Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 5

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Damit erhält man für die Krümmungsradien die bekannten Werte:

$$\varrho_A = \frac{v_A^2}{g_A} = w^2 \frac{b^2}{(a-e)^2} \cdot \frac{(a-e)^2}{w^2 \cdot a}, \qquad \underline{\varrho_A = \frac{b^2}{a}},$$

$$\varrho_B = \frac{v_B^2}{g_B} = w^2 \frac{a^2}{w^2 \cdot b}, \qquad \underline{\varrho_B = \frac{a^2}{b}},$$

$$\varrho_C = \frac{v_C^2}{g_C} = w^2 \frac{b^2}{(a+e)^2} \cdot \frac{(a+e)^2}{w^2 \cdot a}, \qquad \underline{\varrho_C = \frac{b^2}{a}}.$$

W. HARDMEIER, Zürich

Kleine Mitteilungen

I. *Beitrag zur Behandlung der regelmäßigen Vielecke.* Die regelmäßigen Vielecke sprechen uns durch ihre hohe Symmetrie und durch die unerschöpfliche Fülle von Zusammenhängen zwischen ihren Größen so sehr an, daß das Aufsuchen und das anschauliche Aufzeigen einfacher Vergleiche und Verwandlungen ihrer Flächen besonders reizvoll und gewiß geeignet ist, die Freude der Schüler an der Geometrie zu erhöhen.

Die folgenden Sätze und zum Teil sehr leichten Aufgaben sind zusammengestellt als Beispiele für einfach definierte Flächen, die in einfachen Verhältnissen zueinander stehen. Sie zeigen aber ihre Erlebniswirkung erst, wenn man die entsprechenden Figuren betrachtet.

(Bezeichnungen für das regelmäßige n-Eck: r oder r_n = Umkreisradius; ϱ_n = Inkreisradius; s_n = Seite; F_n = Fläche; d_i = Diagonale, welche i Ecken überspringt; $d_{n(i)}$ = Diagonale im n-Eck, welche i Ecken überspringt; m_5 = Verbindungsstrecke zwischen den Mitten zweier nicht benachbarter Fünfeckseiten. Buchstaben mit Strichen rechts oben gehören zu umschriebenen Vielecken.)

Sätze: 1. In jedem regelmäßigen n-Eck ist das Rechteck aus dem Umkreisradius und der kürzesten Diagonale gleich vier Zentraldreiecken:

$$r d_1 = 4 \cdot \frac{F_n}{n}.$$

2. Macht man die Seitenmitten eines regelmäßigen n-Ecks zu Ecken eines regelmäßigen $2n$-Ecks, so ist das Rechteck aus dem Inkreisradius und der kürzesten Diagonale des ersten gleich acht Zentraldreiecken des zweiten:

$$\varrho'_n \cdot d'_{n(1)} = 8 \cdot \frac{F_{2n}}{2n}.$$

3. Ein regelmäßiges Vieleck mit $4p$ Ecken hat dieselbe Fläche wie p Rechtecke aus einer Seite und der zweitgrößten Diagonale:

$$p s d_{2p-2} = F_{4p}.$$

4. Wird einem regelmäßigen Fünfeck ein anderes umbeschrieben, so ist die Fläche des äußern gleich dem vierfachen Minor der stetig geteilten Fläche des inneren Fünfecks:

$$F'_5 = \text{Minor von } 4\,F_5\,.$$

Aufgaben: 1. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck (s_3), das Rechteck (s_3, ϱ_3) und das gleichseitige Dreieck, dessen Seite gleich r_3 ist. Zeige, daß sich die drei Flächen verhalten wie 3:2:1.

2. Zeige, daß das Rechteck (s_3, ϱ_3) das geometrische Mittel ist aus dem gleichseitigen Dreieck (s_3) und demjenigen, dessen Höhe gleich r_3 ist.

3. Rechteck = Sechseck:

$$(d_{6(1)} + \varrho_6)\cdot s_6 = F_6\,.$$

4. Beweise Satz 1 allgemein und prüfe ihn für $n = 3$ (wobei $d_1 = s$ zu setzen ist), $n = 4$, 5, 6, 8 (ergibt ein Rechteck in Normalformat), $n = 10$, 12 ($F_{12} = 3\,r^2$).

5. Zeige für $n = 12$:

$$\frac{2}{3}\cdot F_{12} = d_2^2\,.$$

6. Beweise Satz 2 allgemein und prüfe ihn für $n = 3$, 4, 5, 6.

7. Das Quadrat aus der zweitkürzesten Diagonale eines regelmäßigen Zwölfecks ist gleich dem Rechteck aus der kürzesten Diagonale und dem Inkreisradius des ihm umbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks ($r_{12} = \varrho'_6$):

$$d^2_{12(2)} = \varrho'_6 \cdot d'_{6(1)}\,.$$

8. Betrachte ein regelmäßiges Sechseck (s_6), das Rechteck ($d_{6(1)}$, s_6) und das regelmäßige Sechseck mit s_6 als kürzester Diagonale. Zeige, daß sich die drei Flächen wie 3:2:1 verhalten.

9. Verbinde sechs Ecken eines regelmäßigen Zwölfecks zu einem regelmäßigen Sechseck, so ist:

$$\varrho_6\, d_{6(1)} = \varrho_6\, d'_{12(3)} = \frac{1}{2} F'_{12}\,.$$

10. Numeriere die Ecken eines regelmäßigen Zwölfecks fortlaufend. Vervollständige den Streckenzug 1, 3, 7, 9 zu einem Quadrat, so hat dieses die gleiche Fläche wie das Zwölfeck.

11. Beweise Satz 3 allgemein und prüfe ihn nach für $n = 8$, 12.

12. Beweise Satz 4.

13. Ein Zentraldreieck des regelmäßigen Fünfecks ist der Minor des Rechtecks aus m_5 und ϱ_5; $\frac{F_5}{5}$ = Minor von $m_5\,\varrho_5$. (Da das Dreieck auch die Höhe ϱ_5 hat, läßt es sich in das Rechteck hineinzeichnen.)

14. Ergänzt man ein regelmäßiges Fünfeck durch 5 weitere Punkte zu einem regelmäßigen Zehneck, so ist das Rechteck aus der kürzesten und der zweitkürzesten Diagonale des Zehnecks gleich $^4/_5$ des Fünfecks.

$$d_{10(1)} \cdot d_{10(2)} = \frac{4}{5} F_5\,.$$

15. Verwandle mit Hilfe der genannten Beziehungen ein regelmäßiges n-Eck in ein Quadrat ($n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$).

16. Verwandle ein Quadrat in ein regelmäßiges Achteck (Zwölfeck).

R. STÖSSEL, Rorschach.

II. *Zur Kettenbruchentwicklung von e* Herr P. FINSLER machte kürzlich auf das folgende Problem aufmerksam (siehe El. Math., Bd. I, Heft *3*, Seite 54): «Nach EULER hat die Zahl e die Kettenbruchentwicklung (2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, ...). Bedeutet b_n den Nenner des n-ten Näherungsbruches (also $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 3$, $b_4 = 4$, $b_5 = 7$, $b_6 = 32$ usw.), so ist für kleine Werte von m stets b_{3m} durch m teilbar. Gilt dies allgemein für beliebige Werte von m?»

Antwort: Die Zahlen b_{3m}, b_{3m-2} und b_{3m-6} sind durch m teilbar, und b_{3m-1} hat den Rest $(-1)^m \pmod{m}$.

Beweis: Der Beweis beruht darauf, daß die Reste der aufeinanderfolgenden $x_k = b_{3k-1} \pmod{m}$ bei ungeradem m symmetrisch zum Glied $x_{(m-1)/2}$ sind, daher m-gliedrige Zyklen (abgesehen vom Vorzeichen) bilden, welch letztere Eigenschaft sich auf den doppelten Modul übertragen läßt, woraus die Gültigkeit für alle m erschlossen werden kann.

1. Die Teilfolge $x_m = b_{3m-1}$ besitzt die Rekursionsformel

$$x_{m+1} = (4m+2) \cdot x_m + x_{m-1},$$

und die Glieder b_{3m-2} und b_{3m} sind

$$b_{3m-2} = \frac{x_m + x_{m-1}}{2}, \quad b_{3m} = \frac{x_{m+1} - x_m}{2}.$$

Aus dem Algorithmus der Kettenbruchentwicklung von $e = (2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots)$ ergibt sich für die Nenner der Näherungsbrüche das folgende System von Beziehungen:

$$\begin{aligned}
b_{3m-4} &= A &&= x_{m-1}, \\
b_{3m-3} &= B &&= \frac{x_m - x_{m-1}}{2}, \\
b_{3m-2} &= 1 \cdot b_{3m-3} + b_{3m-4} = A + B &&= \frac{x_m + x_{m-1}}{2}, \\
b_{3m-1} &= 1 \cdot b_{3m-2} + b_{3m-3} = A + 2B &&= x_m, \\
b_{3m} &= 2m \cdot b_{3m-1} + b_{3m-2} = (2m+1)A + (4m+1)B &&= \frac{x_{m+1} - x_m}{2}, \\
b_{3m+1} &= 1 \cdot b_{3m} + b_{3m-1} = (2m+2)A + (4m+3)B &&= \frac{x_{m+1} + x_m}{2}, \\
b_{3m+2} &= 1 \cdot b_{3m+1} + b_{3m} = (4m+3)A + (8m+4)B &&= x_{m+1} = (4m+2)\,x_m + x_{m-1},
\end{aligned}$$

aus dem die Rekursionsformel und die Werte für b_{3m-2} und b_{3m} folgen.

Wegen $b_{3m}+b_{3m-2}=(2m+1)x_m+x_{m-1}\equiv 2b_{3m-2} \pmod{2m}$ haben b_{3m} und b_{3m-2} gleiche Reste bezüglich $2m$ (analog für $b_{3m-2}-b_{3m-6}$). So genügt es, zu zeigen, daß zum Beispiel

$$x_m+x_{m-1}\equiv 0 \pmod{2m}$$

ist. Darüber hinaus ergibt sich im folgenden, daß

$$x_m\equiv(-1)^m\equiv x_{m+1}\equiv -x_{m-1}\equiv -x_{m-2} \pmod{m}$$

ist, woraus die behaupteten Teilbarkeitseigenschaften leicht folgen. Ebenso gilt:

$$b_{3m+2}\equiv b_{3m+1}\equiv b_{3m-1}\equiv b_{3m-3}\equiv -b_{3m-4}\equiv -b_{3m-5}\equiv -b_{3m-7}\equiv(-1)^m \pmod{m}.$$

2. Es sei m ungerade. Man setzt $r=\dfrac{m-1}{2}$ und hat $x_{r+1}\equiv 0\cdot x_r+x_{r-1} \pmod{2m}$ und durch Induktion

$$x_{r+k}\equiv x_{r-k} \pmod{2m};$$

speziell: $\quad x_{m-1}=x_{2r}\equiv x_0=1, \quad x_m=x_{2r+1}\equiv x_{-1}=-1 \pmod{2m}.$

Also ist für *ungerades* m der Algorithmus zyklisch mit Wechsel der Vorzeichen, d. h. $x_{m+k}\equiv -x_k \pmod{2m}$,

insbesondere: $\quad x_{2m-1}\equiv -1, \qquad x_{2m}\equiv +1 \pmod{2m}.$

3. Gilt auch für ein gerad-gerades m, daß $x_m\equiv 1$, $x_{m-1}\equiv -1 \pmod{m}$ ist, so ist auch $x_m+x_{m-1}\equiv 0 \pmod{2m}$; es ist nämlich *entweder*

$$x_m\equiv 1, \qquad x_{m-1}\equiv -1 \text{ oder } x_m\equiv 1+m, \quad x_{m-1}\equiv -1+m \pmod{2m},$$

oder aber

$$x_m\equiv 1+m, \quad x_{m-1}\equiv -1 \text{ oder } x_m\equiv 1, \qquad x_{m-1}\equiv -1+m \pmod{2m}.$$

Im zweiten Fall zeigt sich durch Rekursion die Unmöglichkeit, wenn man

$$x_{m-2}=x_m-(4m-2)\,x_{m-1}\equiv x_m+2\,x_{m-1}\equiv\left(1+\binom{m}{0}\right)+2\left(-1+\binom{0}{m}\right)=-1+\binom{m}{0}\equiv -x_1+\binom{m}{0}$$

(mod $2m$) usw. beachtet, d. h. es ist

$x_{m-2}\equiv -1+m$, $x_{m-3}\equiv -x_2$, $x_{m-4}\equiv -x_3+m$ usw. bis $1=x_1\equiv -x_{m-2}\equiv 1-m \pmod{2m}$,

oder $\quad x_{m-2}\equiv -1$, $x_{m-3}\equiv -x_2+m$, usw. $1=x_0\equiv -x_{m-1}\equiv 1-m \pmod{2m}$.

Es bleibt der erste Fall mit $x_m+x_{m-1}\equiv 0 \pmod{2m}$.

4. In den möglichen Unterfällen $x_{m-1}\equiv -1+\binom{m}{0}$ und $x_m\equiv 1+\binom{m}{0} \pmod{2m}$ folgt durch Induktion $x_{m+1}\equiv x_1+\binom{m}{0}$, $x_{m+2}\equiv x_2+\binom{m}{0}$, $\ldots$ $x_{2m-1}\equiv x_{m-1}+\binom{m}{0}$, $x_{2m}\equiv x_m+\binom{m}{0}$, also: $x_{2m-1}\equiv -1+\binom{m}{0}+\binom{m}{0}\equiv -1$, ebenso $x_{2m}\equiv +1 \pmod{2m}$, mithin gilt unter der Voraussetzung von 3:

Für *beliebiges* gerades m folgt aus $x_m\equiv -x_{m-1}\equiv +1 \pmod{m}$:

$$x_{2m}\equiv -x_{2m-1}\equiv +1 \pmod{2m}.$$

5. Da nun für ungerades m und für $m=2$ obige Beziehungen gelten, kann nach 3. und 4. durch Induktion auf die Gültigkeit für alle m geschlossen werden; wir haben somit allgemein:

$$x_{m-1}\equiv -(-1)^m, \quad x_m\equiv(-1)^m \pmod{m}$$

und

$$x_m+x_{m-1}\equiv 0 \pmod{2m}.$$

GEORG UNGER