

# Ein Beweis des Ruffini-Abelschen Satzes.

Autor(en): **Szele, T.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **20 (1947)**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-18062>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Ein Beweis des Ruffini-Abelschen Satzes

Von T. SZELE, Szeged (Ungarn)

In einer Arbeit unter demselben Titel hat *L. Kalmár*<sup>1)</sup> gezeigt, daß die zum Beweis der algebraischen Unlösbarkeit der allgemeinen algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades für  $n \geq 5$  ebenfalls hinreichende Tatsache, daß die alternierende Gruppe  $\mathfrak{A}_n$  für  $n \geq 5$  keinen Normalteiler vom Primzahlindex besitzt, einfacher zu beweisen ist, als die zum obigen Zweck allgemein verwendete Einfachheit von  $\mathfrak{A}_n$ . In folgender Note werde ich einen weiteren einfachen Beweis desselben Satzes liefern<sup>2)</sup>. Mit der gleichen Mühe beweise ich zugleich die Tatsache, daß die symmetrische Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  für  $n \geq 5$  keinen Normalteiler vom Primzahlindex außer  $\mathfrak{A}_n$  besitzt. Aus diesen beiden Tatsachen folgt unmittelbar die Unauflösbarkeit von  $\mathfrak{S}_n$  — also laut des bekannten Galoisschen Kriteriums auch die der algebraischen Gleichung  $n$ -ten Grades —, während zum Beweis dieser Unauflösbarkeit mittels der ersteren allein auch der Jordan-Höldersche Satz nötig ist.

Es sei  $\mathfrak{G}$  eine der Gruppen  $\mathfrak{S}_n$ ,  $\mathfrak{A}_n$  und  $\mathfrak{N}$  ein Normalteiler vom Primzahlindex von  $\mathfrak{G}$ . Wir werden beweisen, daß  $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}_n$  (folglich auch  $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_n$ ). Dazu genügt es offenbar zu zeigen, daß  $\mathfrak{N}$  sämtliche Dreierzyklen  $(abc)$  enthält. Nach Voraussetzung ist die Ordnung der Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  eine Primzahl, daher ist  $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  eine Abelsche (sogar zyklische) Gruppe. Sind also  $A$  und  $B$  beliebige Permutationen aus  $\mathfrak{G}$ , so gehören  $AB$  und  $BA$  zu derselben Nebenklasse von  $\mathfrak{G}$  nach  $\mathfrak{N}$ ; d. h.

$$AB = BAN \quad (\text{mit } N \in \mathfrak{N}) .$$

Wählen wir speziell  $A = (abc)$ ,  $B = (ab)(de)$ , wo  $d$  und  $e$  von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  verschiedene (wegen  $n \geq 5$  gewiß vorhandene) Elemente bedeuten. ( $A$

---

<sup>1)</sup> *L. Kalmár*: Ein Beweis des Ruffini-Abelschen Satzes, *Acta Scientiarum Math. (Szeged)* 6 (1934). 59—60.

<sup>2)</sup> Im Gegensatz zur Kalmárschen Arbeit (loc. cit.) vermeide ich nicht den Begriff der Faktorgruppe, welcher, wie *B.L. van der Waerden* in der Besprechung der Kalmárschen Arbeit (*Zentralblatt für Math.* 5 [1933], 152) gezeigt hat, auch den Kalmárschen Gedankengang wesentlich zu verkürzen erlaubt.

und  $B$  sind offenbar gerade Permutationen, gehören also zu  $\mathfrak{S}_n$ .) Dann ist  $B^{-1}AB = (bac) = A^2$ , also

$$N = A^{-1}B^{-1}AB = A^{-1}A^2 = A \in \mathfrak{A}_n,$$

wie es zu beweisen war.

*Bemerkung.* Wir haben eigentlich die Tatsache bewiesen, daß die Kommutatorgruppe von  $\mathfrak{S}_n$  und  $\mathfrak{A}_n$  für  $n \geq 5$  die Gruppe  $\mathfrak{A}_n$  ist.

(Eingegangen den 5. Januar 1947.)