

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 1 (1946)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Sur les droites associées de l'espace à n dimensions  
**Autor:** Kollros, Luis / Longhi, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1193>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$y = mx, \quad y = -\frac{1}{m}(x - x_2), \quad y - y_3 = m(x - x_3), \quad y - y_4 = -\frac{1}{m}(x - x_4).$$

Bei einem Quadrat fällt die Winkelhalbierende des ersten Seitenpaares mit jener des zweiten Paares zusammen, das heißt die Gleichungen

$$\frac{y - mx}{\sqrt{1 + m^2}} = \pm \frac{ym + x - x_2}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad \frac{y - mx + mx_3 - y_3}{\sqrt{1 + m^2}} = \pm \frac{ym + x - my_4 - x_4}{\sqrt{1 + m^2}}$$

sind identisch. Dies ist der Fall, wenn

$$m = \frac{x_2 - x_4 \pm y_3}{y_4 \pm x_3}$$

ist, einem leicht konstruierbaren Ausdruck.

Die Richtung bleibt unbestimmt, wenn zugleich

$$x_2 - x_4 \pm y_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_4 \pm x_3 = 0$$

wird. Es sei der Vektor  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AC}$  und  $\mathbf{b} = \overrightarrow{BD}$ , dann ist

$$|\mathbf{a}|^2 = x_3^2 + y_3^2 = y_4^2 + (x_4 - x_2)^2 = |\mathbf{b}|^2,$$

d. h. die Vektoren sind gleich lang. Außerdem ist

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_3(x_4 - x_2) + y_3 y_4 = 0,$$

das heißt, die Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Stehen die Strecken  $AC$  und  $BD$  senkrecht aufeinander und sind gleich lang, dann gibt es unendlich viele umgezeichnete Quadrate.

P. BUCHNER, Basel

## Sur les droites associées de l'espace à $n$ dimensions

Extraits d'une correspondance échangée entre Messieurs

*Louis Kollros (Zurich) et A. Longhi (Lugano)*

KOLLROS à LONGHI (9 juillet et 26 octobre 1945):

...  $(n + 1)$  droites de l'espace à  $n$  dimensions  $E_n$  sont dites *associées*, si tout espace linéaire  $E_{n-2}$  qui en rencontre  $n$  coupe aussi la dernière.

Dans un mémoire intitulé: «Erweiterung des Satzes, daß zwei polare Dreiecke perspektivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen» (CRELLE 65, p. 189–197), SCHLÄFLI a démontré le théorème: *Les droites joignant les paires de sommets correspondants de deux simplexes polaires réciproques par rapport à une quadrique de  $E_n$  sont associées.* Le théorème inverse a été démontré par BERZOLARI (Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XX, 1905, p. 229–247): Si les droites joignant les sommets homologues de deux simplexes de  $E_n$  sont associées, ces simplexes sont polaires réciproques par rapport à une quadrique de  $E_n$ .

On peut en déduire les deux corollaires suivants:

- 1) Les  $(n+1)$  hauteurs d'un simplexe de  $E_n$  sont associées.
- 2) Pour que  $(n+1)$  droites passant respectivement par les  $(n+1)$  sommets d'un simplexe de  $E_n$  soient associées, il faut et il suffit qu'elles joignent chaque sommet du simplexe au point de contact de la face opposée avec une quadrique inscrite au simplexe.

Comme une quadrique de  $E_n$  est déterminée par  $\frac{1}{2}n(n+3)$  de ses hyperplans tangents indépendants et que la donnée d'un  $E_{n-1}$  tangent avec son point de contact équivaut à  $n$  hyperplans tangents, il résulte du corollaire 2) que si l'on veut mener par les sommets d'un simplexe de  $E_n$  des droites associées, on peut en donner au plus  $1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ , ( $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  désignant le plus grand nombre entier  $\leq \frac{n}{2}$ ). Pour  $n \geq 4$ , il faut cependant que les conditions imposées ainsi à la quadrique inscrite soient compatibles.

Votre démonstration de ce résultat m'intéresserait ainsi que celle de votre théorème relatif aux  $1 + \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$  droites de  $E_n$  qui déterminent des groupes de  $(n+1)$  droites associées en nombre fini ou infini; pour  $n=4$ , c'est le théorème de SEGRE: tous les plans  $E_3$  incidents à 4 droites de  $E_4$  en coupent encore *une seule* cinquième; tandis que, pour  $n=3$ , les droites de  $E_3$  incidentes à 3 droites données en coupent encore *une infinité* d'autres.

Pour  $n > 4$ , ce nombre  $1 + \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$  est une *borne* supérieure; il est possible que la *limite* supérieure exacte soit plus petite.

LONGHI à KOLLROS (13 juillet 1945):

... Come risulta dal Vostro corollario 2) i gruppi di  $(n+1)$  rette associate passanti per i vertici di un *simplexe*  $\Sigma$  dello spazio  $E_n$  ad  $n$  dimensioni, sono tanti quante le quadriche di  $E_n$  inscritte in  $\Sigma$ , e quindi formano una totalità di dimensione:

$$\sigma = \frac{1}{2}n(n+3) - (n+1) = \frac{1}{2}(n-1)(n+2).$$

D'altra parte, in  $E_n$  il passaggio di una retta per un punto impone alla retta stessa  $n-1$  condizioni (semplici); ne segue che *tutti i gruppi di  $(n+1)$  rette associate di  $E_n$  costituiscono un sistema algebrico di dimensione:*

$$\tau = \sigma + (n-1)(n+1) = \frac{1}{2}(n-1)(3n+4).$$

Ora, per fissare in  $E_n$  una retta variabile, uscente da un vertice di  $\Sigma$ , occorre sottoporla ad  $n-1$  condizioni; pertanto sono  $\infty^{\sigma - (n-1)x}$  le  $(n+1)$ -uple di rette associate passanti per i vertici di  $\Sigma$  e contenenti ciascuna  $x$  rette preassegnate. Per l'effettiva esistenza di tali  $(n+1)$ -uple dev'essere  $\sigma - (n-1)x \geq 0$ , cioè:

$$x \leq \frac{1}{2}(n+2).$$

Il massimo valore di  $x$  è quindi  $\xi = 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ ; e si ha allora:

$$\sigma - (n-1)\xi = (n-1) \left( \frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right).$$

Dunque:

*In un gruppo di  $(n+1)$  rette associate passanti per i vertici di  $\Sigma$  si possono assegnare ad arbitrio al più  $1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  rette; e dopo ciò il gruppo è completabile in  $\infty^{(n-1) \left( \frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)}$  modi diversi.*

La condizione perchè una retta di  $E_n$  coincida con una data ha la dimensione  $2(n-1)$ ; ne risulta che fra gli  $\infty^\tau$  gruppi di  $(n+1)$  rette associate di  $E_n$  ve ne sono  $\infty^{\tau-2(n-1)y}$  aventi ciascuna  $y$  rette prestabilite; purchè, naturalmente, sia

$$\tau - 2(n-1)y \geq 0,$$

cioè:

$$y \leq \frac{1}{4}(3n+4).$$

Il massimo valore di  $y$  è allora  $\eta = 1 + \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$ ; e poichè:

$$\tau - 2(n-1)\eta = 2(n-1) \left( \frac{3n}{4} - \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor \right),$$

si conclude che:

*Il massimo numero di rette assegnabili genericamente in  $E_n$ , se si vuole che esse facciano insieme parte di almeno un gruppo di  $(n+1)$  rette associate, è uguale a  $1 + \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$ ; e la totalità delle  $(n+1)$ -uple di rette associate, che contengono un tal numero di rette prefissate, ha la dimensione:*

$$2(n-1) \left( \frac{3n}{4} - \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor \right).$$

Analogamente si stabilisce che:

*Se in un gruppo variabile di  $(n+1)$  rette associate di  $E_n$ , se ne costringono  $\mu$  a passare ciascuna per un punto dato e altre  $\nu$  a coincidere ciascuna con una retta data ( $\mu + \nu \leq n+1$ ), quel gruppo risulta determinato in  $\infty^\omega$  modi, ove:*

$$\omega = \frac{1}{2}(n-1)(3n+4-2\mu-4\nu),$$

*purchè sia  $\mu + 2\nu \leq n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$ .*

Quanto precede si può ulteriormente estendere in vario senso: come mostrerò in un lavoro di prossima pubblicazione.

*Osservazione (26. 10. 45).* E ovvio che le conclusioni precedenti presuppongono la compatibilità e indipendenza delle condizioni imposte ai gruppi di rette considerati: altrimenti è possibile che i massimi  $1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$  e  $1 + \left\lfloor \frac{3n}{4} \right\rfloor$  subiscano una riduzione.