Sui sistemi di forme quadratiche nel campo reale.

Autor(en): **Segre, Beniamino**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **28 (1954)**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22624

Sui sistemi di forme quadratiche nel campo reale

di Beniamino Segre, Roma

Dedicato a H. Hopf, in occasione del suo 60° compleanno

1. Nel lungo e fruttifero periodo dacchè è sorta, la *geometria algebrica* si è occupata soltanto sporadicamente, e quasi sempre in modo piuttosto frammentario, delle questioni concernenti gli enti algebrici considerati nel *campo reale*. I noti risultati relativi alle curve algebriche reali (dovuti a von Staudt, Harnack, Klein, Hilbert, Brusotti, ecc.) e quelli sulle superficie algebriche reali (dovuti principalmente a Comessatti) mostrano infatti già l'estrema difficoltà di teorie generali nel campo algebrico reale, e come non di rado problemi particolari, in apparenza assai semplici, possano nel fatto dimostrarsi tutt'altro che agevoli e ricchi d'imprevisto[1]).

Notevoli risultati di algebra reale furono ottenuti qualche tempo addietro da *H. Hopf* [5, 6] ed *E. Stiefel* [14], con riposti mezzi topologici non del tutto consoni alla natura delle questioni trattate. Lo stesso Hopf ha ripetutamente segnalato l'interesse di ritrovare quei risultati per via algebrica, ciò che fu parzialmente fatto da *F. Behrend* [2]; tuttavia restavano aperte diverse questioni in tale ordine d'idee, segnatamente quella riferentesi ad un bel risultato di *Hopf* sulle algebre reali ([5], nn. 3, 6), relativamente al quale il medesimo A. recentemente dichiarava (in [7], p. 91): „Ich glaube auch nicht, daß das Herz eines Algebraikers beruhigt wird durch den topologisch-metamathematischen Beweis des Satzes über die kommutativen Divisions-Algebren."

Nel presente lavoro, che sono lieto di dedicare all'illustre Collega ed amico *Heinz Hopf*, pervengo al suo risultato suaccennato quale particolarissimo corollario di un teorema — ottenuto nel n. 4 — concernente gli spazi lineari reali giacenti sulle quadriche di un sistema lineare asse-

---

[1]) Un classico esempio in proposito viene offerto dallo studio delle superficie cubiche nel campo reale, per il quale cfr. per esempio *B. Segre* [10], cap. III; per un esempio recente di altro tipo, cfr. *B. Segre* [11].

(Qui ed in seguito, i numeri entro parentesi quadre rinviano alla bibliografia posta alla fine del lavoro.)

gnato. Il procedimento con cui dimostro tale teorema ha carattere algebrico-geometrico, e si svolge nel campo reale poggiando essenzialmente sulle quattro ovvie proprietà che seguono.

a) Se una varietà algebrica V_δ è reale (rappresentabile cioè con un sistema di equazioni algebriche a coefficienti reali) e varia con continuità in uno spazio proiettivo reale, S_ν, contenendo sempre qualche S_ϱ reale, di questa stessa proprietà gode ogni *posizione limite* di V_δ.

b) Una qualunque V_δ algebrica reale d'ordine *dispari* di S_ν, incontra *ogni* $S_{\nu-\delta}$ reale di S_ν in qualche punto reale.

c) Sia W una porzione δ-dimensionale — luogo di punti semplici reali — di una V_δ algebrica di S_ν, tale che il contorno di quella appartenga ad una sottovarietà algebrica, U, di V_δ. Allora un $S_{\nu-\delta}$ reale, che vari con continuità in S_ν *senza mai incontrare la* U, ha a comune con W un numero di punti il quale — ove sia finito e tale che ciascuno di questi punti si computi in esso con la propria molteplicità d'intersezione — risulta *sempre pari o sempre dispari*.

d) Una V_δ algebrica a punti reali, che sia non singolare, di dimensione $\delta \geqslant 2$ e linearmente connessa, *si conserva connessa* quando da essa si asportino i punti di una qualunque sotto-varietà algebrica *di dimensione* $\leqslant \delta - 2$.

Rileviamo che la proprietà a) si estende facilmente al caso in cui V_δ, S_ν, S_ϱ siano definiti (anzichè sul campo reale) su si un qualunque *corpo commutativo*, sostituendo alla nozione di limite quella di specializzazione. La b) si estende poi dal campo reale ad un qualunque campo *realmente chiuso* (nel senso di *Artin* e *Schreier* [1]), com'è stato indicato da *F. Behrend* ([2], p. 15). È probabile che anche le c), d) possano venir estese ai campi realmente chiusi, definendo una „porzione" W di V_δ come la totalità dei punti di V_δ le cui coordinate soddisfino ad opportune disuguaglianze algebriche e procedendo in modo consimile a quello tenuto sull'argomento da *W. Habicht* [3, 4]; in tal caso un'analoga estensione seguirebbe senz'altro per i vari risultati del presente lavoro. Qui però non ci occupiamo di siffatte estensioni; osserviamo soltanto che la b) discende dalla c), e che nella d) è essenziale supporre V_δ priva di punti multipli, come risulta da *F. Severi* e *B. Segre* [13].

2. Il teorema annunciato nel n. 1 risolve — per un'infinità di valori di n, δ (ma non per tutti) — il

Problema I. — *Assegnati gli interi* n, δ *soddisfacenti alle*

$$n \geqslant 1 \ , \qquad 0 \leqslant \delta \leqslant \tfrac{1}{2} n(n+3) - 1 \ ,$$

determinare il **massimo** *intero* $\varrho = \varrho(n, \delta)$ *tale che* **ogni** *sistema lineare* ∞^δ *di quadriche reali di* S_n *contenga qualche quadrica su cui giaccia (almeno) un* S_ϱ *reale.*

La risoluzione completa di questo problema equivarrebbe manifestamente a quella del

Problema II. — *Assegnati gli interi* n, ϱ, *ove*

$$n \geqslant 1 \ , \qquad 0 \leqslant \varrho \leqslant n-1 \ ,$$

determinare il **minimo** *intero* $\delta = \delta(n, \varrho)$, *tale che* **ogni** *sistema lineare* ∞^δ *di quadriche reali di* S_n *contenga qualche quadrica su cui giaccia un* S_ϱ *reale.*

Nel caso particolare in cui $\varrho = n - 1$, il problema II può porsi sotto forma più semplice nel modo seguente. Osserviamo che una quadrica di S_n che contenga un S_{n-1} si spezza necessariamente in due iperpiani (distinti o coincidenti) di S_n, e viceversa; e che una quadrica-luogo così spezzata è apolare a tutte e sole le quadriche-inviluppo di S_n rispetto a cui quei due iperpiani risultino fra loro coniugati. Se dunque sostituiamo al sistema lineare ∞^δ cui si riferisce il problema II quello ∞^d ad esso apolare, ove

$$d(n) = \tfrac{1}{2}\, n(n+3) - \delta(n, n-1) - 1 \ , \tag{1}$$

e se poi applichiamo il principio di dualità in S_n, vediamo che — per $\varrho = n - 1$ — il problema II equivale al

Problema III. — *Determinare il* **massimo** *intero* $d = d(n)$ *tale che — in corrispondenza ad* **ogni** *sistema lineare* ∞^d *di quadriche reali di* S_n *— esista in* S_n *almeno una coppia di punti reali mutuamente coniugati rispetto a ciascuna quadrica del sistema.*

In base alla suddetta definizione di $d(n)$, mentre deve esistere in S_n qualche sistema lineare ∞^{d+1} di quadriche reali *non* aventi a comune nessuna coppia di punti coniugati reali, analoga proprietà non deve aver luogo per alcun sistema lineare meno ampio. In altri termini,

$$N(n+1) = d(n) + 2 \tag{2}$$

rappresenta precisamente il *massimo* numero di forme bilineari simmetriche a coefficienti reali, in due serie di $n + 1$ variabili, formanti assieme un sistema *definito,* tale cioè che l'annullarsi delle forme nel campo reale implichi l'annullarsi di tutte le variabili in una almeno delle due serie. Il problema di determinare $N(r)$, coincidente così sostanzialmente col problema III, fu già posto da *H. Hopf* ([5], n. 1), che lo risolse in tre casi:

$$N(2) = 2 \ , \qquad N(3) = 5 \ , \qquad N(4) = 6 \ .$$

Dal presente lavoro risulterà (n. 5), fra l'altro, che è $d(2^h) = 2^{h+1} - 1$ per ogni h intero positivo, il che porge la soluzione del problema di Hopf in un'infinità di casi, mediante la formula:

$$N(2^h + 1) = 2^{h+1} + 1 \qquad (h \geqslant 1) \ , \tag{3}$$

che subito segue dalla (2). Poichè $N(r)$ è funzione mai decrescente di r (n. 3), così la (3) implica che debba essere $N(r) > r$ per $r \geqslant 3$; e questo risultato equivale appunto a quello di Hopf sulle algebre reali, a cui abbiamo alluso nel n. 1.

3. Rileviamo ora alcune *limitazioni intercedenti fra i caratteri* n, ϱ, δ, fra loro legati nel modo specificato nei problemi I e II (n. 2). Risulta anzitutto:

$$\tfrac{1}{2}(2\varrho - n + 1)(2\varrho - n + 2) \leqslant \delta(n, \varrho) \leqslant \tfrac{1}{2}(\varrho + 1)(\varrho + 2) \ , \tag{4}$$

ove per la validità della limitazione inferiore si suppone che sia $2\varrho \geqslant n$. Invero il primo membro esprime allora il numero delle condizioni algebricamente indipendenti che occorre imporre ad una quadrica di S_n — nel campo complesso — affinchè essa contenga qualche S_ϱ, e cioè sia (almeno) $2\varrho - n + 1$ volte specializzata (ossia abbia un $S_{2\varrho-n}$ doppio). Perciò, se denotiamo quel numero con $\lambda + 1$, esistono in S_n sistemi lineari ∞^λ di quadriche reali nessuna delle quali contiene degli S_ϱ reali, anzi neppure complessi, onde dev'essere $\delta(n, \varrho) > \lambda$, ossia appunto $\delta \geqslant \lambda + 1$. La limitazione superiore per δ si ha poi subito notando che $(\varrho + 1)(\varrho + 2)/2$ esprime il numero delle condizioni lineari indipendenti che vengono imposte ad una quadrica dal passaggio per un S_ϱ assegnato; esse sono reali se S_ϱ e la quadrica lo sono, e possono ovviamente venire soddisfatte da una quadrica di un qualunque sistema lineare la cui dimensione raggiunga almeno quel numero.

Risulta inoltre:

$$\delta(n + 1, \varrho + 1) \leqslant \delta(n, \varrho) + n + 2 \ . \tag{5}$$

Infatti, posto $\delta' = \delta(n, \varrho) + n + 2$, ed assegnato in S_{n+1} un *qualunque* sistema lineare $\infty^{\delta'}$ di quadriche reali, Σ, si scelgano genericamente in S_{n+1} un punto O ed un iperpiano S_n reali, e si consideri il sistema lineare segato su S_n dalle quadriche di Σ che passano doppiamente per

O. Quest'ultimo sistema ha dimensione $\delta' - (n+2) = \delta(n, \varrho)$, e contiene quindi una quadrica su cui giace qualche S_ϱ reale; il cono proiettante tale quadrica da O risulta manifestamente una quadrica di Σ su cui giace qualche $S_{\varrho+1}$ reale, onde segue che dev'essere appunto

$$\delta(n+1, \varrho+1) \leqslant \delta' .$$

Nel caso $\varrho = n-1$ le (4), (5), avuto riguardo alle (1), (2), forniscono rispettivamente le limitazioni $r \leqslant N(r) \leqslant 2r-1$, $N(r+1) \geqslant N(r)$.

Aggiungasi che dalla (5), procedendo per induzione rispetto all'intero positivo h, si ricava in modo ovvio la limitazione

$$\delta(n, \varrho) \geqslant \delta(n+h, \varrho+h) - nh - \tfrac{1}{2} h(h+3) . \tag{6}$$

Supponiamo dapprima che esista un h per cui $\delta(n+h, \varrho+h)$ raggiunga il più grande valore compatibile con le (4), ossia

$$\delta(n+h, \varrho+h) = \tfrac{1}{2}(\varrho+h+1)(\varrho+h+2) ; \tag{7}$$

allora la (6) porge per $\delta(n, \varrho)$ la limitazione inferiore

$$\delta(n, \varrho) \geqslant \tfrac{1}{2}(\varrho+1)(\varrho+2) - h(n-\varrho) . \tag{8}$$

La (8) appare non banale qualora h possa venire scelto [intero positivo, in guisa che valga la (7), e] così piccolo da renderne il secondo membro non negativo; essa in tal caso risulta *più forte* della limitazione (4) dello stesso senso, non appena si abbia

$$h < \tfrac{1}{2}(3\varrho - n + 3) . \tag{9}$$

Supponiamo da ultimo che, per un'opportuna scelta di n e ϱ, $\delta(n, \varrho)$ raggiunga il più piccolo valore compatibile con le (4), ossia

$$\delta(n, \varrho) = \tfrac{1}{2}(2\varrho - n + 1)(2\varrho - n + 2) . \tag{10}$$

In tal caso la (6) porge la

$$\delta(n+h, \varrho+h) \leqslant \tfrac{1}{2}(\varrho+h+1)(\varrho+h+2) - \tfrac{1}{2}(n-\varrho)(3\varrho - n - 2h + 3) ; \tag{11}$$

e questa limitazione superiore per $\delta(n+h, \varrho+h)$ è *più forte* di quella dello stesso senso fornita dalle (4), per tutti i valori interi positivi di h soddisfacenti alla (9).

4. Ci proponiamo ora di dare una condizione aritmetica per n e ϱ, *sufficiente* per la validità della (10). Vedremo poi, nel n. 5, che tale condizione non è illusoria in quanto esistono anzi *infiniti* valori di n e ϱ che la soddisfano.

Allo scopo di poter enunciare brevemente il risultato che abbiamo in vista, introduciamo i simboli:

$$r = 2\varrho - n + 1 \ , \tag{12}$$

$$\delta_r = \tfrac{1}{2} r(r+1) \quad , \tag{13}$$

$$\varkappa_{r,n} = \frac{0!\,2!\ldots(r-1)!}{r!\,(r+2)!\ldots(2r-1)!}\cdot\frac{(n+1)!\,(n+3)!\ldots(n+r)!}{(n-r+1)!\,(n-r+3)!\ldots n!} \text{ per } r \text{ dispari}, \tag{14}$$

$$\varkappa_{r,n} = \frac{0!\,2!\ldots(r-2)!}{(r+1)!\,(r+3)!\ldots(2r-1)!}\cdot\frac{(n+2)!\,(n+4)!\ldots(n+r)!}{(n-r+1)!(n-r+3)!\ldots(n-1)!} \text{ per } r \text{ pari}, \tag{15}$$

ove, come di consueto, $0! = 1$. La condizione a cui abbiamo alluso viene allora espressa dal

Teorema. — *La* (10) *certamente sussiste, e cioè si ha* $\delta(n, \varrho) = \delta_r$, *per tutti i valori interi di* n *e* ϱ, *soddisfacenti alle* $[n/2] \leqslant \varrho < n$, *in corrispondenza ai quali l'intero* $\varkappa_{r,n}$ *definito dalle formule precedenti risulti dispari.*

A questo teorema si può dare forma geometricamente più espressiva, utile anche ai fini della dimostrazione, ricorrendo alla seguente nota *rappresentazione*. Le quadriche-luogo reali di S_n sono tutte date dall'equazione

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}) \ ,$$

ove le x denotano coordinate omogenee di punto in S_n, al variare dei coefficienti a nel campo reale. I coefficienti a distinti sono in numero di $\nu + 1$, dove, per abbreviare, si ponga

$$\nu = \tfrac{1}{2} n(n+3) \ , \tag{16}$$

e possono quindi venir assunti come coordinate omogenee di punto in un S_ν reale.

In tale spazio S_ν conviene considerare n varietà algebriche irriducibili:

$$\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots, \Phi^{(n)} \ ,$$

dove la $\Phi^{(r)}$ — denominata una varietà di Veronese di indici (r, n) [2]) — è il luogo dei punti di S_ν che corrispondono a quadriche di S_n r volte specializzate ($r = 1, 2, \ldots, n$). Pertanto la varietà $\Phi^{(r)}$ si rappresenta analiticamente annullando tutti i minori d'ordine $n - r + 2$ della

---

[1]) Cfr. *B. Segre* [8], [9]; nel primo di questi due lavori sono stabilite – fra l'altro – le proprietà delle Φ che enunciamo nel presente capoverso.

matrice simmetrica $|| a_{ij} ||$, e — tenuto conto delle (13), (16) — essa ha la *dimensione*

$$\delta_{r,n} = \nu - \delta_r \ . \tag{17}$$

La varietà $\Phi^{(n)}$ risulta priva di punti multipli, ed ha l'*ordine* $\varkappa_{n,n} = 2^n$ (espresso dunque da un numero pari, per ogni valore di n). Invece, se $1 \leqslant r \leqslant n-1$, la varietà $\Phi^{(r)}$ ammette $\Phi^{(r+1)}$ come *luogo dei propri punti multipli* [e precisamente, $\Phi^{(r)}$ passa per $\Phi^{(r+1)}$ con la molteplicità 2^r, contenendo ogni punto di $\Phi^{(s)}$ $(r < s \leqslant n)$ che (se $s < n$) non stia su $\Phi^{(s+1)}$ con esatta molteplicità $\varkappa_{r,\,s-1}$]; inoltre l'*ordine* di una tale $\Phi^{(r)}$ uguaglia il numero $\varkappa_{r,n}$ fornito dalle (14), (15).

Notiamo ora che, in virtù della (12), le ipotesi ammesse nel teorema per n e ϱ implicano che sia $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Un punto α (reale o complesso) di $\Phi^{(r)}$, che non stia su $\Phi^{(r+1)}$, rappresenta una quadrica a di S_n specializzata r volte — e non di più — tale quindi che, nel campo complesso, gli spazi lineari massimi giacenti su essa hanno esatta dimensione ϱ; e viceversa.

Se α è reale, tale è anche la quadrica a, sicchè l'S_{r-1} doppio di questa risulta reale. Per ciò che concerne gli spazi reali massimi di a, si hanno invece $\varrho - r + 2 = n - \varrho + 1$ diverse possibilità, in quanto è noto elementarmente che la loro dimensione può assumere uno qualunque dei valori $r-1$, $r, \ldots, \varrho$ (a seconda dell'indice d'inerzia della forma quadratica figurante a primo membro nell'equazione di a). Ciascuno degli $n - \varrho + 1$ sistemi di quadriche reali r volte specializzate di S_n contenenti spazi reali massimi di una fissata di quelle dimensioni, viene mutato transitivamente in sè dal gruppo continuo delle omografie reali non degeneri di S_n, ed è quindi connesso ed omogeneo. Pertanto:

Nel campo reale il luogo $\Phi^{(r)} - \Phi^{(r+1)}$, ottenuto da $\Phi^{(r)}$ con l'asportarne i punti multipli, si spezza in $n - \varrho + 1$ porzioni connesse omogenee fra loro disgiunte, ciascuna di dimensione $\delta_{r,n}$.

Riferiamoci in particolare alla porzione, $\Omega^{(r)}$, rappresentativa delle quadriche reali di S_n r volte specializzate che contengono degli S_ϱ *reali*. Essa è una varietà topologica aperta, il cui contorno, $\Theta^{(r)}$, appartiene per ciò che precede alla varietà algebrica $\Phi^{(r+1)}$. In virtù delle (17), (13), quest'ultima ha la dimensione

$$\delta_{r+1,n} = \nu - \tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) = \delta_{r,n} - (r+1) \leqslant \delta_{r,n} - 2 \ . \tag{18}$$

Inoltre, in forza del n. 1, a), ciascun punto di $\Theta^{(r)}$ — quale posizione limite (giacente su $\Phi^{(r+1)}$) di un punto di $\Omega^{(r)}$ — rappresenta una quadrica reale di S_n (specializzata più di r volte) su cui giace qualche S_ϱ

reale. Viceversa, si dimostra senza difficoltà che — se vale la (12) — una qualunque quadrica reale di S_n specializzata più di r volte e contenente qualche S_ϱ reale può ottenersi come limite di una quadrica reale di S_n specializzata esattamente r volte e contenente degli S_ϱ reali. Pertanto *la chiusura* $\overline{\Omega}^{(r)} = \Omega^{(r)} + \Theta^{(r)}$ *della varietà topologica* $\Omega^{(r)}$ *(di dimensione* $\delta_{r,n}$*) è il luogo dei punti di* S_ν *che rappresentano quadriche reali di* S_n *contenenti qualche* S_ϱ *reale.*

Avuto riguardo alla (4) ed alla definizione di $\delta(n, \varrho)$ (n. 2), il teorema da stabilire equivale conseguentemente a mostrare che :

Nelle ipotesi specificate in quel teorema, la suddetta $\overline{\Omega}^{(r)}$ *vien incontrata in qualche punto (reale) da* ogni *spazio lineare reale di* S_ν *avente dimensione* $\delta_r = \nu - \delta_{r,n}$ *(complementare a quella,* $\delta_{r,n}$*, di* $\Omega^{(r)}$*).* In altri termini, *ogni* S_{δ_r} *reale di* S_ν*, che non incontri* $\Theta^{(r)}$*, incontra necessariamente* $\Omega^{(r)}$ *in qualche punto reale.*

Per dimostrare questa proposizione, incominciamo con l'osservare che gli S_{δ_r} reali di S_ν possono venir assimilati ai punti reali di una varietà Grassmanniana, G_ω, la quale è reale, priva di punti multipli, ed ha dimensione

$$\omega = (\delta_r + 1)(\nu - \delta_r) = (\delta_r + 1)\,\delta_{r,n} \geqslant 2\ .$$

L'insieme degli S_{δ_r} (reali o complessi) di S_ν che — nel campo complesso — si appoggiano in qualche punto alla $\Phi^{(r+1)}$, si rappresenta su G_ω con una varietà algebrica di dimensione $\delta_r \delta_{r,n} + \delta_{r+1,n}$; e questa dimensione risulta $\leqslant \omega - 2$, in base alle (18).

Poichè, come s'è detto, $\Theta^{(r)}$ è luogo di punti reali giacenti su $\Phi^{(r+1)}$, così — in forza del n. 1, d) — l'insieme degli S_{δ_r} reali di S_ν che *non* si appoggiano a $\Theta^{(r)}$ risulta *connesso*. Avuto riguardo al n. 1, c), la seconda forma dell'ultimo enunciato seguirà tosto ove si provi che :

È possibile scegliere in S_ν *un* S_{δ_r} *reale privo di punti a comune con* $\Phi^{(r+1)}$ *ed incontrante* $\Phi^{(r)}$ *in un numero finito di punti, in modo che quelli fra tali punti che cadono su* $\Omega^{(r)}$ *(contati con le rispettive molteplicità) risultino in numero* dispari.

Fissiamo all'uopo un qualunque $S_{\varrho-r}$ *reale* di S_n (di dimensione $\varrho - r = n - \varrho - 1 \geqslant 0$); e, nel sistema lineare $\infty^{\nu-\delta_{n-\varrho}}$ di tutte le quadriche che lo contengono, consideriamo un generico sistema lineare reale ∞^{δ_r} (il che è certamente possibile, essendo $\delta_r < \nu - \delta_{n-\varrho}$). Diciamo Σ quest'ultimo sistema lineare, ed S_{δ_r} la sua imagine in S_ν. È subito visto che — nel campo complesso — Σ contiene soltanto un numero finito di quadriche almeno r volte specializzate, e che nessuna di queste è più di r volte specializzata. Una siffatta quadrica di Σ è quindi esattamente r

volte specializzata, eppertanto — se *reale* — ammette un S_{r-1} doppio reale; questo è poi sghembo con $S_{\varrho-r}$, per la genericità con cui fu scelto Σ, sicchè lo spazio congiungente S_{r-1} ed $S_{\varrho-r}$ risulta reale, di dimensione ϱ, e situato per intero sulla quadrica suddetta. In S_ν, ciò fornisce che

Lo spazio S_{δ_r} reale (rappresentativo di Σ) non incontra $\Phi^{(r+1)}$; ogni punto reale comune ad esso ed a $\Phi^{(r)}$ giace su $\Omega^{(r)}$.

In virtù dell'ipotesi del teorema enunciato in principio relativa a $\varkappa_{r,n}$, la varietà $\Phi^{(r)}$ è di ordine dispari. Pertanto (n. 1, c), il numero complessivo delle intersezioni *reali* di $\Phi^{(r)}$ ed S_{δ_r} risulta *dispari*; e tale è perciò anche — come richiesto — il numero delle intersezioni reali di $\Omega^{(r)}$ ed S_{δ_r}, in quanto questo numero coincide con quello, in forza dell'ultima proposizione. Il teorema suddetto è così dimostrato.

5. Allo scopo di poter esprimere più esplicitamente in funzione di r ed n la condizione — figurante nel teorema del n. 4 — che il numero $\varkappa_{r,n}$ sia dispari, introduciamo le seguenti notazioni. Se m è un qualunque numero naturale, denotiamo con $\{m\}_2$ l'esponente della massima potenza del 2 che divide tale numero, e con $(m)_2$ la somma delle cifre (0 od 1) del numero stesso scritto nella numerazione a base 2. Si tratta allora di esplicitare la

$$\{\varkappa_{r,n}\}_2 = 0 \; . \tag{19}$$

A tal fine osserviamo che, per ogni $m > 0$, si ha

$$\{m!\}_2 = m - (m)_2 \, ;$$ [3])

la stessa relazione vale anzi ovviamente anche per $m = 0$. Poichè — sia nella (14) che nella (15) — la somma degli interi i cui fattoriali compaiono a numeratore uguaglia l'analoga somma relativa al denominatore, così la (19), *per* $r = 2s + 1$ *dispari*, diventa:

$$\sum_{i=0}^{s} [(2i)_2 + (n + 2i + 1)_2 - (2s + 2i + 1)_2 - (n - 2s + 2i)_2] = 0 \; , \tag{20}$$

e *per* $r = 2s$ *pari* essa può scriversi nella forma:

$$\sum_{i=0}^{s-1} [(2i)_2 + (n + 2i + 2)_2 - (2s + 2i + 1)_2 - (n - 2s + 2i + 1)_2] = 0. \tag{21}$$

[3]) Questo risultato trovasi già in *F. Behrend* [2], p. 16. Esso si ottiene subito osservando che è $\{m!\}_2 = [m/2] + \{[m/2]!\}_2$ e quindi:

$$\{m!\}_2 = [m/2] + [m/4] + [m/8] + \cdots .$$

Più generalmente, qualunque sia $p \geqslant 2$ e con ovvia estensione dei simboli, si vede che è

$$\{m!\}_p = [m/p] + [m/p^2] + [m/p^3] + \cdots ,$$

eppertanto:

$$(p - 1) \cdot \{m!\}_p = m - (m)_p .$$

Notiamo ora che, se h e k denotano due interi positivi arbitrari, posto

$$s = 2^{h-1} - 1 \ , \qquad n = 2^h + (k-1)\, 2^{h+1} \ ,$$

risulta:

$$\begin{aligned}
(n + 2i + 1)_2 &= (k-1)_2 + (2i)_2 + 2 && \text{per} \quad i = 0, 1, \dots, s, \\
(2s + 2i + 1)_2 &= (2i - 2)_2 + 2 && \text{per} \quad i = 1, 2, \dots, s \ , \\
(n - 2s + 2i)_2 &= (k-1)_2 + (2i + 2)_2 && \text{per} \quad i = 0, 1, \dots, s \ .
\end{aligned}$$

Poichè si ha inoltre $(2s)_2 = h - 1$, $(2s+1)_2 = h$, $(2s+2)_2 = 1$, $(0)_2 = 0$, così la (20) rimane soddisfatta dalle precedenti posizioni, e la (19) sussiste ove si definiscano s, n nel modo indicato e si prenda $r = 2s + 1$.

Del pari, assunto

$$s = 2^{h-1} \ , \qquad n = 2^h + k\, 2^{h+1} - 1 \ ,$$

per $i = 0, 1, \dots, s-1$ risulta:

$$\begin{aligned}
(n + 2i + 2)_2 &= (k)_2 + (2i)_2 + 2 \ , \\
(2s + 2i + 1)_2 &= (2i)_2 + 2 \ , \\
(n - 2s + 2i + 1)_2 &= (k)_2 + (2i)_2 \ ,
\end{aligned}$$

sicchè la (21) rimane soddisfatta, e la (19) sussiste ove si definiscano s, n nel modo indicato e si prenda $r = 2s$.

Dall'analisi precedente, tenuto anche conto della (12) e del teorema del n. 4, si ottiene in particolare che:

L'uguaglianza (10) *sussiste per tutti i valori di n e ϱ espressi dalle*

$$n = 2^h + (k-1)\, 2^{h+1} \ , \qquad \varrho = k\, 2^h - 1 \ , \tag{22}$$

oppure dalle

$$n = 2^h + k\, 2^{h+1} - 1 \ , \qquad \varrho = (k+1)\, 2^h - 1 \ , \tag{23}$$

comunque si scelgano gli interi positivi h e k.

Se ad esempio assumiamo $k = 1$, le (22) porgono:

$$n = 2^h \ , \qquad \varrho = 2^h - 1 \ ,$$

e la (10) — per un siffatto valore di n — si riduce a $\delta(n, n-1) = n(n-1)/2$. La (1) allora fornisce $d(2^h) = d(n) = 2n - 1 = 2^{h+1} - 1$; e questo è il risultato che, alla fine del n. 2, ci ha condotto alla relazione (3), da cui poi discende — come ivi si è detto — il teorema di Hopf sulle algebre reali (citato nel n. 1). Per altre applicazioni e deduzioni in analogo ordine d'idee, cfr. *B. Segre* [12].

6. Osserviamo che, per $s = 0$, la (20) si riduce alla $(n+1)_2 = (n)_2 + 1$; questa è soddisfatta sempre e solo che n sia un numero *pari*, $2m$, ed allora la $r = 2s + 1$ e la (12) porgono

$$n = 2m \ , \qquad s = 0 \ , \qquad r = 1 \ , \qquad \varrho = m$$

[il caso in cui $m = 2k - 1$ sia dispari rientra nelle (22), ove vi si faccia $h = 1$]. La validità della (20) per $r = 2s + 1$ implica, come s'è visto, la (10); sicchè — per ogni m intero positivo — risulta $\delta(2m, m) = 1$, ossia, con le notazioni del problema I (n. 2),

$$\varrho(2m, 1) = m \ . \tag{24}$$

Pertanto:

In uno spazio S_{2m}, di dimensione pari $2m$, ogni fascio di quadriche reali contiene sempre qualche quadrica (necessariamente specializzata) su cui giace qualche S_m reale.

Questo risultato era già stato ottenuto con calcoli diretti da *E. G. Togliatti* [15], n. 14, limitatamente ai fasci generali di quadriche.

Un altro caso particolare di validità della (10) viene fornito dalle (23) quando vi si assuma $h = 1$, il che porge:

$$n = 4k + 1 \ , \qquad \varrho = 2k + 1 \ , \qquad r = 2 \ , \qquad \delta = \delta_r = 3 \ ,$$

e quindi, con le notazioni del n. 2,

$$\varrho(4k + 1, 3) = 2k + 1 \ . \tag{25}$$

Pertanto:

In uno spazio S_n la cui dimensione sia della forma $n = 4k + 1$ (con k intero positivo), ogni sistema lineare ∞^3 di quadriche reali contiene sempre qualche quadrica (specializzata almeno due volte) su cui giace un S_{2k+1} reale.

7. Faremo, terminando, alcune osservazioni complementari concernenti la funzione $\varrho = \varrho(n, \delta)$ che compare nel problema I (n. 2), con speciale riguardo al caso in cui ϱ, n e δ soddisfino alla (10). Rileviamo anzitutto che *risulta sempre*:

$$\varrho(n + 1, \delta) \geqslant \varrho(n, \delta) \ . \tag{26}$$

Ed invero, un sistema lineare di quadriche reali di S_{n+1} di dimensione $\delta \leqslant \frac{1}{2}n(n + 3) - 1$, comunque assegnato, sega su di un generico S_n reale di S_{n+1} un sistema lineare di quadriche reali, ancora di dimensione δ. Per definizione di $\varrho = \varrho(n, \delta)$, v'è qualche quadrica di quest'ultimo sistema su cui giace un S_ϱ reale; una quadrica siffatta è sezione di S_n

con una quadrica del sistema assegnato in S_{n+1}: e poichè quest'ultima quadrica viene a contenere quell'S_ϱ, ne consegue la (26).

Dimostreremo che:

Se i numeri ϱ, n *e* δ *soddisfanno alla* (10), *nella* (26) *deve sussistere il segno di uguaglianza.*

Notiamo all'uopo che, in forza delle (12), (13), la (10) si scrive semplicemente $\delta = \delta_r$. Ne consegue che, nel campo complesso, e quindi anche *a fortiori* nel campo reale, un generico sistema lineare ∞^δ di quadriche di S_m, ove $m \geqslant n$, non contiene quadriche più che r volte specializzate. D'altro canto, se nella (26) valesse il segno di disuguaglianza, *ogni* sistema lineare ∞^δ di quadriche reali di S_{n+1} dovrebbe contenere almeno una quadrica passante per qualche $S_{\varrho+1}$ reale; l'indice di specializzazione di una quadrica siffatta non potrebbe quindi essere inferiore a

$$2(\varrho + 1) - (n + 1) + 1 = r + 1 \ ,$$

in contrasto con ciò che precede. Questa contraddizione prova l'asserto.

Come semplice applicazione del risultato testè stabilito, notiamo che dalle (24), (25) discendono le uguaglianze:

$$\varrho(2m + 1, 1) = m \ , \qquad \varrho(4k + 2, 3) = 2k + 1 \ ,$$

di ovvio significato geometrico (n. 2).

BIBLIOGRAFIA

[1] *F. Artin – O. Schreier*, Algebraische Konstruktion reeller Körper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 5 (1926) 83–115.

[2] *F. Behrend*, Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen, Compositio Math., 7 (1939) 1–19.

[3] *W. Habicht*, Über die Lösbarkeit gewisser algebraischer Gleichungssysteme, Comment. Math. Helv., 18 (1945–46) 154–175.

[4] *W. Habicht*, Ein Existenzsatz über reelle definite Polynome, Comment. Math. Helv., 18 (1945–46) 331–348.

[5] *H. Hopf*, Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume, Vierteljahrschr. Naturforsch. Ges. Zürich, 85 (1940) (Festschrift Rudolf Fueter) 165–177.

[6] *H. Hopf*, Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra, Comment. Math. Helv., 13 (1941) 219–239.

[7] *H. Hopf*, Einige Anwendungen der Topologie auf die Algebra, Rend. Sem. Mat. Torino, 11 (1951–52) 75–91.

[8] *B. Segre*, Sulle varietà di Veronese a due indici, Rend. Acc. Naz. Lincei, (6) 33 $(1936)_1$ 303–309, 391–397.

[9] *B. Segre*, Un'estensione delle varietà di Veronese ed un principio di dualità per forme algebriche, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) 1 $(1946)_1$ 313–318, 559–563.

[10] *B. Segre*, The non-singular cubic surfaces, Oxford, The Clarendon Press 1942.

[11] *B. Segre*, Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) 15 $(1953)_2$ 237–242, 339–344.

[12] *B. Segre*, La teoria delle algebre ed alcune questioni di realtà, Rend. Mat. Appl., (5) 13 (1954) 157–188.

[13] *F. Severi – B. Segre*, Un paradosso topologico, Rend. Acc. Naz. Lincei, (6) 9 $(1929)_1$ 3–8, 117–122.

[14] *E. Stiefel*, Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra, Comment. Math. Helv., 13 (1941) 201–218.

[15] *E. G. Togliatti*, Questioni di forma e di realità relative a fasci di quadriche in uno spazio ad *n* dimensioni, Ann. Mat., (30) 30 (1921) 75–117.

(Reçu le 1. février 1954.)