrößerte) Bilder jener Kreise sind, die in der xz- oder xy-Ebene, oder parallel dazu liegen.

1. Sind α, β, γ die Winkel der Achsen des räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems mit der Bildebene ABC (Fig. 1), dann bestehen bei dem meist verwendeten dimetrischen System die Beziehungen

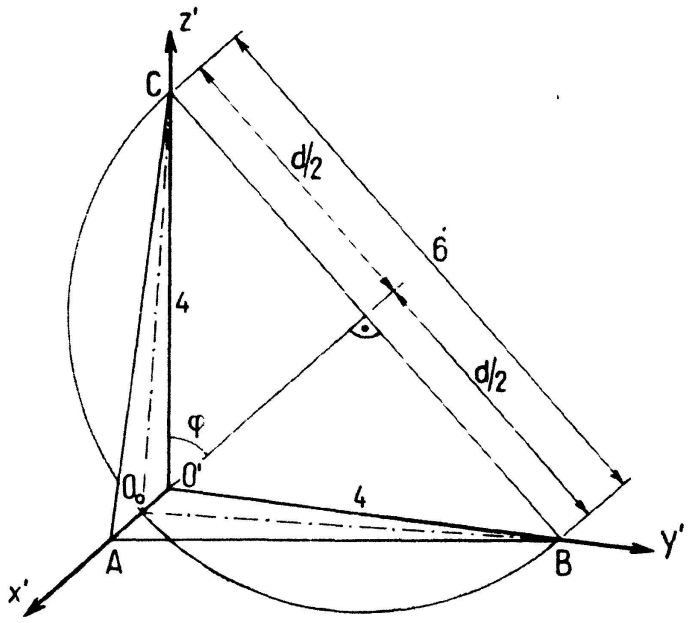

Fig. 1

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1:2:2 \quad \text{oder} \quad \cos^2\alpha : \cos^2\beta : \cos^2\gamma = 1:4:4$$

und allgemein $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2\,.$$