

# Eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer komplexen Funktion.

Autor(en): **Meier, Kurt**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **34 (1960)**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26623>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer komplexen Funktion

VON KURT MEIER, Winterthur

I. Ist die komplexe Funktion  $f(z)$  ( $z = x + iy$ ) im Gebiet  $G$  stetig, existieren ferner in jedem Punkt  $z$  von  $G$  partielle Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x}$  und  $\frac{\partial f}{\partial y}$ , welche die CAUCHY-RIEMANNSCHE Bedingung  $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  erfüllen, so ist  $f(z)$  in  $G$  regulär analytisch.

Das ist der Satz von LOOMAN-MENCHOFF<sup>1)</sup>. Aus seinem Beweis geht unmittelbar hervor, daß die Voraussetzungen etwas abgeschwächt werden können. So ist eine abzählbare Menge von Punkten des Gebietes  $G$  zulässig, in welchen nur die Stetigkeit von  $f(z)$  gefordert werden muß. Auch auf die Voraussetzung, daß die CAUCHY-RIEMANNSCHE Bedingung erfüllt ist, darf in den Punkten einer Menge vom Maß 0 verzichtet werden.

Im Gegensatz dazu strebt nun die vorliegende Arbeit eine gleichmäßige Abschwächung der Voraussetzungen in sämtlichen Punkten von  $G$  an. Es soll bewiesen werden, daß für die Regularität von  $f(z)$  im Gebiet  $G$  die folgenden Bedingungen hinreichen:

$$f(z) \text{ sei stetig in } G. \quad (1)$$

Es existiere eine gegen 0 konvergierende Folge  $r_1, r_2, r_3, \dots$  von positiven Zahlen mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkt  $z$  von  $G$  die Differenzenquotienten

$$\frac{f(z + r_x) - f(z)}{r_x}, \frac{f(z + ir_x) - f(z)}{ir_x}, \frac{f(z - r_x) - f(z)}{-r_x}, \frac{f(z - ir_x) - f(z)}{-ir_x} \quad (2)$$

für  $x \rightarrow \infty$  gegen den gleichen endlichen Grenzwert streben.

Der in den folgenden Abschnitten durchgeführte Beweis dieser Regularitätsbedingung stützt sich auf einen Satz von R. BAIRE<sup>2)</sup>, den schon LOOMAN und MENCHOFF im selben Sinn angewendet haben: Ist die abgeschlossene Menge  $F$  Vereinigungsmenge einer Folge von abgeschlossenen Mengen  $F_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, \dots$ ), so gibt es eine Kreisscheibe  $K$  und eine natürliche Zahl  $m$ , für welche  $0 \subset K \cdot F \subseteq F_m$  ist.

II. Die Punkte  $z$  des Gebietes  $G$ , in deren Umgebung  $f(z)$  nicht überall regulär ist, bilden eine perfekte Menge  $F$ . Wir gehen von der Annahme aus,  $F$  sei nicht leer.

---

<sup>1)</sup> Der Beweis dieses Satzes ist dargestellt in [2], Seiten 9–16.

<sup>2)</sup> Vgl. [3], Seite 54.

Unter  $F_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, \dots$ ) verstehen wir die Menge jener Punkte  $z$  von  $F$ , für welche  $|f(z + r_\varkappa e^{i\varphi}) - f(z)| \leq \mu r_\varkappa$  immer dann gilt, wenn  $\varkappa \geq \mu$  ist und  $\varphi$  einen der Werte  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  annimmt. Der Voraussetzung (1) zufolge sind die Mengen  $F_\mu$  abgeschlossen. Ihre Vereinigungsmenge ist mit  $F$  identisch, denn wegen (2) gehört jeder Punkt von  $F$  mindestens einer der Mengen  $F_\mu$  an.

Nach dem in Abschnitt I erwähnten Satz von R. BAIRE gibt es somit eine natürliche Zahl  $m$ , sowie eine Kreisscheibe  $K(Z, 2R)$  mit dem Mittelpunkt  $Z$  und dem Radius  $2R > 0$ , für welche die Bedingungen  $Z \in F$  und  $0 \subset K \cdot F \subseteq F_m$  erfüllt sind.

Nun können wir die natürliche Zahl  $M \geq m$  so festlegen, daß

$$|f(z + Re^{i\Phi}) - f(z)| \leq MR \quad (3)$$

unabhängig von  $\Phi$  für jeden Punkt  $z$  von  $K_0 = K(Z, R)$  gilt. Dies ist möglich, weil  $f(z)$  in  $G$  stetig ist. Damit ist jetzt in jedem Punkt  $z$  von  $F_0 = F \cdot K(Z, 2R)$  die Bedingung

$$|f(z + r_\varkappa e^{i\varphi}) - f(z)| \leq Mr_\varkappa \quad (4)$$

immer dann erfüllt, wenn  $\varkappa \geq m$  ist und  $\varphi$  einen der Werte  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  annimmt.

III. Unter der Voraussetzung, daß  $f(z)$  in einer Umgebung des Punktes  $z_0$  von  $K_0$  regulär ist, soll in diesem Abschnitt die Gültigkeit von

$$|f(z) - f(z_0)| \leq M |z - z_0| \quad (5)$$

für  $|z - z_0| \leq R$  nachgewiesen werden.

Setzen wir  $D(z_0) = f'(z_0)$ , so ist  $D(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  eine in allen Punkten von  $G$  stetige Funktion. Ihr absoluter Betrag nimmt somit auf der Kreisscheibe  $K(z_0, R)$  in einem Punkt  $\zeta$  sein Maximum an. Für  $|z - z_0| \leq R$  gilt daher

$$|D(z)| \leq |D(\zeta)|. \quad (6)$$

$D(z)$  ist in einer Umgebung jedes Punktes von  $K(Z, 2R) - F_0$  regulär. Dies gilt insbesondere für  $z_0$ .  $\zeta$  liegt infolgedessen entweder auf der Peripherie des Kreises  $K(z_0, R)$  oder auf  $F_0$ . Im ersten Fall gilt wegen (3)  $|D(\zeta)| \leq M$  und daraus folgt, unter Berücksichtigung von (6), die Ungleichung (5). Ist hingegen  $\zeta$  ein innerer Punkt von  $K(z_0, R)$ , so verläuft der Beweis von (5) wie folgt:

Hat  $\varphi$  einen der Werte  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ , so strebt gemäß Voraussetzung (2)

der Differenzenquotient  $\frac{f(\zeta + r_\kappa e^{i\varphi}) - f(\zeta)}{r_\kappa e^{i\varphi}}$  für  $\kappa \rightarrow \infty$  gegen einen endlichen Grenzwert  $a(\zeta)$ . Unter den gleichen Bedingungen konvergiert somit

$$\frac{D(\zeta + r_\kappa e^{i\varphi}) - D(\zeta)}{r_\kappa e^{i\varphi}} = \frac{1}{\zeta - z_0 + r_\kappa e^{i\varphi}} \left[ \frac{f(\zeta + r_\kappa e^{i\varphi}) - f(\zeta)}{r_\kappa e^{i\varphi}} - D(\zeta) \right] \quad (7)$$

gegen den Grenzwert

$$A(\zeta) = \frac{a(\zeta) - D(\zeta)}{\zeta - z_0}. \quad (8)$$

Nun ist im weiteren Verlauf des Beweises die Annahme  $D(\zeta) \neq 0$  erlaubt. Ist nämlich  $D(\zeta) = 0$ , so folgt aus (5) unmittelbar (6).

Es soll jetzt gezeigt werden, daß  $A(\zeta) = 0$  ist. Zu diesem Zweck gehen wir von der Annahme  $A(\zeta) \neq 0$  aus und leiten daraus einen Widerspruch her.

Für  $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi, \varphi = \frac{3\pi}{2}$  ist nach (7) und (8)

$$D(\zeta + r_\kappa e^{i\varphi}) = D(\zeta) + A(\zeta)r_\kappa e^{i\varphi} + r_\kappa \varepsilon(r_\kappa) \quad (9)$$

wobei  $\varepsilon(r_\kappa)$  für  $\kappa \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt. Es sei  $A(\zeta) = |A| e^{i\alpha}$  ( $0 \leq \alpha < 2\pi$ ) und  $D(\zeta) = |D| e^{i\delta}$  ( $0 \leq \delta < 2\pi$ ). Wegen  $A \neq 0$  und  $D \neq 0$  sind die Argumente  $\alpha$  und  $\delta$  eindeutig bestimmt.

Von den in (9) für  $\varphi$  zulässigen Werten  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  erfüllt sicher einer die Bedingung  $\cos(\alpha - \delta + \varphi) > \frac{1}{2}$ ; wir bezeichnen ihn mit  $\varphi^*$ . Wegen  $A \neq 0$  kann man die natürliche Zahl  $k$  so festlegen, daß  $|\varepsilon(r_k)| < \frac{|A|}{2}$  und  $r_k < R$  ist. Mit der neuen Bezeichnung  $\zeta^* = \zeta + r_k e^{i\varphi^*}$  folgt somit aus (9)

$$e^{-i\delta} D(\zeta^*) = |D| + |A| r_k e^{i(\alpha - \delta + \varphi^*)} + r_k e^{-i\delta} \varepsilon(r_k). \quad (10)$$

Wegen  $\cos(\alpha - \delta + \varphi^*) > \frac{1}{2}$  ist aber  $||D| + |A| r_k e^{i(\alpha - \delta + \varphi^*)}| > |D| + \frac{|A| r_k}{2}$  und daraus folgt, unter Berücksichtigung von  $|\varepsilon(r_k)| < \frac{|A|}{2}$ , aus (10)  $|D(\zeta^*)| > |D(\zeta)|$ . Diese Ungleichung steht im Widerspruch zu (6), denn  $\zeta^*$  ist ein Punkt von  $K(z_0, R)$ , und damit ist  $A(\zeta) = 0$  bewiesen.

Aus (8) folgt jetzt  $a(\zeta) = D(\zeta)$  und weiter aus (4)  $|a(\zeta)| \leq M$ . Somit ist auch  $|D(\zeta)| \leq M$  und endlich wegen (6)  $|D(z)| \leq M$  für  $|z - z_0| \leq R$ . Das ist aber gleichbedeutend mit der am Anfang dieses Abschnittes aufgestellten Behauptung (5).

IV. Zum Schluß legen wir die natürliche Zahl  $k_0 \geq m$  so fest, daß  $r_\kappa \leq R$  für alle  $\kappa \geq k_0$  gilt. Damit erfüllt nach (4) und (5) die Funktion  $f(z)$  in jedem

Punkt  $z_0$  von  $K_0$  die Bedingungen

$$|f(z + r_\kappa) - f(z)| \leq M r_\kappa, \quad |f(z + i r_\kappa) - f(z)| \leq M r_\kappa$$

für jedes  $\kappa \geq k_0$ .

Setzen wir  $Q(z_0, r_\kappa) = \frac{f(z_0 + r_\kappa) - f(z_0)}{r_\kappa} - \frac{f(z_0 + i r_\kappa) - f(z_0)}{i r_\kappa}$  so gilt folglich für  $z_0 \in K_0$  und  $\kappa \geq k_0$

$$|Q(z_0, r_\kappa)| \leq 2M \quad (11)$$

und weiter wegen (2)

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} Q(z_0, r_\kappa) = 0 \quad (12)$$

Aus (1), (11) und (12) geht aber hervor, daß  $f(z)$  in  $K_0$  regulär analytisch sein muß<sup>3)</sup>. Im Widerspruch dazu enthält aber  $K_0$  den Punkt  $Z$  von  $F$ . Die am Anfang von Abschnitt II gemachte Annahme  $F \supset 0$  trifft daher nicht zu, das heißt  $f(z)$  ist im ganzen Gebiet  $G$  regulär.

Herrn Prof. W. SAXER bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit zu herzlichem Dank verpflichtet.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] KURT MEIER, *Über die Randwerte meromorpher Funktionen und hinreichende Bedingungen für Regularität von Funktionen einer komplexen Variablen*, Comment. Math. Helv., 24 (1952), 238–259.
- [2] D. MENCHOFF, *Les conditions de monogénéité*, Actualités Sci. Ind. 329; Paris 1936.
- [3] S. SAKS, *Theory of the Integral*, New York 1937.

(Eingegangen den 21. Februar 1959)

---

<sup>3)</sup> Dies geht aus einem Satz hervor, der schon unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen die Regularität von  $f(z)$  sichert. Vgl. [1], Seite 258.