# Sur les droites associées de l'espace à n dimensions

Autor(en): **Kollros, Luis / Longhi, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **1 (1946)**

Heft 1

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-1193

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

$$y = mx,\quad y = -\frac{1}{m}(x - x_2),\quad y - y_3 = m(x - x_3),\quad y - y_4 = -\frac{1}{m}(x - x_4).$$

Bei einem Quadrat fällt die Winkelhalbierende des ersten Seitenpaares mit jener des zweiten Paares zusammen, das heißt die Gleichungen

$$\frac{y - mx}{\sqrt{1+m^2}} = \pm\frac{ym + x - x_2}{\sqrt{1+m^2}},\quad \frac{y - mx + mx_3 - y_3}{\sqrt{1+m^2}} = \pm\frac{ym + x - my_4 - x_4}{\sqrt{1+m^2}}$$

sind identisch. Dies ist der Fall, wenn

$$m = \frac{x_2 - x_4 \pm y_3}{y_4 \pm x_3}$$

ist, einem leicht konstruierbaren Ausdruck.

Die Richtung bleibt unbestimmt, wenn zugleich

$$x_2 - x_4 \pm y_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_4 \pm x_3 = 0$$

wird. Es sei der Vektor $\mathfrak{a} = \overrightarrow{AC}$ und $\mathfrak{b} = \overrightarrow{BD}$, dann ist

$$|\mathfrak{a}|^2 = x_3^2 + y_3^2 = y_4^2 + (x_4 - x_2)^2 = |\mathfrak{b}|^2,$$

d. h. die Vektoren sind gleich lang. Außerdem ist

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} = x_3(x_4 - x_2) + y_3 y_4 = 0,$$

das heißt, die Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Stehen die Strecken $AC$ und $BD$ senkrecht aufeinander und sind gleich lang, dann gibt es unendlich viele umgezeichnete Quadrate.

P. BUCHNER, Basel

---

# Sur les droites associées de l'espace à $n$ dimensions

Extraits d'une correspondance échangée entre Messieurs

*Louis Kollros (Zurich) et A. Longhi (Lugano)*

KOLLROS à LONGHI (9 juillet et 26 octobre 1945):

... $(n+1)$ droites de l'espace à $n$ dimensions $E_n$ sont dites *associées*, si tout espace linéaire $E_{n-2}$ qui en rencontre $n$ coupe aussi la dernière.

Dans un mémoire intitulé: «Erweiterung des Satzes, daß zwei polare Dreiecke perspektivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen» (CRELLE 65, p. 189–197), SCHLÄFLI a démontré le théorème: *Les droites joignant les paires de sommets correspondants de deux simplexes polaires réciproques par rapport à une quadrique de $E_n$ sont associées.* Le théorème inverse a été démontré par BERZOLARI (Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XX, 1905, p. 229–247): Si les droites joignant les sommets homologues de deux simplexes de $E_n$ sont associées, ces simplexes sont polaires réciproques par rapport à une quadrique de $E_n$.

On peut en déduire les deux corollaires suivants:

1) Les $(n+1)$ hauteurs d'un simplexe de $E_n$ sont associées.
2) Pour que $(n+1)$ droites passant respectivement par les $(n+1)$ sommets d'un simplexe de $E_n$ soient associées, il faut et il suffit qu'elles joignent chaque sommet du simplexe au point de contact de la face opposée avec une quadrique inscrite au simplexe.

Comme une quadrique de $E_n$ est déterminée par $\frac{1}{2}n(n+3)$ de ses hyperplans tangents indépendants et que la donnée d'un $E_{n-1}$ tangent avec son point de contact équivaut à $n$ hyperplans tangents, il résulte du corollaire 2) que *si l'on veut mener par les sommets d'un simplexe de $E_n$ des droites associées, on peut en donner au plus* $1+\left[\frac{n}{2}\right]$, $\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right.$ désignant le plus grand nombre entier $\left.\leqq \frac{n}{2}\right)$. Pour $n \geqq 4$, il faut cependant que les conditions imposées ainsi à la quadrique inscrite soient compatibles.

Votre démonstration de ce résultat m'intéresserait ainsi que celle de votre théorème relatif aux $1+\left[\frac{3n}{4}\right]$ droites de $E_n$ qui déterminent des groupes de $(n+1)$ droites associées en nombre fini ou infini; pour $n=4$, c'est le théorème de SEGRE: tous les plans $E_2$ incidents à 4 droites de $E_4$ en coupent encore *une seule* cinquième; tandis que, pour $n=3$, les droites de $E_3$ incidentes à 3 droites données en coupent encore *une infinité* d'autres.

Pour $n>4$, ce nombre $1+\left[\frac{3n}{4}\right]$ est une *borne* supérieure; il est possible que la *limite* supérieure exacte soit plus petite.

LONGHI à KOLLROS (13 juillet 1945):

... Come risulta dal Vostro corollario 2) i gruppi di $(n+1)$ rette associate passanti per i vertici di un *simplexe* $\Sigma$ dello spazio $E_n$ ad $n$ dimensioni, sono tanti quante le quadriche di $E_n$ inscritte in $\Sigma$, e quindi formano una totalità di dimensione:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}n(n+3)-(n+1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(n+2).$$

D'altra parte, in $E_n$ il passaggio di una retta per un punto impone alla retta stessa $n-1$ condizioni (semplici); ne segue che *tutti i gruppi di* $(n+1)$ *rette associate di* $E_n$ *costituiscono un sistema algebrico di dimensione*:

$$\tau = \sigma+(n-1)(n+1) = \tfrac{1}{2}(n-1)(3n+4).$$

Ora, per fissare in $E_n$ una retta variabile, uscente da un vertice di $\Sigma$, occorre sottoporla ad $n-1$ condizioni; pertanto *sono* $\infty^{\sigma-(n-1)x}$ *le* $(n+1)$*-uple di rette associate passanti per i vertici di* $\Sigma$ *e contenenti ciascuna* $x$ *rette preassegnate.* Per l'effettiva esistenza di tali $(n+1)$-uple dev'essere $\sigma-(n-1)x \geqq 0$, cioè:

$$x \leqq \tfrac{1}{2}(n+2).$$

Il massimo valore di $x$ è quindi $\xi = 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$; e si ha allora:

$$\sigma - (n-1)\,\xi = (n-1)\left(\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

Dunque:

*In un gruppo di $(n+1)$ rette associate passanti per i vertici di $\Sigma$ si possono assegnare ad arbitrio al più $1 + \left[\frac{n}{2}\right]$ rette; e dopo ciò il gruppo è completabile in $\infty^{(n-1)\left(\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]\right)}$ modi diversi.*

La condizione perchè una retta di $E_n$ coincida con una data ha la dimensione $2\,(n-1)$; ne risulta che *fra gli $\infty^\tau$ gruppi di $(n+1)$ rette associate di $E_n$ ve ne sono $\infty^{\tau - 2(n-1)y}$ aventi ciascuna $y$ rette prestabilite*; purchè, naturalmente, sia

$$\tau - 2\,(n-1)\,y \geqq 0,$$

cioè:

$$y \leqq \tfrac{1}{4}\,(3n+4).$$

Il massimo valore di $y$ è allora $\eta = 1 + \left[\frac{3n}{4}\right]$; e poichè:

$$\tau - 2\,(n-1)\,\eta = 2\,(n-1)\left(\frac{3n}{4} - \left[\frac{3n}{4}\right]\right),$$

si conclude che:

*Il massimo numero di rette assegnabili genericamente in $E_n$, se si vuole che esse facciano insieme parte di almeno un gruppo di $(n+1)$ rette associate, è uguale a $1 + \left[\frac{3n}{4}\right]$; e la totalità delle $(n+1)$-uple di rette associate, che contengono un tal numero di rette prefissate, ha la dimensione:*

$$2\,(n-1)\left(\frac{3n}{4} - \left[\frac{3n}{4}\right]\right).$$

Analogamente si stabilisce che:

*Se in un gruppo variabile di $(n+1)$ rette associate di $E_n$, se ne costringono $\mu$ a passare ciascuna per un punto dato e altre $\nu$ a coincidere ciascuna con una retta data $(\mu + \nu \leqq n+1)$, quel gruppo risulta determinato in $\infty^\omega$ modi, ove:*

$$\omega = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(3n + 4 - 2\mu - 4\nu),$$

*purchè sia $\mu + 2\,\nu \leqq n + \left[\frac{n}{2}\right] + 2$.*

Quanto precede si può ulteriormente estendere in vario senso: come mostrerò in un lavoro di prossima pubblicazione.

*Osservazione* (26.10.45). È ovvio che *le conclusioni precedenti presuppongono la compatibilità e indipendenza delle condizioni imposte ai gruppi di rette considerati:* altrimenti è possibile che i massimi $1 + \left[\frac{n}{2}\right]$ e $1 + \left[\frac{3n}{4}\right]$ subiscano una riduzione.