Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 1 (1946)
Heft: 1

Artikel: Kleine Studie zum Tangentialpolyeder
Autor: Hadwiger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1196

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Remarques

En principe, le tracé d'une droite par deux points donnés est un problème linéaire et projectif; il est soluble avec la règle seule. C'est bien ce que donnent les solutions de LAMBERT et de D'OCAGNE. Cependant, si l'intersection des droites données s'éloigne indéfiniment, l'une des droites données est inutile; le problème perd son caractère projectif; devenu métrique, il exige l'emploi du compas ou de l'équerre. C'est ce qui ressort des procédés orthocentriques et des triangles semblables, qui d'ailleurs deviennent l'équivalent des artifices classiques de tracé des parallèles, ou même perdent tout intérêt.

Du point de vue de la brièveté des constructions avec la règle seule, le procédé D'OCAGNE est supérieur à celui de LAMBERT, mais il conduit facilement à des constructions encombrantes, et on ne voit pas d'un coup d'œil, à l'avance, l'ensemble de la construction.

Si l'on emploie l'équerre, le procédé orthocentrique est excellent et généralement peu encombrant, d'autant moins que les droites données convergent en un point plus éloigné. Il conduit en outre à ne marquer que deux points sur les droites données; peu encombrant du point de vue de la place exigée, il l'est aussi par le petit nombre de tracés.

PAUL ROSSIER, Genève

Kleine Studie zum Tangentialpolyeder

Es bezeichne V das Volumen und F die Oberfläche eines Tangentialpolyeders. Unter einem Tangentialpolyeder verstehen wir hier ein konvexes Polyeder, dessen Seitenflächen alle die Inkugel berühren.

Eine in der Theorie der Polyeder wichtige Maßzahl, nämlich die sog. Kantenkrümmung, ist eng verwandt mit der folgenden Größe K:

$$K = \sum s_i \cdot \operatorname{cotg} \frac{\varphi_i}{2}.$$

Hierbei bezeichnet s_i die Länge der i-ten Kante des Polyeders und φ_i den im Innern des Polyeders durchmessenen Neigungswinkel der beiden an der i-ten Kante zusammenstoßenden Seitenflächen; die Summation ist über sämtliche Kanten des Polyeders zu erstrecken.

Das Ziel der vorliegenden kleinen Mitteilung ist es, durch zweckmäßige Verwendung einiger beim Tangentialpolyeder bestehenden stereometrischen und trigonometrischen Beziehungen gewisse Relationen abzuleiten, die zwischen den oben eingeführten Polyedermaßzahlen K, F und V bestehen. Diese Relationen stehen in engem Zusammenhang mit den allgemeinen Hauptformeln der MINKOWSKIschen Theorie der konvexen Körper. Die vorliegende Studie zeigt, daß diese fraglichen Relationen, insbesondere die isoperimetrische Ungleichung, im Falle des Tangentialpolyeders einen durchaus elementaren Charakter haben.

Mit den beiden klassischen Ungleichungen von MINKOWSKI eng verwandt sind die Beziehungen

$$K^2 - 4\pi F > 0 \tag{1}$$

$$F^2 - 3KV \geqq 0\,. \tag{2}$$

Durch Elimination von K (man quadriere etwa (2) und ersetze dann K^2 nach (1)) entsteht aus (1) und (2) die berühmte isoperimetrische Ungleichung

$$F^3 - 36\pi V^2 > 0, \tag{3}$$

welche bekanntlich die Tatsache ausdrückt, daß eine mit dem Polyeder oberflächengleiche Kugel ein größeres Volumen aufweist.

Eine für allgemeine Polyeder gültige Ableitung von (3), die restlos mit elementaren Mitteln arbeitet, liegt m. W. bis heute nicht vor. Zeigen wir jetzt, daß sich im Falle eines Tangentialpolyeders für alle in den Ungleichungen (1), (2) und (3) auf der linken Seite stehenden Ausdrücke sichtbar positive einfache Ausdrücke ergeben:

Multiplizieren wir die Definitionsgleichung für K mit dem Inkugelradius r und beachten wir, daß sich $r \operatorname{cotg} \frac{\varphi_i}{2}$ deuten läßt als Höhe in einem Teildreieck der an der i-ten Kante anschließenden Seitenfläche, dessen Scheitel im Berührungspunkt der Seitenfläche mit der Inkugel liegt und dessen Basislinie durch die i-te Kante gegeben ist, so ergibt sich die Beziehung

$$rK = F. \tag{4}$$

Zerlegen wir andererseits das Polyeder in Pyramiden, deren Scheitel im Zentrum der Inkugel liegen und deren Basisflächen durch die Seitenflächen des Polyeders gegeben sind, so ergibt sich im Hinblick darauf, daß alle diese Pyramiden den Inkugelradius r als Höhe besitzen, die Relation

$$rF = 3V. \tag{5}$$

Die Verbindung von (4) und (5) liefert endlich

$$r^2K = 3V. \tag{6}$$

Wenn wir jetzt in dem in (1) stehenden Ausdruck F nach (5) und K nach (6) ersetzen, so resultiert

$$K^2 - 4\pi F = \frac{9V}{r^4}\left(V - \frac{4\pi}{3} r^3\right). \tag{7}$$

Unterwerfen wir den in (2) stehenden Ausdruck der analogen Verwandlung, so ergibt sich

$$F^2 - 3KV = 0. \tag{8}$$

Indem wir noch im isoperimetrischen Ausdruck auf der linken Seite von (3) F nach (5) ersetzen, so erhalten wir schließlich

$$F^3 - 36\pi V^2 = \frac{27V^2}{r^3}\left(V - \frac{4\pi}{3} r^3\right). \tag{9}$$

Da nun $V - \frac{4\pi}{3} r^3$ den Volumenüberschuß des Polyeders gegenüber der Inkugel darstellt, ist hiermit gezeigt, daß die drei MINKOWSKIschen Defizite (1), (2) und (3) für Tangentialpolyeder in der Tat nicht negativ sind. Insbesondere hat sich für das isoperimetrische Defizit ein einfacher expliziter positiver Ausdruck ergeben.

H. HADWIGER, Bern