Ein Beweis des Ruffini-Abelschen Satzes.

Autor(en): **Szele, T.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **20 (1947)**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18062

Ein Beweis des Ruffini-Abelschen Satzes

Von T. Szele, Szeged (Ungarn)

In einer Arbeit unter demselben Titel hat *L. Kalmár*[1]) gezeigt, daß die zum Beweis der algebraischen Unlösbarkeit der allgemeinen algebraischen Gleichung n-ten Grades für $n \geqq 5$ ebenfalls hinreichende Tatsache, daß *die alternierende Gruppe $\mathfrak{A}_n$ für $n \geqq 5$ keinen Normalteiler vom Primzahlindex besitzt,* einfacher zu beweisen ist, als die zum obigen Zweck allgemein verwendete Einfachheit von $\mathfrak{A}_n$. In folgender Note werde ich einen weiteren einfachen Beweis desselben Satzes liefern[2]). Mit der gleichen Mühe beweise ich zugleich die Tatsache, daß *die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ für $n \geqq 5$ keinen Normalteiler vom Primzahlindex außer $\mathfrak{A}_n$ besitzt.* Aus diesen beiden Tatsachen folgt unmittelbar die Unauflösbarkeit von $\mathfrak{S}_n$ — also laut des bekannten Galoisschen Kriteriums auch die der algebraischen Gleichung n-ten Grades —, während zum Beweis dieser Unauflösbarkeit mittels der ersteren allein auch der Jordan-Höldersche Satz nötig ist.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine der Gruppen $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler vom Primzahlindex von $\mathfrak{G}$. Wir werden beweisen, daß $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}_n$ (folglich auch $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_n$). Dazu genügt es offenbar zu zeigen, daß $\mathfrak{N}$ sämtliche Dreierzyklen (abc) enthält. Nach Voraussetzung ist die Ordnung der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine Primzahl, daher ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine Abelsche (sogar zyklische) Gruppe. Sind also A und B beliebige Permutationen aus $\mathfrak{G}$, so gehören AB und BA zu derselben Nebenklasse von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{N}$; d. h.

$$AB = BAN \qquad (\text{mit } N \in \mathfrak{N}) .$$

Wählen wir speziell $A = (abc)$, $B = (ab)(de)$, wo d und e von a, b, c verschiedene (wegen $n \geqq 5$ gewiß vorhandene) Elemente bedeuten. (A

---

[1]) *L. Kalmár:* Ein Beweis des Ruffini-Abelschen Satzes, Acta Scientiarum Math. (Szeged) 6 (1934). 59—60.

[2]) Im Gegensatz zur Kalmárschen Arbeit (loc. cit.) vermeide ich nicht den Begriff der Faktorgruppe, welcher, wie *B. L. van der Waerden* in der Besprechung der Kalmárschen Arbeit (Zentralblatt für Math. 5 [1933], 152) gezeigt hat, auch den Kalmárschen Gedankengang wesentlich zu verkürzen erlaubt.

und B sind offenbar gerade Permutationen, gehören also zu $\mathfrak{G}$.) Dann ist $B^{-1}AB = (bac) = A^2$, also

$$N = A^{-1}B^{-1}AB = A^{-1}A^2 = A \in \mathfrak{N} \ ,$$

wie es zu beweisen war.

Bemerkung. Wir haben eigentlich die Tatsache bewiesen, daß die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{A}_n$ für $n \geqq 5$ die Gruppe $\mathfrak{A}_n$ ist.

(Eingegangen den 5. Januar 1947.)