

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 1 (1946)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Aus der Theorie der geometrischen Konstruktionen  
**Autor:** Buchner, P  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1192>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math. Band 1 Nr. 1 Seiten 1-24 Basel, 15. Januar 1946

# Aus der Theorie der geometrischen Konstruktionen

Vor Jahresfrist habe ich den Schülern das folgende Problem als Preisaufgabe gestellt: In einer Ebene sind die vier Punkte  $A, B, C$  und  $D$  in allgemeiner Lage gegeben. Gesucht ist jenes Quadrat, dessen Seiten, oder deren Verlängerungen, durch die gegebenen Punkte gehen. Diese Aufgabe ist deswegen besonders reizvoll, weil sie auf sehr verschiedene Arten gelöst werden kann.

## 1. Elementargeometrische Lösung

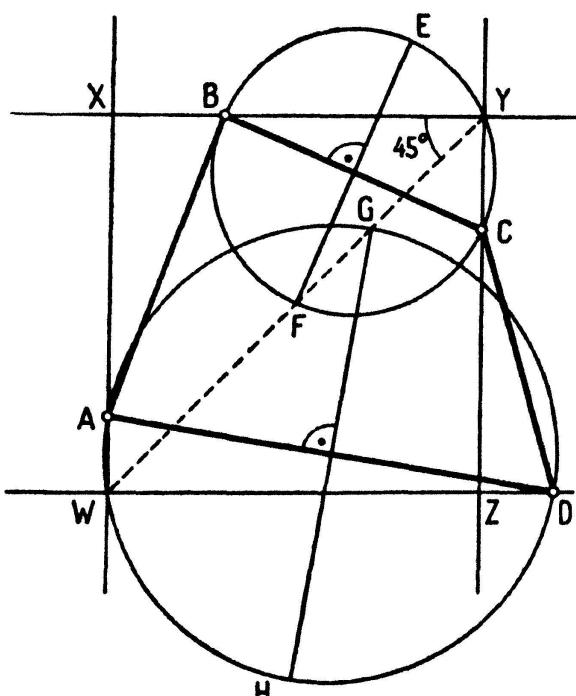


Fig. 1

Zu jeder Richtung durch  $A$  können durch  $C$  die Parallelen und durch  $B$  und  $D$  die Senkrechten gezogen werden, so daß es unendlich viele Rechtecke gibt, deren Seiten durch die vier gegebenen Punkte in der verlangten Art hindurchgehen.

Soll die umgezeichnete Figur  $WXYZ$  ein Quadrat sein, dann muß die Diagonale  $WY$  mit den Seiten Winkel von  $45^\circ$  einschließen. Der Thaleskreis über der Seite  $BC$  enthält die Ecke  $Y$  und schneidet überdies die Diagonale  $WY$  in der Bogenmitte  $F$  von  $BC$ . Ebenso geht der Thaleskreis über  $AD$  durch die Ecke  $W$  und trifft die

1-6 TD

80 Z. nat., 1039

23272

Diagonale  $WY$  in der Bogenmitte  $G$  von  $AD$ . Die Diagonale  $WY$  ist somit durch  $F$  und  $G$  bestimmt. Ebenso legen  $FH$ ,  $EG$  und  $EH$  Diagonalen weiterer umgezeichnete Quadrate fest. Verwendet man die Thaleskreise über  $AB$  und  $CD$ , so erhält man wiederum vier Lösungen, davon sind aber zwei mit den schon gefundenen Lösungen identisch, so daß die Aufgabe im allgemeinen sechs Lösungen zuläßt.

### 2. Trigonometrische Lösung

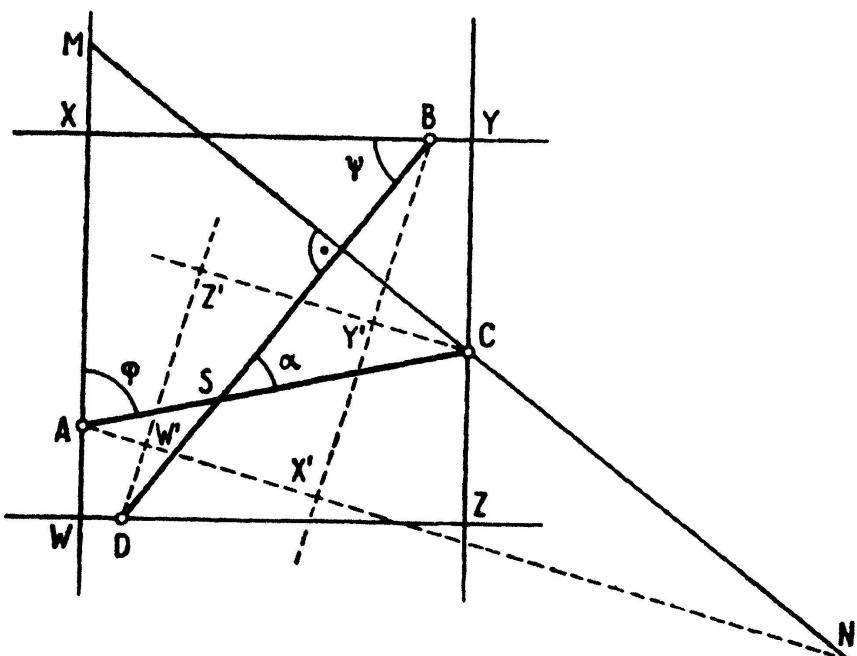


Fig. 2

Es sei  $\alpha$  der Winkel zwischen  $AC$  und  $BD$ ,  $\angle XAC = \varphi$  und  $\angle XBD = \psi$ , dann gilt bei der in der Figur angenommenen Lage

$$\varphi + \psi = 90^\circ + \alpha, \quad XY = AC \cdot \sin \varphi \quad \text{und} \quad WX = BD \cdot \sin \psi.$$

Soll die dem Viereck  $ABCD$  umgezeichnete Figur  $WXYZ$  ein Quadrat sein, dann muß

$$XY = WX \quad \text{oder} \quad \frac{AC}{BD} = \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} \quad \text{sein.}$$

Fällt man von  $C$  auf die Strecke  $BD$  das Lot  $CM = CN = BD$ , dann enthält das Dreieck  $ACM$  die gegebenen Seiten  $AC$ ,  $BD$  und den Zwischenwinkel  $90^\circ - \alpha$ , daher ist nach vorigem  $\angle CMA = \psi$  und  $M$  ein Punkt der Seite  $WX$ , die damit gefunden ist. An Stelle von  $M$  kann  $N$  treten, so daß man zwei Lösungen erhält. Wird die Strecke  $AC$  durch  $AB$  oder  $AD$  ersetzt, so erhält man vier weitere Lösungen.

Steht  $BD$  auf  $AC$  senkrecht, dann ist der Schnittpunkt  $S$  als ein doppeltzählendes, ausgeartetes Quadrat aufzufassen. Sind außerdem  $AC$  und  $BD$  gleich lang, dann gibt es unendlich viele Lösungen.

### 3. Lösung mit Hilfe der analytischen Geometrie

Der Koordinatenursprung werde in den Punkt  $A$  und die  $x$ -Achse durch  $B$  gelegt. Die vier gegebenen Punkte haben dann die Koordinaten  $A(0;0)$ ,  $B(x_2;0)$ ,  $C(x_3; y_3)$ ,  $D(x_4; y_4)$ . Die Gleichungen der Seiten eines umgezeichneten Rechteckes heißen dann

$$y = mx, \quad y = -\frac{1}{m}(x - x_2), \quad y - y_3 = m(x - x_3), \quad y - y_4 = -\frac{1}{m}(x - x_4).$$

Bei einem Quadrat fällt die Winkelhalbierende des ersten Seitenpaars mit jener des zweiten Paars zusammen, das heißt die Gleichungen

$$\frac{y - mx}{\sqrt{1+m^2}} = \pm \frac{ym + x - x_2}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \frac{y - mx + mx_3 - y_3}{\sqrt{1+m^2}} = \pm \frac{ym + x - my_4 - x_4}{\sqrt{1+m^2}}$$

sind identisch. Dies ist der Fall, wenn

$$m = \frac{x_2 - x_4 \pm y_3}{y_4 \pm x_3}$$

ist, einem leicht konstruierbaren Ausdruck.

Die Richtung bleibt unbestimmt, wenn zugleich

$$x_2 - x_4 \pm y_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_4 \pm x_3 = 0$$

wird. Es sei der Vektor  $a = \overrightarrow{AC}$  und  $b = \overrightarrow{BD}$ , dann ist

$$|a|^2 = x_3^2 + y_3^2 = y_4^2 + (x_4 - x_2)^2 = |b|^2,$$

d. h. die Vektoren sind gleich lang. Außerdem ist

$$a \cdot b = x_3(x_4 - x_2) + y_3 y_4 = 0,$$

das heißt, die Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

Stehen die Strecken  $AC$  und  $BD$  senkrecht aufeinander und sind gleich lang, dann gibt es unendlich viele umgezeichnete Quadrate.

P. BUCHNER, Basel

## Sur les droites associées de l'espace à $n$ dimensions

Extraits d'une correspondance échangée entre Messieurs  
*Louis Kollros (Zurich) et A. Longhi (Lugano)*

KOLLROS à LONGHI (9 juillet et 26 octobre 1945):

... ( $n+1$ ) droites de l'espace à  $n$  dimensions  $E_n$  sont dites *associées*, si tout espace linéaire  $E_{n-2}$  qui en rencontre  $n$  coupe aussi la dernière.

Dans un mémoire intitulé: «Erweiterung des Satzes, daß zwei polare Dreiecke perspektivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen» (CRELLE 65, p. 189–197), SCHLÄFLI a démontré le théorème: *Les droites joignant les paires de sommets correspondants de deux simplexes polaires réciproques par rapport à une quadrique de  $E_n$  sont associées*. Le théorème inverse a été démontré par BERZOLARI (Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. XX, 1905, p. 229–247): Si les droites joignant les sommets homologues de deux simplexes de  $E_n$  sont associées, ces simplexes sont polaires réciproques par rapport à une quadrique de  $E_n$ .