Eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer komplexen Funktion

von Kurt Meier, Winterthur

I. Ist die komplexe Funktion $f(z)$ $(z = x + iy)$ im Gebiet G stetig, existieren ferner in jedem Punkt z von G partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$, welche die Cauchy-Riemannsche Bedingung $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ erfüllen, so ist $f(z)$ in G regulär analytisch.

Das ist der Satz von Looman-Menchoff [1]). Aus seinem Beweis geht unmittelbar hervor, daß die Voraussetzungen etwas abgeschwächt werden können. So ist eine abzählbare Menge von Punkten des Gebietes G zulässig, in welchen nur die Stetigkeit von $f(z)$ gefordert werden muß. Auch auf die Voraussetzung, daß die Cauchy-Riemannsche Bedingung erfüllt ist, darf in den Punkten einer Menge vom Maß 0 verzichtet werden.

Im Gegensatz dazu strebt nun die vorliegende Arbeit eine gleichmäßige Abschwächung der Voraussetzungen in sämtlichen Punkten von G an. Es soll bewiesen werden, *daß für die Regularität von $f(z)$ im Gebiet G die folgenden Bedingungen hinreichen:*

$$f(z) \text{ sei stetig in } G\,. \tag{1}$$

Es existiere eine gegen 0 konvergierende Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ von positiven Zahlen mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkt z von G die Differenzenquotienten

$$\frac{f(z+r_\varkappa)-f(z)}{r_\varkappa}, \quad \frac{f(z+ir_\varkappa)-f(z)}{ir_\varkappa}, \quad \frac{f(z-r_\varkappa)-f(z)}{-r_\varkappa}, \quad \frac{f(z-ir_\varkappa)-f(z)}{-ir_\varkappa} \tag{2}$$

für $\varkappa \to \infty$ gegen den gleichen endlichen Grenzwert streben.

Der in den folgenden Abschnitten durchgeführte Beweis dieser Regularitätsbedingung stützt sich auf einen Satz von R. Baire [2]), den schon Looman und Menchoff im selben Sinn angewendet haben: Ist die abgeschlossene Menge F Vereinigungsmenge einer Folge von abgeschlossenen Mengen F_μ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$, so gibt es eine Kreisscheibe K und eine natürliche Zahl m, für welche $0 \subset K \cdot F \subseteq F_m$ ist.

II. Die Punkte z des Gebietes G, in deren Umgebung $f(z)$ nicht überall regulär ist, bilden eine perfekte Menge F. Wir gehen von der Annahme aus, F sei nicht leer.

---

[1]) Der Beweis dieses Satzes ist dargestellt in [2], Seiten 9–16.

[2]) Vgl. [3], Seite 54.

Unter F_μ ($\mu = 1, 2, 3, \ldots$) verstehen wir die Menge jener Punkte z von F, für welche $|f(z + r_\varkappa e^{i\varphi}) - f(z)| \leqslant \mu r_\varkappa$ immer dann gilt, wenn $\varkappa \geqslant \mu$ ist und φ einen der Werte $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ annimmt. Der Voraussetzung (1) zufolge sind die Mengen F_μ abgeschlossen. Ihre Vereinigungsmenge ist mit F identisch, denn wegen (2) gehört jeder Punkt von F mindestens einer der Mengen F_μ an.

Nach dem in Abschnitt I erwähnten Satz von R. BAIRE gibt es somit eine natürliche Zahl m, sowie eine Kreisscheibe $K(Z, 2R)$ mit dem Mittelpunkt Z und dem Radius $2R > 0$, für welche die Bedingungen $Z \in F$ und $0 \subset K \cdot F \subseteq F_m$ erfüllt sind.

Nun können wir die natürliche Zahl $M \geqslant m$ so festlegen, daß

$$|f(z + Re^{i\Phi}) - f(z)| \leqslant MR \tag{3}$$

unabhängig von Φ für jeden Punkt z von $K_0 = K(Z, R)$ gilt. Dies ist möglich, weil $f(z)$ in G stetig ist. Damit ist jetzt in jedem Punkt z von $F_0 = F \cdot K(Z, 2R)$ die Bedingung

$$|f(z + r_\varkappa e^{i\varphi}) - f(z)| \leqslant M r_\varkappa \tag{4}$$

immer dann erfüllt, wenn $\varkappa \geqslant m$ ist und φ einen der Werte $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ annimmt.

III. Unter der Voraussetzung, daß $f(z)$ in einer Umgebung des Punktes z_0 von K_0 regulär ist, soll in diesem Abschnitt die Gültigkeit von

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant M |z - z_0| \tag{5}$$

für $|z - z_0| \leqslant R$ nachgewiesen werden.

Setzen wir $D(z_0) = f'(z_0)$, so ist $D(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ eine in allen Punkten von G stetige Funktion. Ihr absoluter Betrag nimmt somit auf der Kreisscheibe $K(z_0, R)$ in einem Punkt ζ sein Maximum an. Für $|z - z_0| \leqslant R$ gilt daher

$$|D(z)| \leqslant |D(\zeta)| \,. \tag{6}$$

$D(z)$ ist in einer Umgebung jedes Punktes von $K(Z, 2R) - F_0$ regulär. Dies gilt insbesondere für z_0. ζ liegt infolgedessen entweder auf der Peripherie des Kreises $K(z_0, R)$ oder auf F_0. Im ersten Fall gilt wegen (3) $|D(\zeta)| \leqslant M$ und daraus folgt, unter Berücksichtigung von (6), die Ungleichung (5). Ist hingegen ζ ein innerer Punkt von $K(z_0, R)$, so verläuft der Beweis von (5) wie folgt:

Hat φ einen der Werte $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, so strebt gemäß Voraussetzung (2) der Differenzenquotient $\frac{f(\zeta + r_\varkappa e^{i\varphi}) - f(\zeta)}{r_\varkappa e^{i\varphi}}$ für $\varkappa \to \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert $a(\zeta)$. Unter den gleichen Bedingungen konvergiert somit

$$\frac{D(\zeta + r_\varkappa e^{i\varphi}) - D(\zeta)}{r_\varkappa e^{i\varphi}} = \frac{1}{\zeta - z_0 + r_\varkappa e^{i\varphi}} \left[\frac{f(\zeta + r_\varkappa e^{i\varphi}) - f(\zeta)}{r_\varkappa e^{i\varphi}} - D(\zeta)\right] \tag{7}$$

gegen den Grenzwert

$$A(\zeta) = \frac{a(\zeta) - D(\zeta)}{\zeta - z_0}\,. \tag{8}$$

Nun ist im weiteren Verlauf des Beweises die Annahme $D(\zeta) \neq 0$ erlaubt. Ist nämlich $D(\zeta) = 0$, so folgt aus (5) unmittelbar (6).

Es soll jetzt gezeigt werden, daß $A(\zeta) = 0$ ist. Zu diesem Zweck gehen wir von der Annahme $A(\zeta) \neq 0$ aus und leiten daraus einen Widerspruch her.

Für $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ist nach (7) und (8)

$$D(\zeta + r_\varkappa e^{i\varphi}) = D(\zeta) + A(\zeta) r_\varkappa e^{i\varphi} + r_\varkappa \varepsilon(r_\varkappa) \tag{9}$$

wobei $\varepsilon(r_\varkappa)$ für $\varkappa \to \infty$ gegen 0 strebt. Es sei $A(\zeta) = |A|\, e^{i\alpha}$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ und $D(\zeta) = |D|\, e^{i\delta}$ $(0 \leqslant \delta < 2\pi)$. Wegen $A \neq 0$ und $D \neq 0$ sind die Argumente α und δ eindeutig bestimmt.

Von den in (9) für φ zulässigen Werten $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ erfüllt sicher einer die Bedingung $\cos(\alpha - \delta + \varphi) > \frac{1}{2}$; wir bezeichnen ihn mit φ^*. Wegen $A \neq 0$ kann man die natürliche Zahl k so festlegen, daß $|\varepsilon(r_k)| < \frac{|A|}{2}$ und $r_k < R$ ist. Mit der neuen Bezeichnung $\zeta^* = \zeta + r_k e^{i\varphi^*}$ folgt somit aus (9)

$$e^{-i\delta} D(\zeta^*) = |D| + |A|\, r_k e^{i(\alpha - \delta + \varphi^*)} + r_k e^{-i\delta} \varepsilon(r_k)\,. \tag{10}$$

Wegen $\cos(\alpha - \delta + \varphi^*) > \frac{1}{2}$ ist aber $||D| + |A|\, r_k e^{i(\alpha-\delta+\varphi^*)}| > |D| + \frac{|A|\, r_k}{2}$ und daraus folgt, unter Berücksichtigung von $|\varepsilon(r_k)| < \frac{|A|}{2}$, aus (10) $|D(\zeta^*)| > |D(\zeta)|$. Diese Ungleichung steht im Widerspruch zu (6), denn ζ^* ist ein Punkt von $K(z_0, R)$, und damit ist $A(\zeta) = 0$ bewiesen.

Aus (8) folgt jetzt $a(\zeta) = D(\zeta)$ und weiter aus (4) $|a(\zeta)| \leqslant M$. Somit ist auch $|D(\zeta)| \leqslant M$ und endlich wegen (6) $|D(z)| \leqslant M$ für $|z - z_0| \leqslant R$. Das ist aber gleichbedeutend mit der am Anfang dieses Abschnittes aufgestellten Behauptung (5).

IV. Zum Schluß legen wir die natürliche Zahl $k_0 \geqslant m$ so fest, daß $r_\varkappa \leqslant R$ für alle $\varkappa \geqslant k_0$ gilt. Damit erfüllt nach (4) und (5) die Funktion $f(z)$ in jedem

Punkt z_0 von K_0 die Bedingungen

$$|f(z + r_\varkappa) - f(z)| \leqslant M r_\varkappa\,, \qquad |f(z + i r_\varkappa) - f(z)| \leqslant M r_\varkappa$$

für jedes $\varkappa \geqslant k_0$.

Setzen wir $Q(z_0, r_\varkappa) = \dfrac{f(z_0 + r_\varkappa) - f(z_0)}{r_\varkappa} - \dfrac{f(z_0 + i r_\varkappa) - f(z_0)}{i r_\varkappa}$ so gilt folglich für $z_0 \in K_0$ und $\varkappa \geqslant k_0$

$$|Q(z_0, r_\varkappa)| \leqslant 2M \tag{11}$$

und weiter wegen (2)

$$\lim_{\varkappa \to \infty} Q(z_0, r_\varkappa) = 0 \tag{12}$$

Aus (1), (11) und (12) geht aber hervor, daß $f(z)$ in K_0 regulär analytisch sein muß[3]). Im Widerspruch dazu enthält aber K_0 den Punkt Z von F. Die am Anfang von Abschnitt II gemachte Annahme $F \supset 0$ trifft daher nicht zu, das heißt $f(z)$ ist im ganzen Gebiet G regulär.

Herrn Prof. W. Saxer bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit zu herzlichem Dank verpflichtet.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Kurt Meier, *Über die Randwerte meromorpher Funktionen und hinreichende Bedingungen für Regularität von Funktionen einer komplexen Variablen,* Comment. Math. Helv., 24 (1952), 238–259.

[2] D. Menchoff, *Les conditions de monogénéité,* Actualités Sci. Ind. 329; Paris 1936.

[3] S. Saks, *Theory of the Integral,* New York 1937.

(Eingegangen den 21. Februar 1959)

[3]) Dies geht aus einem Satz hervor, der schon unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen die Regularität von $f(z)$ sichert. Vgl. [1], Seite 258.