Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 2

Artikel: Äquipotentialkurven und ihre Orthogonaltrajektorien
Autor: Lüssy, Willi
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1199

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band 1 Nr. 2 Seiten 25-40 Basel, 15. März 1946

Äquipotentialkurven und ihre Orthogonaltrajektorien

Der Zweck dieser Arbeit ist, Kurvenscharen und deren Orthogonaltrajektorien zu untersuchen, die sich in Bipolarkoordinaten durch die Gleichung

$$|f(u) \pm f(v)| = \text{konst.}$$

darstellen lassen. Die Frage stellt sich bei der Diskussion des Verlaufs der Niveau- und Kraftlinien, wenn man Kräfte zugrunde legt, die von zwei festen Quellen aus nach den verschiedensten Gesetzen wirken. In Verallgemeinerung einer Bezeichnung

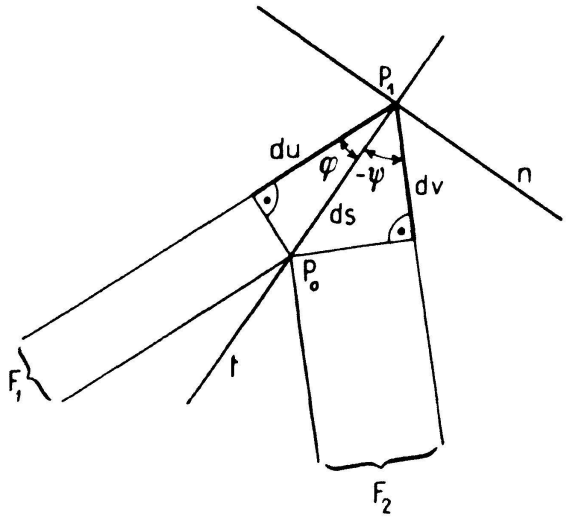

Fig. 1

bei LORIA[1]) sollen die vorkommenden Kurven Äquipotentialkurven genannt werden.

1. *Bipolarkoordinaten.* Die beiden Pole F_1 und F_2 sollen in die Punkte $(\pm c; 0)$ eines kartesischen $(x; y)$-Systems gelegt werden. Irgendein Punkt P wird durch die stets positiven Abstände $F_1P = u$ und $F_2P = v$ bestimmt. Da P nur bis auf eine Spiegelung an der x-Achse festgelegt ist, ist jede durch eine Gleichung

$$v = f(u)$$

in Bipolarkoordinaten gegebene Kurve C symmetrisch in bezug auf die x-Achse.

Die Lage der Tangente in P zu u und v soll so bestimmt werden: u muß um den Winkel φ im positiven Sinne in die Tangente hineingedreht werden, v muß um ψ im

[1]) LORIA, Spezielle algebraische und transzendente Kurven, 2. Aufl., 1910, Bd. I, S. 292.

positiven Sinne gedreht werden, um denselben Halbstrahl der Tangente zu erreichen, in den vorher u gedreht wurde. Seien P_0 und P_1 zwei benachbarte Punkte der Kurve C, t die Tangente in P_1 (siehe Fig. 1). Nun gilt unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen höherer Ordnung:

$$ds = \frac{du}{\cos\varphi} = \frac{dv}{\cos\psi},$$

oder

$$\frac{dv}{du} = \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}. \tag{1}$$

Für Punkte auf der x-Achse ist diese Überlegung nicht mehr zulässig, da dort $\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Aus (1) folgen unmittelbar die Tangenteneigenschaften von Ellipse und Hyperbel, sowie die zum Beispiel bei LORIA[1]) angegebene Konstruktion der Tangente an eine CASSINIsche Kurve.

Die Kurve C hat offenbar dort eine Extremstelle bezüglich der x-Achse, wo der Inhalt J des Dreiecks F_1F_2P extremal wird. Nun ist

$$J = \frac{\sqrt{8c^2(u^2+v^2)-(u^2-v^2)^2-16c^4}}{4},$$

woraus folgt:

Die Kurve mit der Gleichung $v=f(u)$ hat dort eine Extremstelle, wo der Ausdruck

$$8c^2(u^2+v^2)-(u^2-v^2)^2$$

extremal wird.

Aus dieser Bedingung folgt durch Differenzieren

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u(4c^2-u^2+v^2)}{v(4c^2+u^2-v^2)};$$

demnach gilt:

Ist $v=f(u,p)$ die Gleichung einer Kurvenschar in Bipolarkoordinaten mit dem Kurvenparameter p, $\frac{dv}{du}=\varphi(u,v)$ ihre Differentialgleichung, so gibt

$$\varphi(u;v) = -\frac{u(4c^2-u^2+v^2)}{v(4c^2+u^2-v^2)} \tag{2}$$

den Ort ihrer Extremstellen.

Die Kurvennormale n in P (siehe Fig. 1) sei in entsprechender Weise wie die Tangente durch die Winkel μ und ν festgelegt. Dann ist offenbar

$$\varphi = \mu - \frac{\pi}{2}; \quad \psi = \nu - \frac{\pi}{2},$$

und in Verbindung mit (1)

$$\frac{dv}{du} = \frac{\sin\nu}{\sin\mu}. \tag{3}$$

Um nun die Orthogonaltrajektorien einer Kurvenschar $v=f(u,p)$, deren Differentialgleichung wieder $\frac{dv}{du}=\varphi(u,v)$ sei, zu finden, hat man aus

[1]) A.a.O., S. 212.

$$\frac{\sin \nu}{\sin \mu} = \varphi(u, v)$$

auf den Wert von $\frac{\cos \nu}{\cos \mu}$ zu schließen, der nach (1) gleich dem Differentialquotienten der Trajektorien sein muß. Da μ und ν voneinander abhängig sind, ist noch die sich aus dem Cosinussatz ergebende Beziehung

$$\cos(\mu - \nu) = \frac{u^2 + v^2 - 4c^2}{2uv} = A$$

zu berücksichtigen. Die Rechnung ergibt

$$\frac{\cos \nu}{\cos \mu} = \frac{1 - A\varphi}{A - \varphi}.$$

Folglich gilt:

Ist $v = f(u, p)$ die Gleichung einer Kurvenschar in Bipolarkoordinaten mit dem Parameter p, $\frac{dv}{du} = \varphi(u, v)$ ihre Differentialgleichung, so lautet die Differentialgleichung der Schar ihrer Orthogonaltrajektorien

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - A\varphi}{A - \varphi}, \tag{4}$$

wo $A = \frac{u^2 + v^2 - 4c^2}{2uv}$ zu setzen ist.

Angewendet auf den hier besonders interessierenden Fall

$$f(u) \pm f(v) = p$$

ergibt (4) als Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien

$$[2uvf'(u) \pm (u^2 + v^2 - 4c^2) f'(v)]\, du \mp [2uvf'(u) \pm (u^2 + v^2 - 4c^2) f'(v)]\, dv = 0.$$

Es ist allerdings nicht jede Kurve gleich geeignet zur Darstellung in Bipolarkoordinaten, und man wird sich in jedem Spezialfall fragen, ob die Behandlung in kartesischen oder Polarkoordinaten nicht einfacher zum Ziele führe.

2. *Form der Äquipotentialkurven.* Um sich über den Verlauf einer in Bipolarkoordinaten gegebenen Kurve C rasch ein Bild zu machen, ist folgendes Verfahren praktisch. Damit ein der Gleichung $v = f(u)$ genügendes Wertepaar einen reellen Punkt P liefert, müssen die Bedingungen

$$u + v \geqq 2c \quad \text{und} \quad |u - v| \leqq 2c$$

erfüllt sein. Nun deute man die Gleichung $v = f(u)$ in einem rechtwinkligen kartesischen $(u; v)$-System und zeichne die Geraden $u + v = 2c$; $u - v = 2c$; $v - u = 2c$ ein (siehe Fig. 2). Die obigen Bedingungen sind erfüllt, wenn der Punkt $\bar{P}(u; v)$ in diesem Hilfssystem im Inneren oder auf dem Rande des schraffierten Gebietes G liegt. Von der Kurve $\bar{C}$ im Hilfssystem liefern also nur diejenigen Bogenstücke, die in diesem Gebiete liegen, Beiträge an die Kurve C, deren Verlauf gut überblickt werden kann. Im Falle der Äquipotentialkurven sind diese Stücke von $\bar{C}$ in G außerdem symmetrisch in bezug auf die Gerade $v = u$. Diese letzte Bemerkung und der Umstand, daß das Gebiet G nur einen kleinen Teil der $(u; v)$-Ebene überdeckt, lassen erwarten, daß unter den Äquipotentialkurven keine große Vielfalt der Formen auf-

treten wird. Tatsächlich läßt sich eine große Klasse von Funktionen angeben, die einigen wenigen Haupttypen angehören, welche nun an je einem Vertreter untersucht werden sollen.

1. *Typus.* Als Beispiel diene

$$u^2+v^2=r^2.$$

Im $(u; v)$-System erhalten wir eine Schar von Kreisen um den Ursprung. Bei wachsendem r liegen in G zunächst Bögen, die die Basis von G schneiden, ihnen entsprechen im $(x; y)$-System geschlossene Kurven um O, die die x-Achse innerhalb F_1 und F_2 treffen. Dann folgt im Hilfssystem ein Kreisbogen durch die Ecken von G, zu ihm gehört eine geschlossene Kurve durch F_1 und F_2. Bei noch größerem r werden die

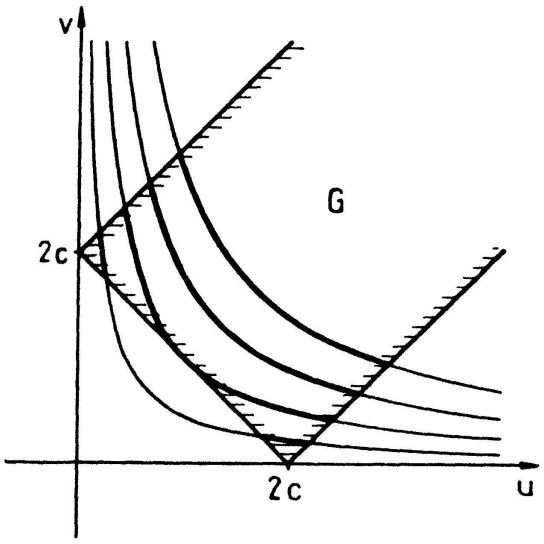

Fig. 2

parallelen Seiten von G getroffen, diesen Bögen entsprechen Kurven, die F_1 und F_2 einschließen. Für alle Kurven gilt, daß jede von ihnen alle anderen mit kleinerem r einschließt. Bekanntlich handelt es sich auch im $(x; y)$-System um die Schar der Kreise um O, ihre Orthogonaltrajektorien sind die Strahlen aus O.

Grundsätzlich gleiches Verhalten der Kurven $\overline{C}$ im Gebiete G läßt nun auf Scharen schließen, die durch bloße Verzerrung der besprochenen entstehen, die Kurvennetze sind topologisch identisch. Das ist zum Beispiel der Fall bei den Gleichungen

$$u^\alpha+v^\alpha=r^\alpha \qquad \text{für jedes } \alpha>1,$$

und

$$e^u+e^v=p \qquad \text{wo } p>2.$$

2. *Typus.* Beispiel:

$$\ln u+\ln v=r;$$

oder

$$u\,v=p^2.$$

Die Kurven $\overline{C}$ sind gleichseitige Hyperbeln (siehe Fig. 2), die zunächst den Rand von G in vier Punkten schneiden und dann nur noch die parallelen Seiten treffen. Als Grenzlage ergibt sich eine Hyperbel, die die Basis von G berührt. Hieraus läßt sich folgendes Verhalten der Kurven C ablesen: Zunächst entstehen zwei getrennte Ovale um F_1 und F_2, die mit wachsendem p größer werden und sich im Grenzfall zu einer Lemniskate vereinigen, nachher erhält man geschlossene Kurven, die F_1 und F_2

einschließen. Die der Lemniskate benachbarten geschlossenen Kurven müssen aus Stetigkeitsgründen auf der y-Achse eingebuchtet sein, mit wachsendem p verliert sich diese Einbuchtung. Es handelt sich um die bekannte Schar der CASSINIschen Kurven, die Lemniskate ist eine BERNOULLIsche, die Orthogonaltrajektorien sind die gleichseitigen Hyperbeln mit dem gemeinsamen Durchmesser F_1F_2 (siehe Fig. 3).

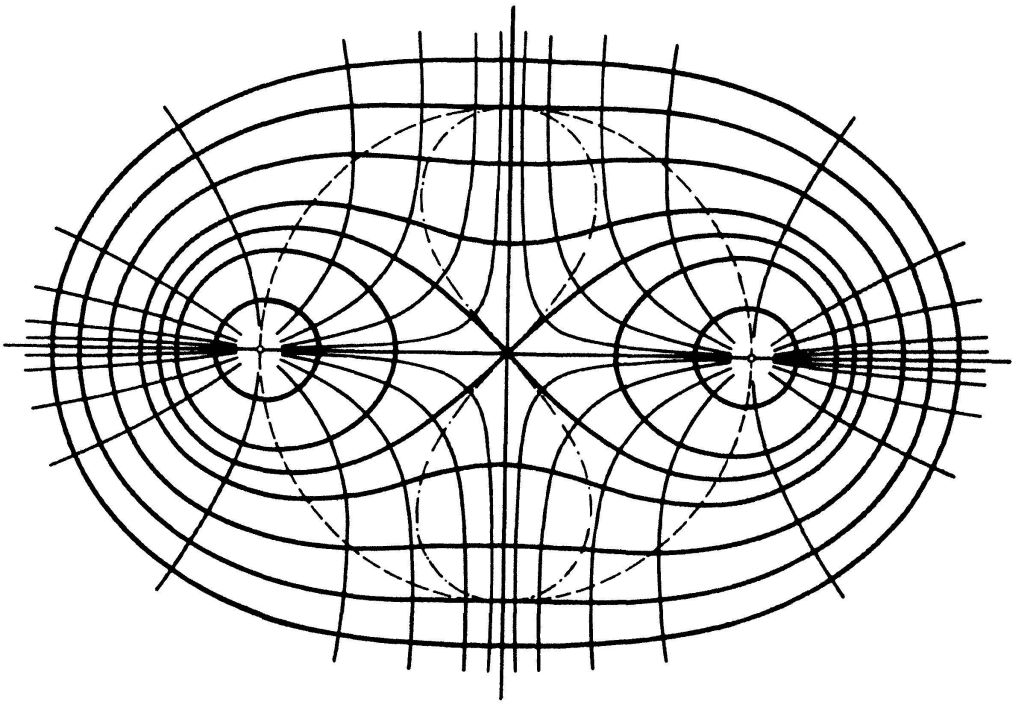

Fig. 3

Gleiches Verhalten in dem bei Typus 1 besprochenen Sinne zeigen zum Beispiel die Kurvenscharen mit der Gleichung

$$u^\alpha + v^\alpha = r^\alpha \quad \text{für} \quad \alpha < 1\,;\, \alpha \neq 0\,.$$

Für $0 < \alpha < 1$ ergeben sich in der $(u\,;v)$-Ebene astroidenähnliche, für $\alpha < 0$ hyperbolische Äste mit den Asymptoten $u = r$ und $v = r$, die teilweise in G liegen können. Ist speziell $\alpha = -1$, so entsteht die Schar der Äquipotentialkurven im engeren Sinne. Sie sind von achter Ordnung und können leicht aus den CASSINIschen Kurven gefunden werden. Aus

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{2}{a}$$

folgt nämlich

$$\left(u - \frac{a}{2}\right)\left(v - \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Wenn man also die beiden Radienvektoren eines Punktes der CASSINIschen Kurve

$$u\,v = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

je um $\frac{a}{2}$ verlängert, erhält man die Radien eines Punktes der neuen Kurve mit dem Parameter a.

Für $\alpha = -2$ handelt es sich um Kurven vierter Ordnung. Während bei den CASSINIschen Kurven, die von derselben Ordnung sind, die Extremstellen außer auf der

y-Achse auf dem Kreise mit dem Durchmesser $F_1 F_2$ liegen, besteht in diesem Falle der Ort der Extremstellen aus der y-Achse und der CASSINIschen Kurve $u v = 2 c^2$, deren Pole in den Punkten $(0; \pm c)$ liegen. In Fig. 3 ist das die zweitäußerste gezeichnete Kurve, die erste, die keinen Wendepunkt mehr aufweist. (In Fig. 3 ist der Ort der Extremstellen gestrichelt, der Ort der Wendepunkte, eine BERNOULLIsche Lemniskate, strichpunktiert eingezeichnet.) Die Tangenten im Doppelpunkt der Lemniskate für $\alpha = -2$ haben die Steigungen $\pm\sqrt{3}$. Da aus

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{2}{a^2}$$

$$\left(u^2 - \frac{a^2}{2}\right)\left(v^2 - \frac{a^2}{2}\right) = \left(\frac{a^2}{2}\right)^2$$

folgt, ist ersichtlich, daß auch diese Kurvenschar aus den CASSINIschen Kurven gewonnen werden kann. Aus den Radien von

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \frac{a^2}{2}$$

findet man vermöge

$$u^2 = \bar{u}^2 + \frac{a^2}{2} \quad \text{und} \quad v^2 = \bar{v}^2 + \frac{a^2}{2}$$

die Radien eines Punktes der neuen Schar, der auf der Kurve mit dem Parameter a liegt. Die Transformation ist konstruktiv leicht durchzuführen.

Die konfokalen Ellipsen für $\alpha = 1$ sind als Grenzfall zwischen Typus 1 und Typus 2 anzusprechen.

3. *Typus.* Beispiel:

$$|u^2 - v^2| = p^2.$$

Die Kurven $\bar{C}$ sind gleichseitige Hyperbeln, die alle die Asymptote $v = u$ haben, alle verlaufen demnach schließlich in G. Sämtliche Kurven C sind also offen, in unserem Falle handelt es sich um die Geraden $x =$ konst. mit den Orthogonaltrajektorien $y =$ konst. Zu diesem Typus gehören unter anderen die Gleichungen

$$|u^\alpha - v^\alpha| = p^\alpha \quad \text{für} \quad \alpha > 1,$$

und

$$|e^u - e^v| = p \quad \text{für} \quad p \geqq 0.$$

4. *Typus.* Beispiel:

$$|\ln u - \ln v| = p,$$

oder

$$\frac{v}{u} = \lambda, \; \lambda \geqq 0.$$

Die Kurven $\bar{C}$, Geraden durch O, treten alle durch die Basis in das Gebiet G ein und verlassen es wieder mit Ausnahme von $\lambda = 1$ über eine der parallelen Seiten. Mit Ausnahme der Geraden $v = u$ besteht die Schar der Kurven C also aus geschlossenen Kurven um F_1, bzw. F_2. Im Beispiel ist es die Schar der Kreise des APOLLONIUS in bezug auf F_1 und F_2. Die Extremstellen der Schar liegen auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = c^2$, eine Bemerkung, die beim Zeichnen solcher Kreise von Nutzen sein kann,

ihre Orthogonaltrajektorien sind die Kreise durch F_1 und F_2. Gleiches Verhalten zeigen zum Beispiel die Kurven mit der Gleichung

$$|u^\alpha - v^\alpha| = p^\alpha \quad \text{für } \alpha < 1;\ \alpha \neq 0.$$

Die konfokalen Hyperbeln für $\alpha = 1$ sind als Grenzfall der Typen 3 und 4 aufzufassen.

WILLI LÜSSY, Winterthur

Relation entre un théorème de Darboux et un théorème de Poncelet

Afin de faciliter au lecteur la compréhension de ce qui suit, rappelons quelques définitions et propriétés de géométrie projective plane.

Une involution de rayons est dite absolue lorsque à chaque rayon on fait correspondre le rayon perpendiculaire du même faisceau. Cette transformation ne possède pas d'élément double réel, mais bien une paire d'éléments doubles imaginaires, appelés rayons isotropes du faisceau ou droites isotropes par le sommet de celui-ci.

Les droites isotropes jouissent de propriétés curieuses et même paradoxales: en coordonnées rectangulaires, leur coefficient angulaire est égal à l'unité imaginaire positive ou négative; lors d'un changement de coordonnées rectangulaires, l'équation d'une droite isotrope garde la même forme. Menons les deux paires de droites isotropes passant par deux points distincts du plan; elles sont parallèles deux à deux; il existe donc deux points à l'infini, appelés points cycliques, chacun commun à une infinité de droites isotropes. L'ensemble de deux droites isotropes passant par un point réel constitue un cercle de rayon nul ayant ce point pour centre; il en résulte que deux points distincts d'une droite isotrope sont à distance nulle l'un de l'autre, d'où le nom de droites de longueur nulle donné parfois à ces droites. Le cercle de rayon nul ayant pour centre le centre d'un cercle constitue la paire d'asymptotes de ce cercle; celui-ci est tangent à ses asymptotes en ses points à l'infini, donc aux points cycliques; autrement dit, tous les cercles passent par les points cycliques. La distance d'un point du plan non situé sur une droite isotrope à celle-ci est infinie; elle est indéterminée si le point appartient à la droite isotrope considérée.

Par le sommet d'un angle φ, menons les deux droites isotropes j et k: avec les deux côtés a et b de l'angle, elles constituent un groupe de quatre droites appartenant à un faisceau et qui possède un rapport anharmonique $(ajbk)$. LAGUERRE[1]) a démontré la relation suivante entre l'angle φ et le rapport anharmonique $(abjk)$

$$e^{2i\varphi} = (abjk).$$

Cette relation est fort importante, car elle permet de ramener toutes les relations d'égalité ou de rapports d'angles à des relations correspondantes portant sur des

[1]) LAGUERRE, EDMOND, 1834–1886, géomètre et algébriste français. Il découvrit la formule qui porte son nom à l'âge de 16 ans.