Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 5

Artikel: Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen
Autor: Batschelet, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1206

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band I Nr. 5 Seiten 73-96 Basel, 15. September 1946

Über die Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen

1. Die Wurzeln algebraischer Gleichungen lassen sich nur in besonders einfachen Fällen durch algebraische Auflösung numerisch berechnen. Nicht allein bei Gleichungen vom fünften oder noch höherem Grade, sondern bereits bei Gleichungen dritten und vierten Grades ist man praktisch auf die Verwendung eines *Näherungsverfahrens* angewiesen. Das *Verfahren von* NEWTON und die *Regula falsi* sind dabei am bekanntesten.

Zur Einleitung einer solchen Rechnung verschafft man sich, meistens durch Probieren, geeignete Näherungswerte für die gesuchten Wurzeln. Weiter wird man darauf bedacht sein, *die Wurzeln zu trennen*. Berücksichtigt man neben den reellen auch die komplexen Wurzeln, so heißt dies: Man sucht in der Zahlenebene voneinander getrennte Gebiete zu finden, in denen je eine Wurzel der gegebenen Gleichung liegt. Indirekt schätzt man damit die Lage der Wurzeln ab, wenn auch zunächst ganz grob.

In der Literatur findet sich eine größere Zahl von Methoden, die der approximativen Bestimmung der Wurzeln dienen. Die meisten von ihnen beziehen sich jedoch bloß auf reelle Wurzeln. Im folgenden werden wir nun einige, zum Teil noch wenig bekannte Hilfsmittel zusammenstellen, die sich vor allem zur Auffindung der *komplexen Wurzeln* eignen (Abschnitte 3, 5–8). In zwei Fällen können die Verfahren auch dazu benützt werden, die Güte der mit einem Näherungsverfahren erreichten Approximation zu prüfen (Abschnitte 4 und 7).

Zur Herleitung der verschiedenen Methoden werden wir uns auf einen grundlegenden Satz von GRACE[1]) stützen. Dieser Satz, der von SZEGÖ auch *Faltungssatz*[2]) genannt wurde, lautet: *Es seien*

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0\,, \tag{1}$$

$$g(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \tag{2}$$

[1]) J. H. GRACE, The zeros of a polynomial, Proc. Cambridge philos. Soc., Bd. 11 (1902), S. 352–357. Eine ausführliche Literaturzusammenstellung zum Satz von GRACE ist zu finden bei J. DIEUDONNÉ, La théorie analytique des polynomes d'une variable, Mém. des Sci. math., Fasc. 93 (1938).

[2]) G. SZEGÖ, Bemerkungen zu einem Satz von J. H. GRACE über die Wurzeln algebraischer Gleichungen, Math. Z., Bd. 13 (1922), S. 28–55. Der Leser mache sich die Behauptung des Satzes an einer Zeichnung klar. Ein Beweis ist in den «Vorlesungen über Algebra» von L. BIEBERBACH enthalten.

zwei algebraische Gleichungen n-ten Grades mit beliebigen reellen oder komplexen Koeffizienten, zwischen denen die folgende Beziehung besteht:

$$a_0 b_n - \frac{1}{\binom{n}{1}} a_1 b_{n-1} + \frac{1}{\binom{n}{2}} a_2 b_{n-2} - + \cdots \pm a_n b_0 = 0. \tag{3}$$

Die Wurzeln von $f(x)$ und von $g(x)$ mögen als Punkte der Zahlenebene aufgefaßt werden. Dann liegt in jedem Kreisgebiet, dem sämtliche n Wurzeln der einen Gleichung angehören, wenigstens eine Wurzel der andern Gleichung.

Unter einem *Kreisgebiet* versteht man dabei entweder das Innere eines Kreises samt Rand, oder das Äußere eines Kreises samt Rand, oder als Grenzfall eine Halbebene samt Rand[1]).

Man nennt zwei Polynome $f(x)$ und $g(x)$, die der Bedingung (3) genügen, auch *apolar*.

2. Um den Faltungssatz für unsere Zwecke anwenden zu können, betrachten wir $f(x)=0$ als die gegebene algebraische Gleichung, deren Wurzeln zu bestimmen sind. Wir bilden dann ein Polynom $g(x)$, das der Bedingung (3) genügt, das also zu $f(x)$ apolar ist, und versuchen gleichzeitig dafür zu sorgen, daß sich die Wurzeln von $g(x)=0$ ohne Mühe berechnen lassen. Um das letzte zu erreichen, wird $g(x)$ im folgenden stets ein *Binom* sein.

Daraufhin können wir ohne weiteres ein Kreisgebiet K_g angeben, in dem sämtliche Wurzeln von $g(x)=0$ liegen. Auf Grund des Faltungssatzes enthält K_g wenigstens eine Wurzel von $f(x)$. Damit ist die Abschätzung für eine oder mehrere Wurzeln von $f(x)$ gefunden.

Im letzten Abschnitt werden wir auch von der anderen Möglichkeit Gebrauch machen, die der Faltungssatz bietet: Es sei K_f ein Kreisgebiet, dem sämtliche Wurzeln von $f(x)$ angehören sollen. Dann muß in K_f wenigstens eine Wurzel von $g(x)$ liegen. Daraus werden wir eine geometrische Beziehung zwischen den Wurzeln und den Koeffizienten von $f(x)$ ableiten.

Zur Erleichterung der Schreibweise einzelner Formeln nehmen wir im folgenden $a_0=1$ an, was wir durch Division der Gleichung $f(x)=0$ durch den Koeffizienten des höchsten Gliedes stets erreichen können. Außerdem denken wir uns von jedem Koeffizienten einen seinem Index entsprechenden Binomialkoeffizienten abgespalten. Die gegebene Gleichung möge demnach in der neuen Gestalt

$$f(x) = x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \tag{1a}$$

geschrieben werden. Die Bedingung (3) des Faltungssatzes geht dabei in

$$b_n - a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} - + \cdots \pm a_n b_0 = 0 \tag{3a}$$

über.

3. Für die erste Anwendung wählen wir das Hilfspolynom (2) so, daß

$$b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 0$$

---

[1]) Man mache sich nebenbei klar, daß die drei genannten Fälle für ein Kreisgebiet auf der RIEMANNschen Kugel nicht unterschieden werden müssen.

ist. (3a) reduziert sich auf

$$a_{n-1} b_1 - a_n b_0 = 0 .$$

Da man die Koeffizienten der Gleichung $g(x) = 0$ noch mit einem willkürlichen Zahlenfaktor multiplizieren darf, können wir

$$b_0 = a_{n-1}, \quad b_1 = a_n, \quad g(x) \equiv a_{n-1} x^n + a_n x^{n-1}$$

setzen. $g(x) = 0$ besitzt die $(n-1)$-fache Wurzel 0, sowie die einfache Wurzel $-\frac{a_n}{a_{n-1}}$. (Sollte $a_{n-1} = 0$ sein, so wird die letztere Wurzel ∞, was dem folgenden Ergebnis keinen Abbruch tut.)

Aus dem Faltungssatz schließen wir unmittelbar:

Im Innern oder am Rande eines jeden Kreises, der durch die beiden Punkte 0 *und* $-\frac{a_n}{a_{n-1}}$ *geht, liegt wenigstens eine Wurzel von* $f(x)$.

Durch eine Verschiebung der Ebene erhalten wir daraus einen bekannten *Satz von* LAGUERRE. Wir setzen dazu

$$x = y + \alpha, \tag{4}$$

wo y die neue Variable und α eine beliebige, reelle oder komplexe Zahl bezeichnet. Aus dem TAYLORschen Satz folgt

$$f(y+\alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha) \cdot y + \frac{f''(\alpha)}{2!} \cdot y^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} y^n .$$

Das transformierte Polynom sei mit $F(y)$ bezeichnet. Nach der obigen Folgerung aus dem Faltungssatz, die wir jetzt auf $F(y)$ anwenden, liegt im Innern oder auf dem Rande eines jeden Kreises durch die Punkte 0 und $-n\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ wenigstens eine Wurzel von $F(y)$. Transformieren wir zurück, so geht wegen (4) $y = 0$ in $x = \alpha$ und $y = -n\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ in $x = \alpha - n\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ über. Damit lautet der *Satz von* LAGUERRE[1]):

Im Innern oder am Rande eines jeden Kreises durch die Punkte α *und* $\alpha - n\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ *liegt wenigstens eine Wurzel von* $f(x)$.

4. LAGUERRE hat auf mannigfache Art gezeigt, welche Dienste der Satz für die Abschätzung der Wurzeln zu leisten vermag. Aus den verschiedenen Möglichkeiten sei hier eine Anwendung auf das NEWTON*sche Näherungsverfahren* herausgegriffen. Dieses Verfahren lautet bekanntlich:

Es sei x_1 *ein geeigneter Näherungswert einer Wurzel* ξ *von* $f(x) = 0$. *Man erhält dann weitere Näherungswerte* $x_2, x_3, \ldots$, *die gegen* ξ *konvergieren, wenn man der Reihe nach*

$$x_{k+1} = x_k + h_k, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

setzt, wobei h_k *die «Korrektur»*

$$h_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{5}$$

bedeutet.

---

[1]) LAGUERRE, Œuvres, Bd. 1, S. 56–83 und 133–143.

Ohne irgendwelche Abänderung läßt sich das Verfahren auch zur Berechnung einer *komplexen Wurzel* verwenden.

Es liegt nun die Frage nahe: *Wie weit kann ξ höchstens noch von einem x_k entfernt sein?* Die gewünschte Auskunft gibt der Satz von LAGUERRE. Wir ersetzen dort den Punkt α durch x_k und erhalten dann, wegen (5), für den anderen Punkt des Satzes $x_k + n \cdot h_k$. Fassen wir h_k als Vektor auf, so haben wir h_k somit n-mal vom Punkte x_k aus abzutragen. Unter den unendlich vielen Kreisen durch x_k und $x_k + n h_k$ wählen wir den kleinsten aus, der die Verbindungsstrecke der beiden Punkte zum Durchmesser hat (Fig. 1).

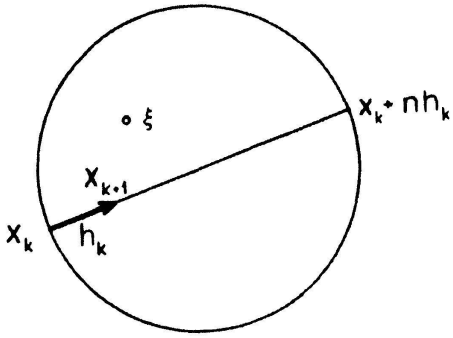

Fig. 1

Im Innern oder am Rande dieses Kreises muß wenigstens eine Wurzel von $f(x)$ liegen. Das kann nur die gesuchte Wurzel ξ sein, wenn die Wurzeln getrennt sind, und $|h_k|$ bereits genügend klein ist.

Das Ergebnis ist also dies: Man erhält zum NEWTONschen Verfahren hinzu *ohne nennenswerte Mehrarbeit eine Abschätzung der gesuchten Wurzel.*

5. Ein zum Satz von LAGUERRE ähnliches Ergebnis erhalten wir, wenn von den Koeffizienten von $g(x)$ alle außer b_2 und b_0 gleich null gesetzt werden. Die Bedingung (3a) reduziert sich auf

$$a_{n-2} b_2 + a_n b_0 = 0\,,$$

weshalb wir

$$b_0 = a_{n-2}\,, \quad b_2 = -a_n\,, \quad g(x) \equiv a_{n-2} x^n - a_n x^{n-2}$$

setzen dürfen. $g(x)$ besitzt die $(n-2)$-fache Wurzel 0 und daneben die zwei einfachen Wurzeln $\zeta_1 = +\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-2}}}$ und $\zeta_2 = -\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-2}}}$. Je nach den Zahlenwerten von a_n und von a_{n-2} sind ζ_1 und ζ_2 reell oder komplex.

Es sei k_g in der Zahlenebene ein beliebiger Kreis durch die beiden Punkte ζ_1 und ζ_2. Wegen $\zeta_2 = -\zeta_1$ gehört der Nullpunkt und damit die $(n-2)$-fache Wurzel von $g(x)$ dem Innern von k_g an. Nach dem Faltungssatz muß im Innern oder auf dem Rande von k_g auch wenigstens eine Wurzel von $f(x)$ liegen. Wir haben somit den Satz:

Im Innern oder am Rande eines jeden Kreises durch die beiden Punkte $+\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-2}}}$ und $-\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-2}}}$ liegt wenigstens eine Wurzel von $f(x)$.

Es sei zum Beispiel

$$f(x) \equiv x^4 + p \cdot x^3 + 54\, x^2 + q \cdot x + 1 = 0$$

gegeben. Wegen $a_n = 1$, $a_{n-2} = 54 : \binom{4}{2} = 9$ haben wir Kreise durch die Punkte $\frac{1}{3}$ und

$-\frac{1}{3}$ zu betrachten. Im Innern oder am Rande eines solchen Kreises liegt sicher eine Wurzel von $f(x)$, wie auch immer p und q gewählt sein mögen. Insbesondere existiert eine Wurzel vom absoluten Betrage $\leqq \frac{1}{3}$.

6. Für die nächste Anwendung des Faltungssatzes lassen wir $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ verschwinden. An Stelle von (3a) tritt die einfachere Beziehung

$$b_n + (-1)^n a_n b_0 = 0,$$

so daß wir

$$b_0 = 1, \quad b_n = -(-1)^n a_n, \quad g(x) \equiv x^n - (-1)^n a_n$$

setzen dürfen.

Bezeichnen wir noch die n Wurzeln von $f(x)$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so gilt wegen $a_0 = 1$:

$$f(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n), \quad (-1)^n a_n = x_1 x_2 \ldots x_n. \tag{6}$$

Daher läßt sich $g(x)$ in der Gestalt

$$g(x) \equiv x^n - x_1 x_2 \ldots x_n$$

schreiben. Dem Faltungssatz entnehmen wir sofort: In jedem Kreisgebiet K_g, dem sämtliche Wurzeln von $g(x)$ angehören, liegt wenigstens eine Wurzel x_k von $f(x)$.

Um von hier zu einem für die Anwendung brauchbaren Ergebnis zu kommen, müssen wir eine gebrochen lineare Transformation ausführen. Sie laute

$$y = \frac{x - \alpha}{x - \beta}, \tag{7}$$

wo α und β irgend zwei voneinander verschiedene, reelle oder komplexe Zahlen bezeichnen. Die aus $x_1, x_2, \ldots$ hervorgehenden Punkte seien mit $y_1, y_2, \ldots$ bezeichnet. Wir betrachten die Gleichung

$$G(y) \equiv y^n - y_1 y_2 \ldots y_n = 0$$

und halten gemäß dem obigen Ergebnis fest, daß in jedem Kreisgebiet, dem alle Wurzeln von $G(y)$ angehören, wenigstens ein y_k liegt.

$G(y)$ geht durch die Transformation (7) in die Gleichung

$$\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^n - \left(\frac{x_1-\alpha}{x_1-\beta}\right)\left(\frac{x_2-\alpha}{x_2-\beta}\right) \cdots \left(\frac{x_n-\alpha}{x_n-\beta}\right) = 0$$

oder wegen (6) in die Gleichung

$$\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^n = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \tag{8}$$

über. Da bekanntlich durch jede lineare Transformation ein Kreisgebiet wieder in ein Kreisgebiet übergeführt wird, so folgt:

In jedem Kreisgebiet, dem sämtliche Wurzeln von (8) *angehören, liegt wenigstens eine Wurzel von* $f(x)$.

Dieser Satz ist von M. FEKETE[1]) aufgestellt worden. Wir können ihn folgendermaßen verwenden: Wir setzen

$$\lambda = \sqrt[n]{\left|\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}\right|} \tag{9}$$

[1]) M. FEKETE, Über die Nullstellenverteilung bei Polynomen, deren Wert an zwei Stellen gegeben ist, Jber. d. Dtsch. Math. Ver., Bd. 34 (1926), S. 220–233.

Beschränken wir uns in (8) auf die absoluten Beträge, so folgt

$$\frac{|x-\alpha|}{|x-\beta|} = \lambda. \tag{10}$$

Dies bedeutet geometrisch, daß die Abstände der Wurzeln der Gleichung (8) von den Punkten α und β das konstante Verhältnis λ haben. Die Wurzeln von (8) liegen folglich alle auf dem *Kreis des* APOLLONIUS, der zu den Punkten α und β leicht gezeichnet werden kann. Nach dem Satz von FEKETE liegt *im Innern oder auf dem Rande dieses Kreises wenigstens eine Wurzel von* $f(x)$.

Kennt man also zu zwei beliebigen Punkten α und β die Funktionswerte $f(\alpha)$ und $f(\beta)$, so kann man damit allein schon ein Kreisgebiet angeben, in dem wenigstens eine Wurzel von $f(x)$ liegen muß.

7. Mit dem soeben erhaltenen Ergebnis gelingt es oft, die Wurzeln einer gegebenen Gleichung zu trennen, wie das folgende Beispiel zeigen mag. Gegeben sei

$$f(x) \equiv x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 5x + 10 = 0.$$

$f(x)$ weist vier Zeichenwechsel auf, besitzt also nach der DESCARTES'schen Zeichenregel maximal vier positive, aber keine negativen Wurzeln. Da das Polynom für $x = 0, 1, 2, \ldots$ der Reihe nach die Werte 10, 9, 4, -5, 6, ... annimmt, so muß eine positive Wurzel zwischen $x = 2$ und $x = 3$ und eine weitere zwischen $x = 3$ und $x = 4$ liegen. Andere positive Wurzeln sind nicht zu finden (wie zum Beispiel aus der Diskussion von $f'(x)$ folgt). Daher besitzt $f(x)$ noch zwei komplexe Wurzeln, die bekanntlich konjugiert-komplex sein müssen. Um ihre Lage in der Zahlenebene zu finden, berechnen wir $f(x)$ für $x = i$ und erhalten $f(i) = 2 + i$. Wählen wir in (9) $\alpha = 0$ und $\beta = i$, so folgt wegen $f(0) = 10$ und $|f(i)| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$, daß

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{10}{\sqrt{5}}} = 1{,}454\ldots$$

ist. Nun zeichnen wir den Kreis des APOLLONIUS als den geometrischen Ort aller Punkte, deren Abstände von 0 und i das feste Verhältnis $\lambda = 1{,}454\ldots$ besitzen (siehe Fig. 2).

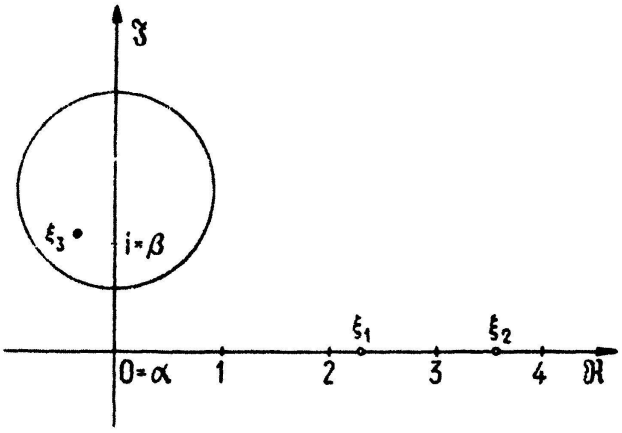

Fig. 2

Im Inneren oder auf dem Rande dieses Kreises muß die eine der beiden komplexen Wurzeln enthalten sein. Die konjugiert-komplexe Wurzel liegt symmetrisch dazu in bezug auf die reelle Achse. Damit sind alle vier Wurzeln von $f(x)$ getrennt.

Eine weitere Anwendung des Satzes von FEKETE drängt sich für das NEWTONsche *Näherungsverfahren* auf. Da man dort die Werte von $f(x)$ für jede Näherungswurzel berechnen muß, um die nächste Korrektur zu finden, so bereitet es keine besondere Mühe, aus (9) die Verhältniszahl λ zweier solcher Funktionswerte zu berechnen und den dazugehörigen Kreis des APOLLONIUS zu zeichnen. In manchen Fällen erhält man so eine bessere Abschätzung der gesuchten Wurzel als mit Hilfe des LAGUERREschen Kreises (siehe Abschnitt 4).

8. Zur Abschätzung der Wurzeln gehört auch die Auffindung von oberen oder unteren Schranken für die *absoluten Beträge der Wurzeln*. Die gegebene Gleichung laute $f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n = 0$. Zur Herleitung einer *oberen Schranke* geht man meist von der bekannten, von CAUCHY betrachteten Gleichung

$$x^n - |A_1| x^{n-1} - |A_2| x^{n-2} - \cdots - |A_n| = 0$$

aus. Bezeichnet man die ihrem absoluten Betrage nach *größte Wurzel* von $f(x)$ mit X, so findet man zum Beispiel

$$|X| \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq k \leqq n} (|A_k| + 1).$$

Weniger bekannt sind *untere Schranken* für $|X|$. Wir werden eine solche herleiten, die von G. D. BIRKHOFF und fast gleichzeitig von J. L. W. JENSEN gefunden wurde[1]).

Zu diesem Zweck sei $f(x)$ wiederum in der Gestalt (1a) geschrieben. k bezeichne eine der Zahlen $1, \ldots, n$. Wir bestimmen dann das Hilfspolynom (2) so, daß außer b_{n-k} und b_n alle Koeffizienten verschwinden. Die Bedingung (3a) reduziert sich auf

$$b_n + (-1)^k a_k b_{n-k} = 0,$$

woraus, analog wie in den vorigen Abschnitten,

$$g(x) \equiv x^k - (-1)^k a_k = 0 \tag{11}$$

gefolgert wird. $g(x)$ besitzt k Wurzeln vom absoluten Betrage $\sqrt[k]{|a_k|}$.

Man wird an dieser Stelle einwenden, der Faltungssatz könne für $k < n$ nicht angewandt werden, da der Grad von $g(x)$ zu klein sei. Die Schwierigkeit läßt sich aber leicht überwinden. Denn für $k < n$ kann man $g(x)$ als ein Polynom n-ten Grades auffassen, dessen $n-k$ erste Koeffizienten verschwinden. Damit $g(x)$ im ganzen n Wurzeln besitzt, muß man noch die $(n-k)$-fache Wurzel ∞ hinzufügen. Dies wird durch die folgende Betrachtung gezeigt:

Man ersetze im Polynom (2), dessen $(n-k)$ erste Koeffizienten verschwinden sollen, die Variable x durch $\frac{1}{y}$ und multipliziere das Polynom hinterher mit y^n. Man erhält ein Polynom n-ten Grades in y, dessen $(n-k)$ letzte Koeffizienten verschwinden, das

---

[1]) G. D. BIRKHOFF, An elementary double inequality for the roots of an algebraic equation having greatest absolute value, Bull. Amer. Math. Soc., Bd. 21 (1914), S. 494–495. J. L. W. V. JENSEN, Forskellige Bidrag til Ligningernes Theori, Nyt Tidsskrift for Math., Bd. 26A (1915), S. 6–13. Andere Schranken für die absoluten Beträge der Wurzeln hat Herr A. OSTROWSKI gefunden, Recherches sur la méthode de GRAEFFE et les zéros des polynomes et des séries de LAURANT, Acta math., Bd. 72 (1940), S. 99–257, spez. S. 143.

folglich die $(n-k)$-fache Wurzel $y=0$ besitzt. Durch die inverse Transformation $y=\frac{1}{x}$ erhält $g(x)$ die $(n-k)$-fache Wurzel $x=\infty$.

Wir verschaffen uns nun ein Kreisgebiet K_g, dem sämtliche n Wurzeln der Gleichung (11) angehören:

Die k endlichen Wurzeln von $g(x)$ liegen alle auf dem Kreis mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $\sqrt[k]{|a_k|}$. Damit auch die Wurzeln $x=\infty$ im gesuchten Kreisgebiet liegen, wählen wir für K_g das Äußere und den Rand des soeben beschriebenen Kreises. Nach dem Faltungssatz liegt wenigstens eine Wurzel von $f(x)$ in K_g.

Diese Betrachtung gilt für jedes $k\,(1\leqq k\leqq n)$. Bezeichnen wir daher mit X wiederum diejenige Wurzel von $f(x)$, die einen maximalen absoluten Betrag hat, so folgt sofort die angekündigte Ungleichung von BIRKHOFF und JENSEN:

$$|X| \geqq \operatorname*{Max}_{1\leqq k\leqq n} \sqrt[k]{|a_k|}\,. \tag{12}$$

Das Gleichheitszeichen wird für das Polynom $f(x)=(x+1)^n=x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}+\cdots+\binom{n}{1}x+1$ erreicht, bei dem alle a_k gleich 1 sind.

9. Zum Schluß betrachten wir noch die Argumente der Wurzeln von $f(x)$. Es bezeichne Φ einen Sektor der Zahlenebene, der von den Schenkel eines Winkels $\varphi\,(\varphi\leqq\pi)$ mit dem Scheitelpunkt 0 begrenzt wird. Ein für manche Anwendungen wichtiges Problem ist noch nicht gelöst. Es lautet:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß alle Wurzeln von $f(x)$ im Sektor Φ liegen?

Man kennt immerhin eine notwendige Bedingung, die sehr einfach lautet. Sie wird ~~durch den~~ folgen~~den~~, ~~von~~ S. TAKAHASHI[1]) ~~gefundenen~~ Satz gegeben:

Liegen alle Wurzeln von $f(x)$ in einem Sektor Φ der Ebene, der von zwei vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen mit dem Zwischenwinkel $\varphi\leqq\pi$ begrenzt wird, so liegen auch die Quotienten

$$-\frac{a_1}{a_0},\ -\frac{a_2}{a_1},\ \ldots,\ -\frac{a_n}{a_{n-1}}$$

in Φ.

Mit unseren Hilfsmitteln werden wir einen etwas schärferen Satz beweisen, aus dem der Satz von TAKAHASHI leicht zu folgern ist. Er lautet:

Liegen alle Wurzeln von $f(x)$, nicht aber der Nullpunkt, im Innern eines endlichen Kreisgebietes K, so liegen die n Punkte $-\frac{a_k}{a_{k-1}}$ $(k=1,\ldots,n)$ ebenfalls im Innern von K.

Beweis: Es sei k eine der Zahlen $1,\ldots,n$. Außer b_{n-k} und b_{n-k+1} seien alle Koeffizienten der Hilfsgleichung (2) gleich 0 gesetzt. (3a) besagt dann

$$a_{k-1}b_{n-k+1}-a_k b_{n-k}=0,$$

weshalb wir

$$g(x)=a_{k-1}x^k+a_k x^{k-1}\,.$$

setzen dürfen. $g(x)$ besitzt die $(k-1)$-fache Wurzel 0, die einfache Wurzel $-\frac{a_k}{a_{k-1}}$ und die $(n-k)$-fache Wurzel ∞, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde.

---

[1]) S. TAKAHASHI, Einige Sätze über die Lage der Wurzeln algebraischer Gleichungen, Tôhoku Math. J., Bd. 31 (1929), S. 274–282. Zum Beweis vgl. J. DIEUDONNÉ, l. c., S. 29–30.

Der Faltungssatz besagt, daß in jedem Kreisgebiet K, dem sämtliche Wurzeln von $f(x)$ angehören, wenigstens eine Wurzel von $g(x)$ liegt. Wenn K endlich ist und den Nullpunkt nicht im Innern enthält, wie es die Voraussetzung des Satzes verlangt, so muß $-\frac{a_k}{a_{k-1}}$, als einzige Wurzel von $g(x)$, in K liegen. Da diese Überlegung für jedes k $(1 \leqq k \leqq n)$ gilt, ist der Satz bewiesen.

EDUARD BATSCHELET, Basel.

Equations fonctionnelles et mathématiques supérieures élémentaires

1. Si, en général, le problème des équations fonctionnelles présente des difficultés considérables, certains cas simples constituent des problèmes intéressants qui, par les connaissances requises pour leur solution, peuvent être considérés comme appartenant aux éléments des mathématiques supérieures. Explicitement ou implicitement, certaines équations fonctionnelles sont appliquées dans les cours de physique.

2. L'équation $\underline{f(x_1)+f(x_2)=f(x_1+x_2)}$.

Cette équation est évidemment satisfaite par une fonction linéaire homogène quelconque. Un coup d'œil sur un graphique suffit à le montrer. Dans les applications, on a besoin de la réciproque de cette propriété: toute fonction satisfaisant à la relation proposée est linéaire et homogène. Puisque nous ne considérons que les éléments, nous supposons dérivables les fonctions que nous considérons.

La démonstration de la réciproque ci-dessus peut être conduite comme suit. Dans l'équation proposée, remplaçons x_2 par une somme x_2+x_3. Il vient

$$f(x_1+x_2+x_3)=f(x_1)+f(x_2)+f(x_3).$$

Généralisant, on trouve, en posant $x_1=x_2=\ldots=x_k$,

$$f(k\,x)=k\,f(x), \tag{1}$$

où k est entier.

Divisons cette équation par k en posant $x'=k\,x$:

$$f\left(\frac{x'}{k}\right)=\frac{1}{k}\,f(x').$$

L'application des deux dernières équations conduit à généraliser l'équation (1) au cas des nombres rationnels. Puisque nous avons admis que la fonction cherchée est continue, un passage à la limite conduit à la conclusion que l'équation (1) est valable quel que soit le multiplicateur k, rationnel ou irrationnel.

Dérivons l'équation (1) et divisons par k:

$$f'(k\,x)=f'(x), \text{ ou, par un changement de notation,}$$

$$f'(x)=f'(1)=\text{constante}.$$

La dérivée de la fonction cherchée est constante; la fonction est linéaire. Appli-