Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 5

Artikel: Equations fonctionnelles et mathématiques supérieures élémentaires
Autor: Rossier, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1207

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Der Faltungssatz besagt, daß in jedem Kreisgebiet K, dem sämtliche Wurzeln von $f(x)$ angehören, wenigstens eine Wurzel von $g(x)$ liegt. Wenn K endlich ist und den Nullpunkt nicht im Innern enthält, wie es die Voraussetzung des Satzes verlangt, so muß $-\frac{a_k}{a_{k-1}}$, als einzige Wurzel von $g(x)$, in K liegen. Da diese Überlegung für jedes k $(1 \leqq k \leqq n)$ gilt, ist der Satz bewiesen.

EDUARD BATSCHELET, Basel.

Equations fonctionnelles et mathématiques supérieures élémentaires

1. Si, en général, le problème des équations fonctionnelles présente des difficultés considérables, certains cas simples constituent des problèmes intéressants qui, par les connaissances requises pour leur solution, peuvent être considérés comme appartenant aux éléments des mathématiques supérieures. Explicitement ou implicitement, certaines équations fonctionnelles sont appliquées dans les cours de physique.

2. L'équation $\underline{f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2)}$.

Cette équation est évidemment satisfaite par une fonction linéaire homogène quelconque. Un coup d'œil sur un graphique suffit à le montrer. Dans les applications, on a besoin de la réciproque de cette propriété: toute fonction satisfaisant à la relation proposée est linéaire et homogène. Puisque nous ne considérons que les éléments, nous supposons dérivables les fonctions que nous considérons.

La démonstration de la réciproque ci-dessus peut être conduite comme suit. Dans l'équation proposée, remplaçons x_2 par une somme x_2+x_3. Il vient

$$f(x_1+x_2+x_3)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3).$$

Généralisant, on trouve, en posant $x_1=x_2=\ldots=x_k$,

$$f(k\,x)=k\,f(x), \tag{1}$$

où k est entier.

Divisons cette équation par k en posant $x'=k\,x$:

$$f\left(\frac{x'}{k}\right)=\frac{1}{k}\,f(x').$$

L'application des deux dernières équations conduit à généraliser l'équation (1) au cas des nombres rationnels. Puisque nous avons admis que la fonction cherchée est continue, un passage à la limite conduit à la conclusion que l'équation (1) est valable quel que soit le multiplicateur k, rationnel ou irrationnel.

Dérivons l'équation (1) et divisons par k:

$$f'(k\,x)=f'(x), \text{ ou, par un changement de notation,}$$

$$f'(x)=f'(1)=\text{constante}.$$

La dérivée de la fonction cherchée est constante; la fonction est linéaire. Appli-

quons l'équation proposée au cas $x_2=0$; on trouve

$$f(x_1)=f(x_1)+f(0) \text{ et } f(0)=0.$$

La fonction cherchée est donc bien linéaire et homogène.

L'équation fonctionnelle proposée est employée en physique, par exemple dans les problèmes suivants. L'allongement élastique ou thermique de l'ensemble constitué par deux barres adjacentes, placées dans le prolongement l'une de l'autre, est la somme des allongements de chacune d'elles. La résistance électrique de deux conducteurs en série est la somme de leurs résistances. Donc, l'allongement d'une barre, la résistance d'un fil sont proportionnels à leurs longueurs.

3. L'équation $f(x_1)+f(x_2)=f(x_1 x_2)$.

Dérivons l'équation donnée successivement par rapport à x_1, puis par rapport à x_2. Il vient

$$f'(x_1)+0=x_2 f'(x_1 x_2), \text{ puis } 0=x_1 x_2 f''(x_1 x_2)+f'(x_1 x_2).$$

Pour alléger les notations, posons $x_1 x_2=x$. Il vient

$$\frac{f''(x)}{f'(x)}=-\frac{1}{x}.$$

Le premier membre est la dérivée logarithmique de $f'(x)$ et le second, celle de $\frac{1}{x}$. On a donc, en appelant A une constante d'intégration,

$$f'(x)=\frac{A}{x}.$$

Une nouvelle intégration donne

$$f(x)=A \log x+B.$$

Dans l'équation proposée, faisons $x_2=1$. On trouve $f(1)=0$, donc $B=0$.

La fonction logarithme est la seule fonction élémentaire qui satisfasse à l'équation proposée.

Cette équation apparaît en physique, à propos de la théorie cinétique des gaz; elle permet de montrer que l'entropie d'un gaz et le logarithme de la probabilité de son état varient proportionnellement.

4. L'équation $f(x_1)\,f(x_2)=f(x_1+x_2)$.

En inversant les fonctions, ce problème peut être ramené au précédent. Soient en effet deux fonctions inverses

$$y=f(x) \text{ et } x=g(y).$$

On a $$g(f(x))=x \text{ et } f(g(y))=y.$$

L'équation proposée est

$$y_1 y_2=f(x_1+x_2).$$

L'opération g sur chacun des membres donne

$$g(y_1 y_2)=x_1+x_2=g(y_1)+g(y_2),$$

qui est précisément l'équation étudiée ci-dessus. Puisque la fonction g est un logarithme, f, qui est son inverse, est une exponentielle.

L'équation proposée ici peut d'ailleurs être facilement intégrée, et même plus facilement que la précédente. Pour cela, dérivons-la par rapport à x_1:

$$f'(x_1)\, f(x_2) = f'(x_1 + x_2).$$

Faisons $x_1 = 0$. Il vient, après suppression de l'indice, désormais inutile, et en posant $f'(0) = A$,

$$f'(x) = A f(x).$$

Une intégration donne $f(x) = e^{Ax+B}$.

En faisant $x_2 = 0$ dans l'équation proposée, on trouve $f(0) = 1$ et $B = 0$.

La fonction exponentielle est donc la fonction cherchée.

5. L'équation $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$.

On ramène facilement l'intégration de cette équation au cas étudié sous 3. au moyen de la substitution

$$f(x) = e^{g(x)}.$$

Il vient ainsi

$$e^{g(x_1 x_2)} = e^{g(x_1)}\, e^{g(x_2)} \quad \text{ou}$$

$$g(x_1 x_2) = g(x_1) + g(x_2)$$

Nous avons vu que la fonction g est logarithmique :

$$g(x) = A \log x$$

On a donc

$$f(x) = e^{A \log x} = x^A.$$

6. Ce qui précède montre que les relations fonctionnelles caractéristiques des fonctions linéaire homogène, puissance, exponentielle et logarithmique suffisent à les définir, à condition d'imposer la dérivabilité des fonctions cherchées. On peut se demander s'il n'en est pas de même pour les fonctions trigonométriques. Le procédé de définition par les relations fonctionnelles fondamentales peut aussi être employé, mais, sans présenter de difficulté insurmontable, le problème est notablement plus compliqué que les précédents. En outre, il faut explicitement éliminer certaines solutions singulières pour obtenir les fonctions cherchées. Ces réserves faites, nous allons montrer que les relations fonctionnelles caractéristiques du sinus et du cosinus sont capables de définir ces fonctions.

7. L'équation $f(x_1 + x_2) = f(x_1) f(a - x_2) + f(x_2) f(a - x_1)$.

La fonction sinus satisfait à cette équation en posant $2a = \pi$. Proposons-nous de déterminer les fonctions dérivables qui satisfont à cette équation. Pour cela, faisons tout d'abord $x_1 = x_2 = 0$. Il vient

$$f(0) = 2 f(0) f(a).$$

a) Supposons $f(0)$ non nul. L'équation ci-dessus donne $f(a) = 1/2$.

Dans l'équation fonctionnelle proposée, faisons $x_2 = dx$ et ne considérons que les termes des développements de TAYLOR ou de MACLAURIN de degrés 0 et 1 en dx:

$$\begin{aligned} f(x + dx) &= f(x) + dx\, f'(x) \\ &= f(x) f(a - dx) + f(dx) f(a - x) \\ &= f(x)\,[f(a) - dx\, f'(a)] + f(a - x)\,[f(0) + dx f'(0)]. \end{aligned}$$

Comparons les coefficients des termes en dx et indépendants de dx. On obtient les deux équations

$$f(x) = f(x)f(a) + f(0)f(a-x),$$

$$f'(x) = f'(0)f(a-x) - f(x)f'(a).$$

Eliminons $f(a-x)$ et remplaçons $f(a)$ par sa valeur; on trouve

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(0) - 2f(0)f'(a)}{2f(0)} = A.$$

Le second membre est constant. L'intégration donne

$$f(x) = e^{Ax+B}.$$

B est une constante d'intégration.

Ce qui précède revient à supposer que l'équation fonctionnelle proposée n'est valable que pour x_2 infiniment petit. Satisfaire à l'équation générale impose des restrictions au choix de la constante A. Pour le voir, introduisons la fonction exponentielle trouvée dans l'équation proposée. Après quelques transformation, on trouve

$$\frac{e^{A(x_1-x_2)} + e^{A(x_2-x_1)}}{e^{A(x_1+x_2)}} = e^{-Aa-B}.$$

Le second membre est constant. Pour l'éliminer, dérivons par rapport à x_2. Le numérateur du résultat doit être nul. Après quelques transformations, dont deux simplifications, l'une par une exponentielle, l'autre par une somme d'exponentielles, expressions toutes deux non nulles, on trouve

$$A = 0, \text{ et } f(x) = e^B = \text{constante} = \frac{1}{2}.$$

La seule fonction non nulle pour $x = 0$ satisfaisant à l'équation proposée est donc la constante $1/2$.

b) Supposons $f(0) = 0$.

Dans l'équation donnée, faisons $x_2 = 0$. Il vient

$$f(x) = f(x)f(a).$$

Excluant le cas où la fonction est identiquement nulle, on trouve

$$f(a) = 1. \tag{1}$$

Dans l'équation primitive, faisons $x_2 = a$:

$$f(x+a) = f(x)f(0) + f(a)f(a-x), \text{ ou } f(a+x) = f(a-x). \tag{2}$$

Dans cette même équation, faisons encore $x_2 = -x_1$:

$$f(x-x) = f(0) = 0 = f(x)f(a+x) + f(-x)f(a-x).$$

Après simplification par la relation précédente, on trouve

$$f(-x) + f(x) = 0. \tag{3}$$

La fonction cherchée est impaire.

Dans l'équation (2), faisons $x=a$: $f(2a)=f(0)=0$.

On a encore, au moyen de l'équation proposée

$$f(3a)=f(2a+a)=f(a)f(-a)=-1,$$
$$f(4a)=f(2a+2a)=2f(2a)f(-a)=0,$$
$$f(x+4a)=f(x)f(-3a)+f(4a)f(a-x)=f(x).$$

La fonction cherchée est périodique, de période $4a$.

Comme plus haut, développons en série et comparons les coefficients de dx:

$$f(x+dx)=f(x)f(a-dx)+f(dx)f(a-x)=f(x)+dx\,f'(x).$$

Compte tenu de $f(0)=0$ et de $f(a)=1$, il vient

$$f'(x)=-f(x)f'(a)+f'(0)f(a-x). \tag{4}$$

Dans cette équation, faisons $x=a$:

$$f'(a)=-f(a)f'(a)+f'(0)f(0).$$

Tenant compte des valeurs connues de la fonction, on trouve $f'(a)=-f'(a)=0$. L'équation (4) devient

$$f'(x)=f'(0)f(a-x). \tag{5}$$

Si $f'(0)$ est nul, la dérivée de la fonction est constamment nulle et la fonction est constante. Cela est exclu puisque la fonction prend deux valeurs différentes pour $x=0$ et $x=a$. On peut donc tirer $f(a-x)$ de l'équation différentielle (5) et remplacer dans l'équation donnée.

Il vient ainsi

$$f'(0)f(x_1+x_2)=f(x_1)f'(x_2)+f(x_2)f'(x_1). \tag{6}$$

Dérivons par rapport à x_2 et faisons ensuite $x_2=0$; il vient successivement

$$f'(0)f'(x_1+x_2)=f(x_1)f''(x_2)+f'(x_2)f'(x_1) \text{ et} \tag{7}$$
$$0=f(x_1)f''(0).$$

On a donc $f''(0)=0$. Cela résulte d'ailleurs du fait que la fonction est impaire.

Dérivons encore l'équation (7) par rapport à x_2 et posons ensuite $x_2=0$. On trouve finalement

$$\frac{f''(x)}{f(x)}=\frac{f'''(0)}{f'(0)}=A=\text{constante}.$$

La fonction cherchée satisfait à l'équation différentielle $y''=Ay$; sa dérivée n'est pas nulle pour $x=0$; elle est périodique et impaire et vaut 1 pour $x=a$. On a donc

$$y=\sin\frac{\pi}{2a}x.$$

La seule fonction non constante mais dérivable satisfaisant à l'équation fonctionnelle du sinus est la fonction sinus. Les seules valeurs constantes que puisse prendre la fonction sont 0 et 1/2.

8. L'équation $f(x_1 - x_2) = f(x_1) f(x_2) + f(a - x_1) f(a - x_2)$.

Faisons $x_1 = x_2 = 0$. On a

$$f(0) = f^2(0) + f^2(a). \tag{1}$$

Soit $f(0) = 0$; il vient $f(a) = 0$.

Dans l'équation donnée, si $x_2 = 0$, il vient

$$f(x) = f(x) f(0) = 0.$$

La fonction est identiquement nulle.

Excluons ce cas.

Dans l'équation donnée, faisons $x_1 = a$, $x_2 = 0$.

$$f(a) = 2 f(a) f(0) \quad \text{ou} \quad f(a)\big(1 - 2 f(0)\big) = 0. \tag{2}$$

a) Supposons $f(a)$ non nul. On a alors $f(0) = 1/2$. L'équation (1) montre alors que $f(a)$ n'est pas nul, mais est égal à $\pm 1/2$.

Développons en série $f(x - dx)$ et appliquons l'équation donnée:

$$f(x - dx) = f(x)\,[f(0) + f'(0)\,dx] + f(a - x)\,[f(a) - dx f'(a)] = f(x) - dx\, f'(x)$$

La comparaison des coefficients donne

$$f(x) = f(x) f(0) + f(a - x) f(a) \quad \text{et} \quad f'(x) = f'(a) f(a - x) - f(x) f'(0).$$

Eliminons $f(a - x)$ et tenons compte de la valeur connue de $f(0)$; il vient, après quelques transformations,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(a) - 2 f'(0) f(a)}{2 f(a)} = A = \text{constante}.$$

Le dénominateur n'étant pas nul, cette constante est bien déterminée. Une intégration donne pour $f(x)$ une fonction exponentielle. Elle est de signe constant; donc $f(a) = 1/2$. Cette fonction exponentielle doit avoir même valeur pour deux valeurs différentes de la variable. Elle est donc constante et on a

$$f(x) = \frac{1}{2}.$$

b) Excluons ce cas. L'équation (2) impose alors $f(a) = 0$. L'équation (1) donne, puisque nous avons exclu le cas de la nullité, $f(0) = 1$.

Dans l'équation donnée, faisons $x_1 = 0$:

$$f(-x) = f(x).$$

La fonction cherchée est paire.

Dans l'équation donnée, faisons $x_1 = a + x_2$:

$f(a) = 0 = f(a + x) f(x) + f(x) f(a - x)$, ou, puisque $f(x)$ n'est pas identiquement nul

$$f(a + x) = -f(a - x).$$

Faisons successivement $x = a, 2a, 3a$. Il vient

$$f(2a) = -f(0) = -1,$$

$$f(3a) = -f(-a) = 0 = f(-3a),$$

$$f(4a) = -f(-2a) = -f(2a) = 1.$$

Dans l'équation proposée, faisons $x_2 = 4\,a$:

$$f(x-4\,a) = f(x)\,f(4\,a) + f(a-x)\,f(-3\,a) = f(x).$$

La fonction est périodique, de période $4\,a$.

Développons encore suivant TAYLOR et poussons le développement jusqu'aux termes de degré deux en dx:

$$f(x-dx) = f(x)\left(f(0) + dx\,f'(0) + \frac{dx^2}{2}\,f''(0)\right) + f(a-x)\left(0 - dx\,f'(a) + \frac{dx^2}{2}\,f''(a)\right)$$

La comparaison avec le développement de TAYLOR donne $f'(a)\,f(a-x) = f'(x)$ et $f''(x) = f(x)\,f''(0) + f(a-x)\,f''(a)$. Le terme contenant $f'(0)$ tombe à cause de la parité de la fonction.

Dans la formule relative à la première dérivée, faisons $x = a + z$:

$$f'(a)\,f(-z) = f'(a+z).$$

Le premier membre est pair, donc le second aussi. De part et d'autre de $x = a$, la dérivée est paire. Pour $x = a$, la deuxième dérivée est donc nulle. L'équation relative à la deuxième dérivée est par conséquent

$$f''(x) = f(x)\,f''(0).$$

La fonction cherchée satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants; elle est périodique et paire; elle ne peut donc être que la fonction cosinus.

PAUL ROSSIER, Genève.

Die Ermittlung von Krümmungsradien auf Grund einfacher physikalischer Gesetze

Der Physikunterricht ist zur richtigen Erfassung der Zusammenhänge zwischen den physikalischen Größen weitgehend auf mathematische Vorkenntnisse angewiesen. Umgekehrt kann aber auch durch den Physikunterricht eine Vertiefung des mathematischen Denkens erreicht werden. Für beide Tatsachen lassen sich mannigfache Beispiele angeben.

Die Einführung der an sich anschaulichen Begriffe der Krümmungsradien, der Krümmungskreise und der Evolute von Kurven muß auf der Mittelschulstufe wegen der dabei auftretenden mathematischen Schwierigkeiten meist vernachlässigt werden. Dagegen drängen sich diese Begriffe im Physikunterricht bei der Behandlung krummliniger Bewegungen zwanglos und fast automatisch auf. Wie hier an zwei Beispielen gezeigt werden soll, gelingen die notwendigen Berechnungen dabei ohne besondere Schwierigkeiten, weil in den zur Verwendung gelangenden physikalischen Gesetzen die Integration der notwendigen Differentialgleichungen bereits vorliegt.

Der Grundgedanke des Vorgehens beruht auf allgemein bekannten physikalischen Zusammenhängen und ist daher in keiner Weise neu: Wenn ein in Bewegung begrif-