Relation entre un théorème de Darboux et un théorème de Poncelet

Autor(en): **Rossier, Paul**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 2

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-1200

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ihre Orthogonaltrajektorien sind die Kreise durch F_1 und F_2. Gleiches Verhalten zeigen zum Beispiel die Kurven mit der Gleichung

$$|u^\alpha - v^\alpha| = p^\alpha \quad \text{für } \alpha < 1;\ \alpha \neq 0.$$

Die konfokalen Hyperbeln für $\alpha = 1$ sind als Grenzfall der Typen 3 und 4 aufzufassen.

WILLI LÜSSY, Winterthur

Relation entre un théorème de Darboux et un théorème de Poncelet

Afin de faciliter au lecteur la compréhension de ce qui suit, rappelons quelques définitions et propriétés de géométrie projective plane.

Une involution de rayons est dite absolue lorsque à chaque rayon on fait correspondre le rayon perpendiculaire du même faisceau. Cette transformation ne possède pas d'élément double réel, mais bien une paire d'éléments doubles imaginaires, appelés rayons isotropes du faisceau ou droites isotropes par le sommet de celui-ci.

Les droites isotropes jouissent de propriétés curieuses et même paradoxales: en coordonnées rectangulaires, leur coefficient angulaire est égal à l'unité imaginaire positive ou négative; lors d'un changement de coordonnées rectangulaires, l'équation d'une droite isotrope garde la même forme. Menons les deux paires de droites isotropes passant par deux points distincts du plan; elles sont parallèles deux à deux; il existe donc deux points à l'infini, appelés points cycliques, chacun commun à une infinité de droites isotropes. L'ensemble de deux droites isotropes passant par un point réel constitue un cercle de rayon nul ayant ce point pour centre; il en résulte que deux points distincts d'une droite isotrope sont à distance nulle l'un de l'autre, d'où le nom de droites de longueur nulle donné parfois à ces droites. Le cercle de rayon nul ayant pour centre le centre d'un cercle constitue la paire d'asymptotes de ce cercle; celui-ci est tangent à ses asymptotes en ses points à l'infini, donc aux points cycliques; autrement dit, tous les cercles passent par les points cycliques. La distance d'un point du plan non situé sur une droite isotrope à celle-ci est infinie; elle est indéterminée si le point appartient à la droite isotrope considérée.

Par le sommet d'un angle φ, menons les deux droites isotropes j et k: avec les deux côtés a et b de l'angle, elles constituent un groupe de quatre droites appartenant à un faisceau et qui possède un rapport anharmonique $(ajbk)$. LAGUERRE[1]) a démontré la relation suivante entre l'angle φ et le rapport anharmonique $(abjk)$

$$e^{2i\varphi} = (abjk).$$

Cette relation est fort importante, car elle permet de ramener toutes les relations d'égalité ou de rapports d'angles à des relations correspondantes portant sur des

[1]) LAGUERRE, EDMOND, 1834–1886, géomètre et algébriste français. Il découvrit la formule qui porte son nom à l'âge de 16 ans.

rapports anharmoniques. La géométrie métrique devient ainsi un cas particulier de la géométrie projective.

Examinons quelques relations entre une conique et les droites isotropes. Les tangentes à une conique issues de l'un de ses foyers sont isotropes. De cette remarque, on tire, comme le fit PLÜCKER[1]), une définition projective générale des foyers des courbes: les foyers d'une courbe sont les intersections de ses tangentes isotropes. En particulier, une conique, courbe de deuxième classe, possède deux tangentes passant par chaque point cyclique; elle a donc quatre foyers: si la courbe est réelle, deux d'entre eux sont réels (ce sont les foyers de la géométrie élémentaire), et deux sont imaginaires.

De ces définitions résulte le fait qu'un faisceau homofocal de coniques est un faisceau tangentiel particulier, celui dans lequel les quatre tangentes communes sont isotropes. Appliquant les définitions projectives des coniques et les propriétés précédentes, on est conduit facilement au théorème classique de PONCELET[2]): Si par un point du plan d'une conique, on mène les deux tangentes à celle-ci et les deux droites joignant le point donné aux foyers, l'angle de l'une de ces droites et d'une tangente est égal à celui de la seconde tangente et de la seconde droite. Ce théorème est un cas particulier d'une propriété plus générale: les bissectrices des angles formés par les tangentes issues d'un point du plan aux coniques d'un faisceau homofocal sont invariables.

DARBOUX[3]) a consacré plusieurs travaux à la recherche des propriétés de ce qu'il appelle des paires de points associés; les associés A' et B' de A et B sont les intersections non cycliques et distinctes de A et B des quatre droites isotropes par A et B. En particulier, DARBOUX démontre le théorème suivant[4]) en faisant usage d'un système de coordonnées approprié à la formule de LAGUERRE: Quand deux segments AB et $A'B'$ sont associés, si l'on joint leurs extrémités à un point quelconque M du plan, les bissectrices des angles AMB et $A'MB'$ sont les mêmes.

Ce théorème n'est qu'un cas particulier du théorème de PONCELET que nous avons rappelé; en effet, les deux paires de foyers d'une conique déterminent deux segments associés. Parmi les coniques du faisceau homofocal déterminé par les deux foyers donnés, figure la courbe dégénérée de deuxième classe constituée par la paire de points associés aux foyers donnés. Appliquant à cette conique le théorème de PONCELET, on trouve celui de DARBOUX; celui-ci est donc un cas particulier de celui-là.

PAUL ROSSIER, Genève

---

[1]) PLÜCKER, JULES, 1801–1868, géomètre allemand, s'occupa surtout de géométrie algébrique.

[2]) PONCELET, JEAN-VICTOR, 1788–1867, géomètre et ingénieur français, pionnier des méthodes de la géométrie moderne.

[3]) DARBOUX, GASTON, 1842–1917, mathématicien français, s'occupa principalement de géométrie analytique et infinitésimale, de mécanique et de théorie des fonctions.

[4]) Principes de géométrie analytique, 1917, p. 151.