Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 3

Artikel: Problème d'Apollonius
Autor: Grossrey, Adrien
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1202

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band 1 Nr. 3 Seiten 41-56 Basel, 15. Mai 1946

Problème d'Apollonius

Etant donnés trois cercles de rayons r_1, r_2, r_3 et de centres O_1, O_2, O_3, tracer les cercles tangents aux trois cercles.

Remarque

Ce problème constitue en fait un groupe de 10 problèmes suivant que les rayons des cercles donnés sont finis, infinis, ou nuls. Les trois éléments r, 0, ∞ peuvent en effet se grouper comme suit:

$r\ r\ r$	$r\ 0\ 0$	$r\ r\ \infty$	$r\ 0\ \infty$
$0\ 0\ 0$	$r\ \infty\ \infty$	$0\ 0\ \infty$	
$\infty\ \infty\ \infty$	$r\ r\ 0$	$\infty\ \infty\ 0$	

ce qui donne effectivement les 10 problèmes du groupe. Ils constituent un bel ensemble de constructions relativement faciles, et peuvent donc intéresser les élèves des écoles secondaires et supérieures. La solution à laquelle nous aboutissons au dixième problème est due à VIÈTE (1540-1603).

Nous exposerons ces dix constructions dans l'ordre suivant:

1. $0\ 0\ 0$ cercle tangent[1]) à trois points.
2. $\infty\ \infty\ \infty$ cercle tangent à trois droites.
3. $0\ 0\ \infty$ cercle tangent à une droite et deux points.
4. $0\ 0\ r$ cercle tangent à un cercle et deux points.
5. $0\ \infty\ \infty$ cercle tangent à deux droites et un point.
6. $r\ \infty\ \infty$ cercle tangent à deux droites et un cercle.
7. $r\ 0\ \infty$ cercle tangent à une droite, un cercle et un point.
8. $r\ r\ \infty$ cercle tangent à deux cercles et une droite.
9. $r\ r\ 0$ cercle tangent à deux cercles et un point.
10. $r\ r\ r$ cercle tangent à trois cercles.

Nous supposons connues les constructions suivantes:

a) tangentes menées d'un point à un cercle;
b) tangentes extérieures ou intérieures à deux cercles;
c) construction d'une moyenne géométrique.

---

[1]) Nous sous-entendons qu'un point est un cercle de rayon nul, d'où l'expression «cercle tangent à un point». Une droite sera considérée comme un cercle de rayon infini.

Enfin, nous rappelons le théorème suivant: *Considérons un cercle variable, tangent à deux cercles donnés. La droite qui joint les points de contact passe par le centre S de similitude des deux cercles, et la puissance de ce point par rapport au cercle variable reste constante.*

La démonstration en est élémentaire; on la trouvera dans le «Traité de Géométrie» de ROUCHÉ et COMBEROUSSE, par exemple.

Problème 1. (0 0 0) *Cercle tangent à trois points*

Le centre cherché est le point d'intersection des médiatrices tracées entre les trois points. La construction est immédiate. Le cercle cherché a comme centre le centre radical des trois cercles O_1, O_2, O_3 lorsque leurs rayons respectifs tendent vers zéro.

Problème 2. (∞ ∞ ∞) *Cercle tangent à trois droites*

Les centres des cercles cherchés sont à l'intersection des bissectrices des angles formés par les trois droites. Le problème comporte quatre solutions.

Problème 3. (0 0 ∞) *Cercle tangent à une droite et deux points* (fig. 1)

La droite qui passe par les deux points F et G coupe la droite donnée en un point C. En supposant le problème résolu, on voit que

$$\overline{CC_2^2} = \overline{CF} \cdot \overline{CG}.$$

Les points de contact sont donc obtenus par la moyenne géométrique des segments CF et CG.

On peut aussi exécuter la construction en se basant sur le *segment capable* (fig. 2). On a en effet

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

car $\alpha_1 = \alpha_2$ (triangle C_2GG' isocèle, par construction en prenant G' symétrique de G).

$$\alpha = \varepsilon + \alpha_2, \quad \varepsilon = \alpha_3 + \delta, \quad \delta = \alpha_2 \text{ (même arc)},$$

$$\text{donc} \quad \alpha = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_2 \quad \text{ou} \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Donc le segment FG' est vu des points de contact sous les mêmes angles que ceux de la droite FG avec la droite donnée. D'où la construction ci-dessus.

Problème 4. (0 0 r) *Cercle tangent à un cercle et à deux points* (fig. 3)

Le centre doit se trouver sur la médiatrice des deux points F et G. Traçons un cercle auxiliaire centré sur la médiatrice et passant par les deux points. Ce cercle coupe le cercle donné en C et D. Les droites CD et FG déterminent le point P, et on a

$$PC \cdot PD = PF \cdot PG = \overline{PC_1^2}.$$

On construira donc PC_1 par la moyenne géométrique de PC et PD ou en construisant les tangentes de P au cercle donné.

Le problème comporte deux solutions. Si les deux points sont intérieurs au cercle donnés, la construction est la même.

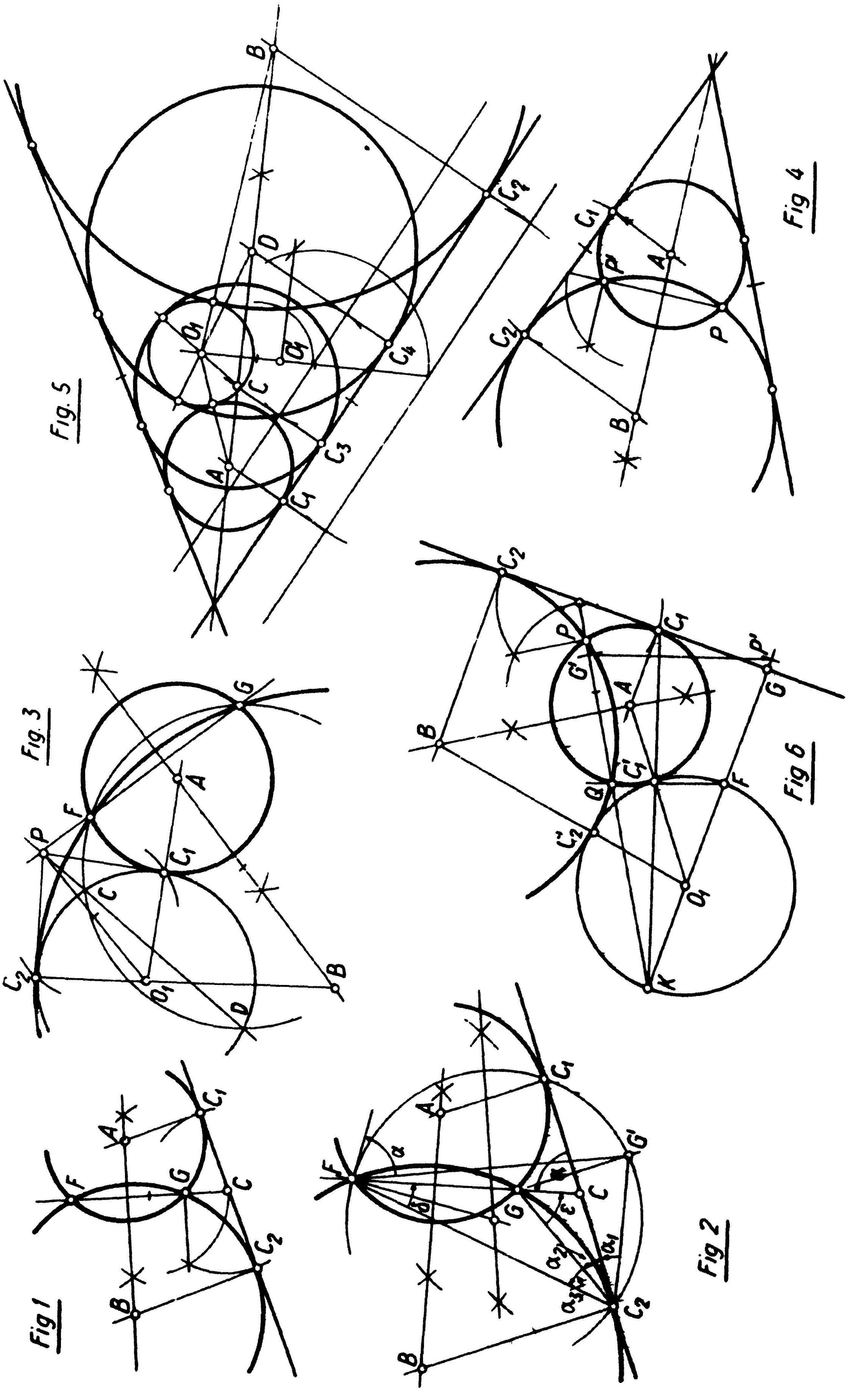
Fig. 5
Fig 4
Fig. 3
Fig 6
Fig 1
Fig 2

Problème 5. ($0\ \infty\ \infty$) *Cercle tangent à deux droites et un point* (fig. 4)

Le centre est sur la bissectrice. Tout cercle tangent aux deux droites est symétriquement placé sur la bissectrice qui lui sert de diamètre. Pour tout point P pris sur ce cercle, il existe un symétrique P'. Le problème est donc ramené au problème 3.

Problème 6. ($r\ \infty\ \infty$) *Cercle tangent à un cercle et deux droites* (fig. 5)

Se ramène au précédent par une translation d'une des droites d'une grandeur égale au rayon du cercle donné. Ce dernier se trouve alors réduit à un point. Le problème comporte 4 solutions, les cercles solutions pouvant être tangents intérieurement ou extérieurement au cercle donné.

Problème 7. ($r\ 0\ \infty$) *Cercle tangent à un cercle, un point P et une droite* (fig. 6)

Soit A le centre du cercle tangent. La droite AO_1 passe par le point de contact C_1'. Par O_1 abaissons la perpendiculaire à la droite, ce qui détermine les points K, F, G. Les triangles isocèles $AC_1'C_1$ et KO_1C_1' sont semblables et AC_1 est parallèle à GK; donc C_1 est le point de contact du cercle avec la droite. D'autre part, le triangle KFC_1' est rectangle; par suite, le quadrilataire $GFC_1'C_1$ est inscriptible, et on peut écrire les relations

$$KF \cdot KG = KC_1 \cdot KC_1' = KP \cdot KQ;$$

l'égalité $KF \cdot KG = KP \cdot KQ$ permet de déterminer le point Q. On remplacera la proportion (KF, KP, KQ, KG) par l'équivalente (KF, KP', KQ, KG') obtenue en portant KG sur la droite GP, et KP sur la droite KG, ce qui donne les points G' et P'. La parallèle à $P'G'$ tracée de F donne le point Q.

On pourrait dire aussi, en vertu de l'égalité précédente, que les points F, G, P, Q sont sur un cercle dont on connaît trois points; on peut donc construire facilement le point Q et ramener le problème au problème 3 ou 4.

La construction suivante donne les solutions des cercles tangents intérieurement au cercle donné (fig. 7). Les triangles rectangles FKC_3' et FGC_3 étant semblables, on a $FK \cdot FG = FC_3' \cdot FC_3$; mais on a aussi dans le cercle solution $FC_3' \cdot FC_3 = FP \cdot FP'$; d'où $FK \cdot FG = FP \cdot FP'$, ce qui permet de construire le point P' au moyen du cercle passant par P, K, G.

Problème 8. ($r\ r\ \infty$) *Cercle tangent à deux cercles et à une droite* (fig. 8)

On le ramène au problème précédent en réduisant l'un des cercles à un point, ce qui entraine le déplacement de la droite parallèlement à elle-même d'une grandeur égale au rayon du cercle évanouissant et la diminution (ou l'augmentation) du rayon de l'autre cercle d'une longueur égale au rayon de ce cercle évanouissant. Le problème offre 4 solutions.

Problème 9. ($r\ r\ 0$) *Cercle tangent à deux cercles et un point* (fig. 9)

C'est une généralisation du problème 7. La droite (cercle de rayon infini) devient un cercle de rayon r.

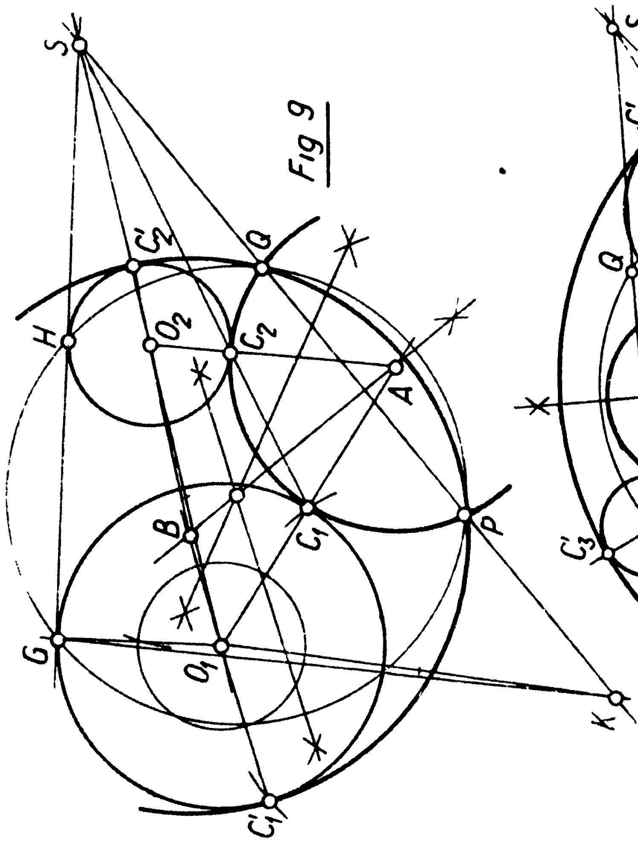

Fig 9

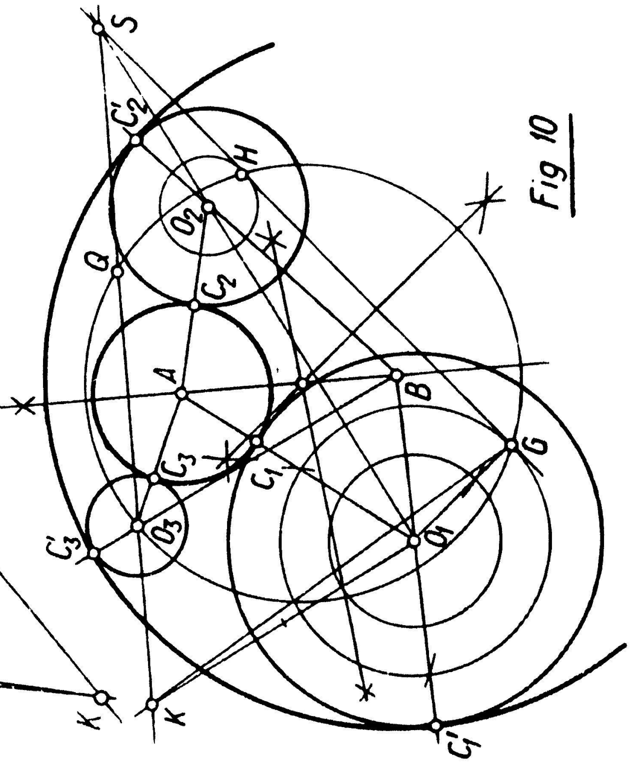

Fig 10

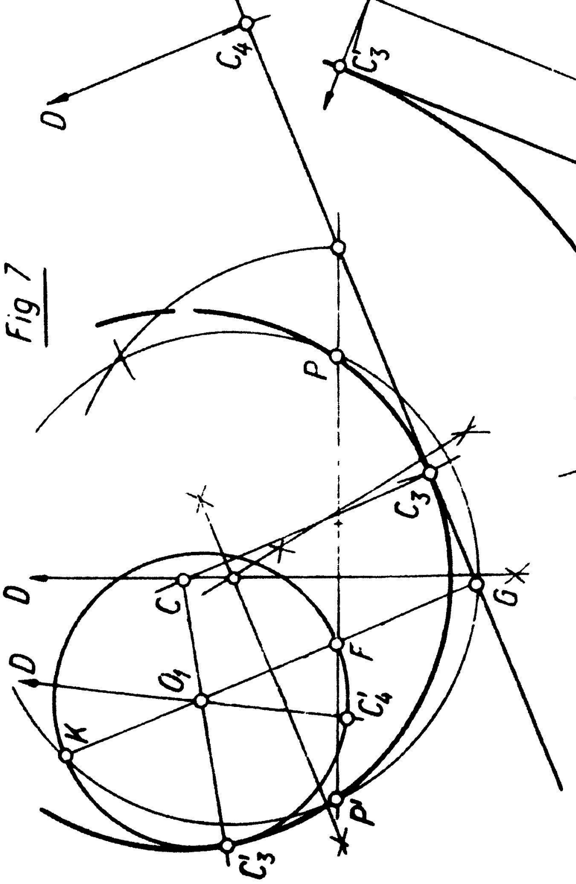

Fig 7

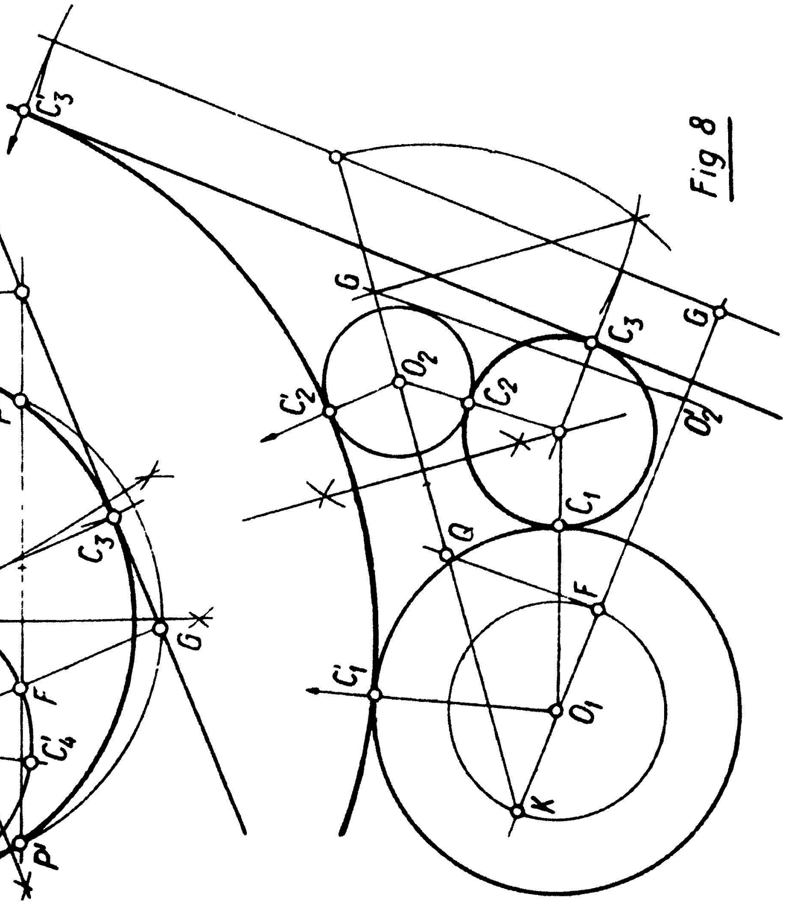

Fig 8

Soit S le centre de similitude des deux cercles. La droite C_1C_2 joignant les points de contact passe par ce centre de similitude. On a donc

$$SC_1 \cdot SC_2 = SG \cdot SH.$$

De plus, la droite SP détermine sur le cercle solution un point Q, et on a

$$SC_1 \cdot SC_2 = SP \cdot SQ.$$

Par suite, les points G, H, P, Q sont sur un cercle, que l'on peut construire puisqu'on connaît trois des points, et on est ramené au n° 4. Le problème comporte 4 solutions, deux en considérant le point S de similitude externe, et deux avec le point S' de similitude interne (tangentes intérieures).

Problème 10. (r r r) Cercle tangent à trois cercles (fig. 10)

On ramène le problème au précédent, en réduisant le plus petit des trois cercles à un point, et en diminuant ou augmentant les rayons des deux autres du rayon du cercle évanouissant. Le problème offre huit solutions; en effet, les 4 solutions du problème 9 en donnent chacune deux suivant que le cercle solution est tangent intérieurement ou extérieurement au cercle évanouissant (en P). La construction des huit cercles en quatre épures offre un excellent exercice pour développer chez les élèves l'exactitude des tracés.

ADRIEN GROSREY, Genève

Mathematische Aufgaben aus dem Gebiete der Gasreaktionen

An Fachschulen für Chemiker leidet das Interesse der Studierenden für die mathematischen Entwicklungen in hohem Maße deshalb, weil die Anwendungen meistens rein physikalischen, maschinentechnischen oder mathematischen Problemkreisen entnommen werden. Einerseits liegt dies daran, daß die Mathematiker sich wohl mit Mechanik, mit Schwingungsproblemen der Elastizitätslehre und der Elektrizitätslehre, selten aber mit dem weit farbigeren Problemkreis der theoretischen Chemie abgeben. Naturgemäß bildet die Thermodynamik und hierin speziell die Kinetik die Grundlage für das Verständnis dieser Anwendungsgebiete. Um diesem Übelstand am Technikum Winterthur zu begegnen, wurden an der Fachschule für Chemie im dritten Semester chemisch-mathematische Übungen angesetzt, in denen ausschließlich Anwendungen auf chemische Probleme bearbeitet werden. Diese Übungen beginnen mit der exakten Definition der zwölf in der Chemie üblichen Gehaltsangaben und ihrer gegenseitigen mathematischen Beziehungen und setzen sich alsdann in einer Menge von Teilgebieten fort. Von den behandelten Kapiteln seien erwähnt: Die molare Form der Gasgleichung, Berechnung der Molekülkerngerüste aus den aus der Optik bekannten Hauptträgheitsmomenten (Bandenspektren) (für lineare, ebene, pyramidenförmige und tetraedrische Moleküle), Anwendung des Massenwirkungsgesetzes auf homogene Gasreaktionen, p_H-Berechnungen, Dissoziation von