Über einen Hartogs'schen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von n komplexen Variablen.

Über einen Hartogs'schen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von n komplexen Variablen

Von Rudolf Fueter, Zürich

Einleitung

In einer Arbeit[1]) habe ich gezeigt, daß sich eines der Hauptresultate von *Hartogs* in der Theorie der analytischen Funktionen von zwei komplexen Variablen fast selbstverständlich aus meiner Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen ergibt. Im folgenden verallgemeinere ich diese Theorie so, daß sie als Spezialfall ein System von n analytischen Funktionen von n komplexen Variablen enthält. Aus dieser Verallgemeinerung folgt ebenso einfach der betreffende *Hartogs*'sche Satz für die analytischen Funktionen von n komplexen Variablen.

Ich führe die Verallgemeinerung der Quaternionenfunktionen nur im Hinblick auf die Anwendung auf analytische Funktionen von n komplexen Variablen durch, ohne auf noch weitergehende Verallgemeinerungen einzugehen.

1. *Clifford'sche Zahlen.*

Wir führen die $n+1$ Clifford'schen Zahlen

$$i_0 = 1, i, i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$$

ein, von denen wir eine, i, auszeichnen. Dieselben sollen den Bedingungen genügen:

$$i^2 = -1, \; i_k^2 = -1, \; k = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$ii_k = -i_k i, \; i_h i_k = -i_k i_h, \; h \neq k; \; h, k = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Dieselben bilden eine assoziative Clifford'sche Algebra $\mathfrak{C}_n$ [2]) von der Ordnung 2^n. Von derselben betrachten wir nur das Linearsystem mit den $2n$ Einheiten:

$$1, i, i_k, ii_k, k = 1, 2, \ldots, n-1 .$$

[1]) *Rud. Fueter,* Über einen Hartogs'schen Satz, C.M.H., Vol. 12, p. 75. Die weitere Literatur zur Theorie der Quaternionenfunktionen findet sich in meiner Arbeit: Die Singularitäten der eindeutigen regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, C.M.H., Vol. 9, p. 321.

[2]) Siehe hierzu die Zürcher Dissertation: *P. Boßhard,* Die Clifford'schen Zahlen, ihre Algebra und ihre Funktionentheorie, Zürich, 1940.

Als hyperkomplexe Variable führen wir demgemäß ein:

$$z = \sum_{k=0}^{n-1} z_k i_k \ , \quad \text{wo} \quad z_k = x_{2k} + i\, x_{2k+1} \ , \ k = 0\,,\, 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, n-1\,, \quad \text{ist,}$$

und wo die x *reelle* Variablen sind. Unter den konjugierten Einheiten verstehen wir:

$$\bar{i}_0 = i_0 = 1\ , \quad \bar{i} = -i\ , \quad \bar{i}_k = -i_k\ , \quad k = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, n-1\ .$$

Es muß dann:

$$\overline{i\, i_k} = \bar{i}_k\, \bar{i} = i_k\, i = -i\, i_k\ , \quad k = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, n-1\ ,$$

sein. Die Konjugierte von z ist somit:

$$\bar{z} = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{i}_k\, \bar{z}_k\ , \quad \text{wo} \quad \bar{z}_k = x_{2k} - x_{2k+1}\, i \quad \text{ist.}$$

Die Norm $n(z)$ wird:

$$n(z) = z\bar{z} = n'(z) - 2 \sum_{\substack{h,k=1\\(h \neq k)}}^{n-1} x_{2k}\, x_{2h+1}\, i_k\, i\, i_h\ , \quad \text{wo} \quad n'(z) = \sum_{k=0}^{2n-1} x_h^2$$

gesetzt ist.

2. *Reguläre Funktionen.*

Es seien $u_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, $2n$ reelle Funktionen der $2n$ reellen Variablen x; sie seien in einem Hyperraum H von R^{2n} stetig und nach allen x stetig partiell differenzierbar. Wir setzen:

$$w = f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} i_k w_k\ , \quad \text{wo} \quad w_k = u_{2k}(x) + i\, u_{2k+1}(x)\ , \ k = 0, 1, \ldots, n-1, \ \text{ist;}$$

$w^{(h)}$ bedeute den Differentialquotient von w partiell nach x_h:

$$w^{(h)} = \sum_{k=0}^{n-1} i_k\, w_k^{(h)}\ .$$

Jetzt definieren wir:

Definition: *Die Funktion $w = f(z)$ heißt rechtsregulär in H, wenn*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(w^{(2k)} + w^{(2k+1)}\, i\right) i_k = 0 \tag{1}$$

ist; linksregulär, wenn

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(i_k w^{(2k)} + i\, i_k\, w^{(2k+1)}\right) = 0 \tag{2}$$

ist.

Die Null ist dabei die Clifford'sche Zahl in $\mathfrak{C}_n$, deren sämtliche Komponenten null sind. Die Gleichungen (1) und (2) ergeben folgende $(n^2 - n + 2)$ reelle Bedingungsgleichungen, wobei die obern Zeichen für (1), die untern für (2) gelten:

$$u_0^{(0)} - u_1^{(1)} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(u_{2k}^{(2k)} - u_{2k+1}^{(2k+1)}\right) = 0 , \quad u_{2k}^{(0)} \mp u_{2k+1}^{(1)} + u_0^{(2k)} \mp u_1^{(2k+1)} = 0 ,$$

$$u_0^{(1)} + u_1^{(0)} \pm \sum_{k=1}^{n-1} \left(u_{2k}^{(2k+1)} + u_{2k+1}^{(2k)}\right) = 0 , \quad u_{2k}^{(1)} \pm u_{2k+1}^{(0)} - u_1^{(2k)} \mp u_0^{(2k+1)} = 0 ,$$

$$\left.\begin{aligned} u_{2h}^{(2k)} - u_{2h+1}^{(2k+1)} - u_{2k}^{(2h)} + u_{2k+1}^{(2h+1)} &= 0 , \\ u_{2h}^{(2k+1)} + u_{2h+1}^{(2k)} - u_{2k}^{(2h+1)} - u_{2k+1}^{(2h)} &= 0 , \end{aligned}\right\} \begin{aligned} k, h = 1, 2, \ldots, n-1 ; \\ h \neq k . \end{aligned}$$

Wir werden zuweilen Funktionen w, die *nicht* dem Linearsystem in $\mathfrak{C}_n$ angehören, ebenfalls rechtsregulär nennen, wenn (1) erfüllt ist. Die Zahl und Art der Bedingungsgleichungen ist dann erhöht.

Es sei Δ der *Laplace*'sche Operator für $2n$ Variable x. Dann gilt der:

1. Satz: *Ist $w = f(z)$ in H rechts- oder linksregulär, so gilt:*

$$\Delta w = 0 ,$$

falls die u_h zweimal differenzierbar sind.

Denn nach Annahme ist, falls wir uns auf rechtsreguläre Funktionen beschränken:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(w^{(2k)} + w^{(2k+1)} i\right) i_k = 0 .$$

Wir differenzieren nach x_{2h} und x_{2h+1}:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left(w^{(2k\,2h)} + w^{(2k+1\,2h)} i\right) i_k &= 0 , \\ \sum_{k=0}^{n-1} \left(w^{(2k\,2h+1)} + w^{(2k+1\,2h+1)} i\right) i_k &= 0 , \end{aligned}\right\} h = 0, 1, 2, \ldots, n-1 ,$$

erweitern die erste Gleichung mit $\bar{i}_h$, die zweite mit $\overline{i\,i_h}$, beidemal von rechts, und addieren alle $2n$ Gleichungen. Nun ist stets, falls $h \neq k$ ist:

$$i_k \bar{i}_h + i_h \bar{i}_k = 0 , \quad i\, i_k \overline{i\, i_h} + i\, i_h \overline{i\, i_k} = 0 ,$$

und für alle $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$: $i\, i_k \bar{i}_k + i_k \overline{i\, i_k} = 0$.

Somit bleiben bei der Summation, da die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht werden darf, als Realteil nur die Glieder übrig:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \{ w^{(2k\ 2k)}\, i_k \bar{i}_k + w^{(2k+1\ 2k+1)}\, i\, i_k\, \overline{i\, i_k} \} = \Delta w = 0 \ .$$

2. Satz: *Die Funktion* $n'(z)^{-n}\bar{z}$ *genügt in* R^{2n}, $z \neq 0$, *der Relation:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (i_k\, w^{(2k)} + i\, i_k\, w^{(2k+1)}) = \frac{4n}{n'(z)^{n+1}} \sum_{\substack{h,k=1 \\ (h \neq k)}}^{n-1} x_{2k}\, x_{2h+1}\, i_k\, i\, i_h \ .$$

Es ist:

$$w = \frac{\bar{z}}{n'(z)^n} \ ,$$

also:

$$w^{(2k)} = \frac{\bar{i}_k}{n'(z)^n} - 2n\, x_{2k}\, \frac{\bar{z}}{n'(z)^{n+1}} \ ,$$

$$w^{(2k+1)} = \frac{\overline{i\, i_k}}{n'(z)^n} - 2n\, x_{2k+1}\, \frac{\bar{z}}{n'(z)^{n+1}} \ ,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (i_k\, w^{(2k)} + i\, i_k\, w^{(2k+1)}) = \frac{2n}{n'(z)^n} - 2n \frac{z\bar{z}}{n'(z)^{n+1}} = \frac{4n}{n'(z)^{n+1}} \sum_{(h,k)} x_{2k}\, x_{2h+1}\, i_k\, i\, i_h .$$

3. *Analytische rechtsreguläre Funktionen.*

Sind in $w = \sum_{k=0}^{n-1} i_k w_k$ die w_k analytische Funktionen der n komplexen Variablen z_k (in $z = \sum_{k=0}^{n-1} z_k\, i_k$), so heißt w *analytisch rechtsregulär.* Diese Funktionen sind stets auch rechtsregulär. Es gilt der

3. Satz: *Damit die in H rechtsreguläre Funktion $w = f(z)$ analytisch ist, ist notwendig und hinreichend, daß:*

$$w^{(2k)} + w^{(2k+1)}\, i = 0, \ k = 0, 1, \ldots, n-1 \ , \qquad (3)$$

ist.

Denn diese Gleichungen (3) sind die $2n^2$ Riemann-Cauchy'schen Differentialgleichungen der n Funktionen w_k nach den n komplexen Variablen z_k, die bekanntlich hinreichend dafür sind, daß die w_k analytisch sind. Andrerseits braucht man (3) nur von rechts mit i_k zu multiplizieren und über alle k zu addieren, um (1) zu erhalten.

4. *Integralsätze.*

Mit genau denselben Mitteln wie im Falle der Quaternionen ($n = 2$) folgert man aus dem Gauß'schen Integralsatze für $2n$ Dimensionen die beiden Hauptsätze:

I. Hauptsatz: *Ist $w = f(z)$ in dem abgeschlossenen endlichen Hyperraume H mit der orientierbaren Grenzhyperfläche R rechtsregulär, und besitzt R in jedem Punkte eine in das Innere H gerichtete Normale mit den Richtungskosinussen ξ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$; ist ferner $v = g(z)$ in H linksregulär, so ist:*

$$\int_{(R)} w\,dZ\,v = 0 \quad , \tag{I}$$

wo $dZ = \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_{2k} + \xi_{2k+1} i) i_k dr$ und dr das Element von R ist.

Es sei jetzt $w = \sum_{l=0}^{n-1} i_l\, w_l$ eine der vorigen *analytischen* rechtsregulären Funktionen der n Variablen z_k. Jedes w_l ist dann einzeln rechtsregulär. Wir nehmen ferner als Funktion v die Funktion $n'(\zeta - z)^{-n}(\overline{\zeta - z})$, die *nicht* linksregulär ist. Ist daher H ein Bereich, in dem z nicht liegt, in dem aber w_l regulär ist, so ergibt der Beweis von Hauptsatz I wegen Satz 2:

$$\int_{(R)} w_l\,dZ\,n'(\zeta - z)^{-n}(\overline{\zeta - z}) + \sum_{\substack{h,k=1\\(h\neq k)}}^{n-1} \int_{(H)} c\,w_l\,dh\,x_{2k}\,x_{2h+1}\,i_k\,i\,i_h = 0 \quad , \tag{4}$$

wo das zweite Integral über H mit dem Element dh zu erstrecken ist. Wir wollen jetzt mit $K(z)$ den komplexen Teil von z verstehen, d.h. den Teil mit den Einheiten $1, i$. Dann ist:

$$K(z) = x_0 + i x_1 = \tfrac{1}{2}(z - i z i) \;,\quad K(z' + z'') = K(z') + K(z'') \;,$$

$$K(\alpha z) = \alpha K(z) \;,\ \alpha \text{ komplex.}$$

Der komplexe Teil des ersten Integrals von (4) ist somit:

$$\int_{(R)} w_l K(dZn'(\zeta - z)^{-n}(\overline{\zeta - z})) \ ,$$

derjenige der Integrale in der Summe von (4) ist null. Daher folgt:

$$\int_{(R)} w_l K(dZn'(\zeta - z)^{-n}(\overline{\zeta - z})) = 0 \ .$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit i_l und summiert über alle l, so folgt für jede analytische rechtsreguläre Funktion w:

$$\int_{(R)} w K(dZn'(\zeta - z)^{-n}(\overline{\zeta - z})) = 0 \ .$$

Aus dieser Gleichung folgt in bekannter Weise der

II. Hauptsatz: *Ist $w = f(z)$ in H analytisch rechtsregulär, wo H die in Hauptsatz I angegebenen Eigenschaften hat, so ist für jeden innern Punkt z von H*

$$w = f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} \int_{(R)} f(\zeta)\, K(dZn'(\zeta - z)^{-n}(\overline{\zeta - z})) \ . \qquad \text{(II)}$$

Diese beiden Sätze sind bereits von *Wirtinger* (Hauptsatz I) [3]) und *Martinelli* (Hauptsatz II) [4]) aufgestellt und bewiesen worden, aber I nur für den Fall der *analytischen* Funktionen.

Aus I kann man wieder die Integralformel [5]):

$$\int_{(R)} (w^{(h)} dZv + wdZv^{(h)}) = 0 \ , \ h = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 1 \ ,$$

beweisen, die stets gilt, falls w und v in jedem Punkte von R rechts- bzw. linksregulär sind, wobei ihr Verhalten in den innern Punkten von H beliebig ist.

---

[3]) *W. Wirtinger,* Ein Integralsatz über analytische Gebilde im Gebiete von mehreren komplexen Veränderlichen. Monatshefte f. Math. u. Phys. (1937), Bd. 45, p. 418.

[4]) *E. Martinelli,* Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse, R. Accad. d'Italia, Memorie della cla. di sc. f. m. e nat., Vol. IX, estr. 7.

Außerdem kommt noch die Arbeit von *Moisil,* Sur une classe de systèmes d'équations aux dérivées part. de la physique math. Bucar. Göbl (1931), in Frage, in der ähnliche Gedankengänge, wie in meiner Arbeit, verfolgt werden sollen. Doch ist mir die Arbeit leider nicht zugänglich geworden.

[5]) Siehe meine Arbeit: Integralsätze für reguläre Funktionen einer Quaternionen-Variablen, C.M.H., Vol. 10, p. 306.

5. Hartogs'scher Satz.

Aus diesen Grundlagen beweist man wie in meiner frühern Arbeit den Hartogs'schen:

Hartogs'scher Satz: *Ist $w = f(z)$ eine in jedem Punkte der geschlossenen orientierbaren, endlichen, sich nirgends durchdringenden Hyperfläche R analytische rechtsreguläre Funktion, so ist w auch im ganzen Innern von R analytisch rechtsregulär.*

Zum Beweise schließt man R durch zwei Hyperflächen R' und R'' so ein, daß jeder Punkt von R im Hyperraume H zwischen R' und R'' liegt, und $f(z)$ auch in jedem Punkte von H analytisch rechtsregulär ist. Dann gilt nach II. für jedes z von H

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} \left(\int\limits_{(R')} f(\zeta)\, K(\, dZ n'(\zeta - z)^{-n} (\overline{\zeta - z})) + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{(R'')} f(\zeta)\, K(dZ\, n'(\zeta - z)^{-n} (\overline{\zeta - z}) \right) ,$$

wobei die Richtung von dZ nach H geht. Man beweist, daß beide Integrale, *für sich allein genommen*, analytisch rechtsregulär sind. Liegt R'' im Innern, R' im Äußern von R, so existiert das erste Integral im ganzen Innern von R, das zweite im ganzen Äußern von R, inkl. den Punkt $z = \infty$. In letzterm Punkte hat es den Wert null.

Nun gibt es aber keine analytische rechtsreguläre Funktion, die im Punkte $z = \infty$ regulär ist, mit Ausnahme der Konstanten. Also muß das zweite Integral null sein, und der Satz ist bewiesen:

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} \int\limits_{(R)} f(\zeta)\; K(dZ n' (\zeta - z)^{-n} (\overline{\zeta - z})) \;.$$

Eine ausführliche Darstellung des Beweises wird in einer Dissertation der Universität Zürich veröffentlicht werden.

(Eingegangen den 2. März 1942.)