Über interpolation ganzer Funktionen.

Über Interpolation ganzer Funktionen

Von A. Pfluger, Freiburg

Einleitung

1. Die Arbeit entstand im Anschluß an folgendes Resultat:

Satz A. *Genügt die ganze Funktion $G(z)$ den Bedingungen*

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{r^2} < \frac{\pi}{2} , \quad M(r) = \operatorname{Max} |G(re^{i\varphi})| , \tag{1.1}$$

und

$$|G(m+in)| \leqq \kappa , \qquad m, n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots , \tag{1.2}$$

so ist $G(z)$ notwendig eine Konstante[1]).

Der Beweis gelingt auf einfachste Weise[2]) mit Hilfe der Interpolationsformel[3])

$$G(z) = \sigma(z) \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+n+mn} \cdot e^{-\frac{1}{2}\pi(m^2+n^2)}}{z-m-in} \cdot G(m+in) ,$$

wo $\sigma(z)$ die *Weierstraß*'sche σ-Funktion mit den Fundamentalperioden 1 und i bezeichnet.

Es ist naheliegend zu vermuten, daß die starre Bedingung (1.2) durch eine freiere ersetzt werden darf. Anstatt der Gitterpunkte $m+in$ betrachtet deshalb *B. J. Maitland*[4]) die zugehörigen Quadrate $Q_{m,n}$ mit den Endpunkten $m+in$, $m+1+in$, $m+1+i(n+1)$, $m+i(n+1)$ und greift aus jedem $Q_{m,n}$ irgend einen Punkt $a_{m,n}$ heraus, — jedoch so,

---

[1]) Ein erstes Resultat in dieser Richtung wurde bewiesen von *J. M. Whittaker* (Flat regions of integral functions, Proc. Edinburgh Math. Soc. 2 (1930), 111—128). Ein Satz von *G. Pólya* (Bemerkung zu der Aufgabe 105, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver., 43 (1933), 67—69) unterscheidet sich vom vorliegenden dadurch, daß die rechte Seite von (1.1) durch null ersetzt wird. Satz A wurde gleichzeitig und mit verschiedenen Methoden bewiesen von *V. Ganapathy Jyer* (A note on integral functions of order 2 bounded at the lattice points. Journal London Math. Soc., 11 (1936), 247—249) und vom Verf. (On analytic functions bounded at the lattice points, Proc. London Math. Soc., 42 (1937), 305—315).

[2]) Aus der Interpolationsformel folgt $|G(z)| < K$ in einer Umgebung von $z = 0$. Mit $G(z + M + iN)$, $M, N = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, an Stelle von $G(z)$ folgt $|G(z)| < K$ in einer Umgebung von $z = M + iN$.

[3]) Vgl. *G. Pólya*, loc. citat.; mit anderer Bezeichnung wurde die Formel erstmals von *J. M. Whittaker* (loc. citat) bewiesen.

[4]) Vgl. *B. J. Maitland*, On analytic functions bounded at a double sequence of points, Proc. London Math. Soc., 45 (1939) 440—457.

daß die $a_{m,n}$, nach wachsenden Beträgen geordnet und gleich a_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ gesetzt, der Bedingung $|a_\mu - a_\nu| \geqslant \delta > 0$, $\mu \neq \nu$, genügen. Unter Voraussetzung (1.1) gilt dann entsprechend

$$G(z) = \pi(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G(a_\nu)}{\pi'(a_\nu)\,(z - a_\nu)}\,, \tag{1.3}$$

wenn $\pi(z)$ eine ganze Funktion mit den $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ als einfachen Nullstellen, also im wesentlichen das kanonische Produkt über die Stellen a_ν bedeutet. Ist die ganze Funktion $G(z)$ überdies in den Interpolationsstellen a_ν gleichmäßig beschränkt, so ist sie notwendig eine Konstante. Letzteres beweist *B. J. Maitland* mit einer Schlußweise von *G. Jyer*[5]), welche deutlich zeigt, daß nur die Gültigkeit einer Interpolationsformel der Form (1.3) und eine feste Schranke für die ganze Funktion in den interpolierenden Stellen wesentlich sind. Damit ist ein bestimmtes Interpolationsproblem gestellt.

Um die Besonderheit der Problemlage klarzustellen, betrachten wir kurz den allgemeinen Fall:

A. Konstruktionsproblem: *Gegeben sei in der z-Ebene eine Stellenfolge* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ *mit* $a_\nu \to \infty\,(\nu \to \infty)$ *und eine beliebige Wertfolge* $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$. *Gesucht wird eine ganze Funktion* $G(z)$ *mit* $G(a_\nu) = A_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$.

Die Lösung lautet

$$G(z) = \pi(z) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\pi'(a_\nu) \cdot (z - a_\nu)} \left(\frac{z}{a_\nu}\right)^{k_\nu}.$$

Dabei ist $\pi(z)$ eine ganze Funktion mit den a_ν als einfachen Nullstellen. Die k_ν sind ganze Zahlen und streben im allgemeinen mit ν gegen unendlich, um die Konvergenz sicher zu stellen (konvergenzerzeugende Faktoren). Im Anschluß an (1.3) lautet unsere Frage: *Wie ist die Stellenfolge zu wählen, damit* $k_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, *gesetzt werden darf?* Offenbar dürfen die $\pi'(a_\nu)$ gegenüber den A_ν nicht zu klein werden. Dies stellt aber an die Stellenfolge gewisse Bedingungen und es ist unsere Aufgabe, diese Bedingungen zu untersuchen.

Vorangehend ist die Wertfolge gegeben und die zugehörige ganze Funktion gesucht. Eine engere Fassung des Problems, und um diese handelt es sich hier, ist die folgende:

---

[5]) Vgl. hiezu *V. Ganapathy Jyer*, Some theorems on integral functions bounded at sequence of points, Proc. London Math. Soc. 43 (1937) 63—72.

B. Darstellungsproblem: *Vorgegeben ist eine ganze Funktion von bestimmtem Wachstum. Wie ist die Stellenfolge zu wählen, damit die ganze Funktion durch die Interpolationsformel* (1.3) *darstellbar ist?*

Um das Wachstum der ganzen Funktion genauer erfassen zu können, betrachten wir reellwertige Funktionen $\varrho(r)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Rechts- und Linksableitungen von $\varrho(r)$ existieren im Intervall $(0, \infty)$ und stimmen dort stückweise überein.
2. Es gilt

$$\lim_{r \to \infty} \varrho(r) = \varrho$$

und

$$\lim_{r \to \infty} \varrho'(r) \cdot r \cdot \log r = 0 \;,$$

wenn für $\varrho'(r)$ die Rechts und Linksableitungen eingesetzt werden; und definieren: *Eine ganze Funktion von der Ordnung* ϱ *ist von* präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$, *wenn der Ausdruck* $r^{-\varrho(r)} \cdot \log M(r)$ *für* $r \to \infty$ *eine positive obere Grenze besitzt*[6]). Die Funktion

$$h(\varphi) = \limsup_{r \to \infty} r^{-\varrho(r)} \cdot \log |\, G(r e^{i\varphi}) \,|$$

mißt dann das maximale Anwachsen von $|G(z)|$ längs der Strahlen $\arg z = \varphi$ und heißt Strahltypus von $G(z)$ bezüglich der Wachstumsordnung $\varrho(r)$ [7]).

Damit präzisiert sich unsere Aufgabe dahin: Gegeben sei eine ganze Funktion $G(z)$ von präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$ mit dem Strahltypus $h(\varphi)$. Wie ist die Stellenfolge $\{a_\nu\}$ zu wählen, damit $G(z)$ durch die Interpolationsformel (1.3) darstellbar ist? Hierzu haben sowohl $\pi(z)$ als auch die $\pi'(a_\nu)$ bestimmte Forderungen zu erfüllen. In den Nr. 14 und Nr. 18 wird gezeigt, daß folgende drei Bedingungen genügen:

a) $\log |\pi(re^{i\varphi})|$ ist „fast überall" von der Größenordnung $H(\varphi) \cdot r^{\varrho(r)}$.

b) $\log |\pi'(a_\nu)|$ und $H(\varphi_\nu) \cdot r_\nu^{\varrho(r_\nu)}$, $a_\nu = r_\nu e^{i\varphi_\nu}$ sind asymptotisch gleich.

c) Es ist $h(\varphi) < H(\varphi)$ für alle φ.
Dabei ist $\varrho(r)$ die präzise Ordnung von $G(z)$ und $H(\varphi)$ der diesbezügliche Strahltypus von $\pi(z)$.

---

[6]) Vgl. *G. Valiron*, Lectures on the general Theorie of integral functions, Toulouse, Edouard Privat, 1923, insbes. S. 64—67.

[7]) Die Eigenschaften dieser Funktion wurden erstmals von *E. Phragmén* und *E. Lindelöf* (Sur l'extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, Acta Math. 31 (1908)) untersucht.

Aus diesen Forderungen resultieren die Bedingungen für die a_ν; denn letztere bestimmen $\pi(z)$. Dadurch konzentriert sich aber unsere ursprüngliche Aufgabe auf folgendes: *Es sind Nullstellenverteilungen zu finden, deren zugehörige kanonische Produkte den obigen Bedingungen* (*a*) *und* (*b*) (*und* (*c*)) *genügen.*

Wir erledigen die Aufgabe in zwei Schritten. Zunächst suchen wir solche Nullstellenverteilungen, deren kanonische Produkte den Bedingungen (a) genügen. Diese Aufgabe ist für nichtganze Ordnungen in einer frühern Arbeit[8]) vollständig gelöst worden. Für ganze Ordnungen ist die Aufgabe bedeutend schwieriger und wird im folgenden Abschnitt A behandelt werden, allerdings nur für ganze Funktionen vom Mitteltypus einer ganzen Ordnung, $\varrho(r) \equiv \varrho$. In beiden Fällen drückt sich die Bedingung für die Nullstellenverteilung in einer Art „Meßbarkeit" aus, die allerdings bei ganzer Ordnung schärfer zu fassen ist[9]). In einem zweiten Schritt suchen wir die Bedingungen (a) und (b) zu erfüllen, indem wir die Forderung der Meßbarkeit noch durch eine zweite ergänzen, die wir mit dem Wort „unverdichtet" benennen und in Nr. 15 genau umgrenzen werden.

Die Hauptresultate über ganze Funktionen mit ganzer Ordnung und meßbarer Nullstellenverteilung sind in Satz 1 (Nr. 2) und Satz 2 (Nr. 10) zusammengefaßt, jene über Interpolation in Satz 4 bis Satz 7 (Nr. 18 bis Nr. 20). Als Anwendung unserer Resultate wird die Erweiterung von Satz A vollzogen[10]).

---

[8]) *A. Pfluger*, Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen, Comm. Math. Helv. Vol. 11 (1938), 180—214 und Vol. 12 (1939/40), 25—65. Diese Arbeit wird im folgenden mit *P* zitiert.

[9]) Bezüglich des Begriffes „meßbar" vgl. *P*, 1. Teil, Nr. 11 und Nr. 2 der vorliegenden Arbeit.

[10]) Wie mir kürzlich durch ein Referat in der Mathematical Reviews bekannt wurde, hat sich *B. Lévine* in seiner Arbeit „Sur certaines applications de la série d'interpolation de Lagrange dans la théorie des fonctions entières" (Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S. 8 (50), 437—454 (1940), russisch mit französischem Auszug) mit demselben Interpolationsproblem beschäftigt. Soweit ich dem Referat entnehmen konnte, dürften unsere Resultate für ganze Funktionen einer nichtganzen Ordnung wenig von einander verschieden sein. Im Falle ganzer Ordnung verlangt *B. Lévine* neben der Meßbarkeit, daß die $a_\nu e^{\pi i m/\varrho}$ $(m = 1, 2, \ldots, \varrho - 1)$ in den $\{a_\nu\}$ enthalten seien. Es war nun gerade ein Hauptziel meiner vorliegenden Arbeit (Abschnitt A) bei ganzer Ordnung von solchen starren Symmetriebedingungen frei zu werden und nur mit asymptotischen Forderungen auszukommen. In der Tat genügt es, neben eine etwas schärfere Art von Meßbarkeit (2.5) die nur asymptotische Gleichgewichtsforderung (2.4) zu setzen.

A. Ganze Funktionen
von ganzer Ordnung mit meßbarer Nullstellenverteilung

2. Problem und Hauptsatz.

Wir nennen eine Verteilung von Stellen dann **meßbar** bezüglich einer präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$, wenn für irgend zwei Stetigkeitsstellen einer monoton wachsenden und beschränkten Funktion $N(\varphi)$

$$|n(t;\varphi',\varphi'') - (N(\varphi'') - N(\varphi'))\,t^{\varrho(t)}| = o(t^{\varrho(t)}),\ t > 0 \text{ [11]} \qquad (2.1)$$

ist. Dabei bezeichnet $n(t;\varphi',\varphi'')$ die Anzahl der Stellen im Sektor $|z| \leqslant t$, $\varphi' \leqslant \arg z < \varphi''$; $N(\varphi)$ heißt Maßfunktion der Stellenverteilung[12].

Jede ganze Funktion $G(z)$ mit *nichtganzer* Ordnung ϱ und meßbarer Nullstellenverteilung verhält sich asymptotisch regulär, d. h. es gilt für jedes φ

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\ r^{-\varrho(r)}\cdot\log\,|G(re^{i\varphi})| = h(\varphi) \qquad (2.2)$$

oder m. a. W. der Ausdruck hinter lim* strebt gegen den Strahltypus, wenn r auf einer geeigneten Menge von linearer Dichte 1 gegen Unendlich strebt[13].

Umgekehrt, verhält sich eine ganze Funktion mit *beliebiger* präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$, $\varrho(r)\to\varrho$, asymptotisch regulär, so ist ihre Nullstellenverteilung meßbar bezüglich $\varrho(r)$ und es besteht zwischen Strahltypus und Maßfunktion die Beziehung

$$2\pi\cdot d\,N(\varphi) = \varrho\,h(\varphi)\,d\varphi + \frac{1}{\varrho}\,d h'(\varphi)\ . \qquad (2.3)$$

Bei *ganzer* Ordnung ϱ besitzen die Nullstellen überdies eine Art Gleichgewichtseigenschaft, die sich im Bestehen der beiden Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} \cos\,\varrho\theta\cdot d\,N(\theta) = 0\ ,\quad \int_0^{2\pi} \sin\,\varrho\theta\cdot d\,N(\theta) = 0\ , \qquad (2.4)$$

ausdrückt[14].

---

[11]) Hier und im folgenden bedeutet die Gleichung $f(r) = O(\varphi(r))$, daß der Quotient $\frac{f(r)}{\varphi(r)}$ bei $r\to\infty$ von einer gewissen Stelle an beschränkt bleibt; $f(r) = o(\varphi(r))$ dagegen besagt, daß $\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{\varphi(r)} = 0$ sei. Insbesondere bezeichnet $O(1)$ eine Größe, die bei $r\to\infty$ beschränkt bleibt; dagegen $o(1)$ eine solche, die bei $r\to\infty$ gegen Null strebt.

[12]) Vgl. Anm. 9.

[13]) bezüglich „Menge von linearer Dichte 1" vgl. P, 1. Teil, S. 195.

[14]) Vgl. P, 2. Teil, insbes. Satz 15 und Nr. 37.

Um letzteres Resultat umzukehren, genügen der obige Begriff der Meßbarkeit und die Forderung der Gleichgewichtseigenschaft (2.4) nicht. Es ist vielmehr eine schärfere Fassung des Begriffes „meßbar“ notwendig. Wir nennen eine Verteilung von Stellen **meßbar im engern Sinne bezüglich einer ganzen Ordnung** ϱ, *wenn für irgend zwei Stetigkeitsstellen einer monoton wachsenden Funktion* $N(\varphi)$

$$
\begin{gathered}
|n(t\,;\,\varphi',\varphi'') - (N(\varphi'') - N(\varphi'))\,t^{\varrho}| < K\cdot\sigma(t)\ ,\ t>0\ , \\
\sigma(t) = \begin{cases} t^{\varrho}\ , & \text{für}\quad 0<t<e\ , \\ t^{\varrho}(\log t)^{-2-\varepsilon}\ ,\ \varepsilon>0\ , & \text{für}\quad t\geqq e\ , \end{cases}
\end{gathered}
\tag{2.5}
$$

gilt. Mit $N(2\pi) - N(0) = D$ und $n(t\,;\,0,2\pi) = n(t)$ ist dann auch

$$
|n(t) - Dt^{\varrho}| < K\cdot\sigma(t), \qquad t>0\ . \tag{2.6}
$$

Hiernach gilt

Satz 1. *Ist eine Nullstellenverteilung meßbar im engern Sinne bezüglich der ganzen Ordnung* $\varrho(r)$ *und erfüllt ihre Maßfunktion* $N(\varphi)$ *die Gleichgewichtsforderung* (2.4), *so gilt für das Weierstraß'sche kanonische Produkt* $\Pi(z)$

$$
\lim_{r\to\infty}{}^{*}\ r^{-\varrho}\cdot\log|\Pi(re^{i\varphi})| = H(\varphi) = \lambda\cos(\varrho\varphi+\varrho\alpha) + h(\varphi)\ . \tag{2.7}
$$

Dabei ist

$$
a = \lambda e^{i\varrho\alpha} = \frac{1}{\varrho}\lim_{R\to\infty}\sum_{|a_\mu|\leqq R} a_\mu^{-\varrho} \tag{2.8}
$$

und

$$
h(\varphi) = -\int_0^{2\pi}\theta\sin\varrho\varphi\cdot dN(\varphi+\theta)\ . \tag{2.9}
$$

Bemerkung: Wie später gezeigt werden wird (Nr. 9 und 10), gilt zwischen $N(\varphi)$ und $h(\varphi)$ in (2.7) die Beziehung (2.3).

Die Abänderung endlich vieler Nullstellen hat auf das Resultat keinen Einfluß.

Im ganzen folgenden Abschnitt A (Nr. 3 bis 11) wird unter ϱ immer eine positive ganze Zahl verstanden.

3. Beweisanlage für Satz 1.

Der Beweis dieses Satzes scheint zunächst deshalb besondere Schwierigkeiten zu bieten, weil im kanonischen Produkt

$$
\Pi(z) = \prod_{\mu=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_\mu}\,,\,\varrho\right)\ ,\quad E(u\,,\varrho) = (1-u)\cdot e^{u+\frac{1}{2}u^2+\cdots+\frac{1}{\varrho}u^{\varrho}}\ ,
$$

jede einzelne Nullstelle einen Beitrag von der Ordnung ϱ liefert. Änderung einer einzigen Nullstelle bewirkt also eine Störung von der Ordnung ϱ und es genügt deshalb nicht nur das asymptotische Verhalten der Nullstellen zu betrachten. Aber zufolge der Gleichgewichtseigenschaft (2.4) und der Meßbarkeit im engern Sinne ist es möglich, den individuellen und den asymptotischen Einfluß der Nullstellen voneinander zu trennen. Es gilt nämlich

Lemma 1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 existiert*

$$\lim_{R\to\infty} \sum_{|a_\mu| \leqq R} a_\mu^{-\varrho} = \varrho\,\lambda\, e^{i\varrho\alpha} = \varrho\, a\ . \tag{3.1}$$

Wir können daher schreiben

$$\Pi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|a_\mu|\leqq R} e^{\frac{1}{\varrho}\left(\frac{z}{a_\mu}\right)^\varrho} \cdot \lim_{R\to\infty} \prod_{|a_\mu|\leqq R} \left(1-\frac{z}{a_\mu}\right) e^{\frac{z}{a_\mu}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_\mu}\right)^2+\cdots+\frac{1}{\varrho-1}\left(\frac{z}{a_\mu}\right)^{\varrho-1}},$$

oder

$$\Pi(z) = e^{az^\varrho}\cdot \pi(z)\ . \tag{3.2}$$

Es beschränkt sich also der Einfluß der Nullstellen auf den harmlosen Exponentialfaktor e^{az^ϱ}, während auf den zweiten Faktor nur das asymptotische Verhalten der Nullstellenverteilung einen Einfluß hat. Denn dort ist jeder einzelne Faktor von der Ordnung $\varrho - 1$. Es bleibt somit die Aufgabe, das asymptotische Verhalten der ganzen Funktion

$$\pi(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|a_\mu|\leqq R} E\left(\frac{z}{a_\mu}\,,\ \varrho-1\right) \tag{3.3}$$

zu untersuchen. Offenbar konvergiert das Produkt (3.3) nur bedingt. Daß es überhaupt konvergiert, beruht wesentlich auf der Meßbarkeit im engern Sinne und der Gleichgewichtseigenschaft (2.4), sowie des konzentrischen Einfangens der a_μ beim Grenzübergang. Das Produkt über irgend eine Teilfolge der a_μ braucht nicht mehr zu konvergieren.

Zur Lösung der Aufgabe beweisen wir zunächst folgenden Spezialfall:

Lemma 2. *Sei* arg $z = \varphi$ *irgend eine feste Richtung und der Winkelraum* $|\arg z - \varphi| < \eta$, $\eta > 0$ *von Nullstellen frei. Im übrigen erfülle die Nullstellenverteilung die Voraussetzungen des Satz 1. Dann gilt für* (3.3)

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\varrho} \log|\pi(re^{i\varphi})| = h(\varphi) = -\int_0^{2\pi} \theta \sin\varrho\theta \cdot d\,N(\varphi+\theta)\ . \tag{3.4}$$

Um von hier zum allgemeinen Sachverhalt vorzustoßen, benötigen wir[15])

Lemma 3. *Sei die ganze Funktion* $G(z)$ *vom Mitteltypus der Ordnung* ϱ *und* $h(\varphi)$ *ihr Strahltypus. Gilt im offenen Winkelraum* $-\alpha<\varphi<+\alpha$

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\varrho}\cdot\log|G(re^{i\varphi})| = h(\varphi) \ ,$$

so gilt für die Grenzstrahlen $\varphi = \pm\alpha$

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\ r^{-\varrho}\log|G(re^{\pm i\alpha})| = h(\pm\alpha) \ .$$

Ferner

Lemma 4. *Gegeben sei eine Nullstellenverteilung* V, *die den Voraussetzungen des Satzes 1 genügt. Für jede feste Richtung* φ *läßt sich* V *durch eine Verteilung* V' *zur Verteilung* V^* *ergänzen und die letztere in zwei komplementäre Verteilungen* V_1 *und* V_2 *zerlegen, derart, daß*

1. *alle Verteilungen* V', V^*, V_1 *und* V_2 *den Voraussetzungen des Satzes 1 genügen,*
2. *die Verteilung* V' *in* $|\arg z-\varphi|<\varepsilon$, *die Verteilung* V_1 *in* $\varphi-\varepsilon<\arg z\leqslant\varphi$ *und die Verteilung* V_2 *in* $\varphi<\arg z\leqslant\varphi+\varepsilon$ *nullstellenfrei ist.*

Bezeichnen wir nun die zu V, V', V^*, V_1 und V_2 gehörigen Maßfunktionen mit N, N', N^*, N_1 und N_2 und die zugehörigen kanonischen Produkte mit π, π', π^*, π_1 und π_2, so gilt

$$\pi^* = \pi\cdot\pi' = \pi_1\cdot\pi_2 \tag{3.5}$$

und

$$N^* = N + N' = N_1 + N_2 \ . \tag{3.6}$$

Gemäß Lemma 2 und Lemma 3 ist nun

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\ r^{-\varrho}\cdot\log|\pi_i(re^{i\varphi})| = -\int_0^{2\pi}\theta\sin\varrho\theta\cdot dN_i(\varphi+\theta) \ , \quad i=1,2 \ ,$$

und daher

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\ r^{-\varrho}\cdot\log|\pi^*(re^{i\varphi})| = -\int_0^{2\pi}\theta\sin\varrho\theta\cdot d(N_1(\varphi+\theta)+N_2(\varphi+\theta)) \ .$$

[15]) Vgl. P, 1. Teil, Nr. 8.

Nach Lemma 2 gilt

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\varrho} \cdot \log |\pi'(re^{i\varphi})| = -\int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN'(\varphi+\theta)$$

und daher

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-\varrho} \cdot \log \left|\frac{\pi^*(re^{i\varphi})}{\pi'(re^{i\varphi})}\right| = -\int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot d(N^*(\varphi+\theta) - N'(\varphi+\theta)) \, ,$$

schließlich nach (3.5) und (3.6)

$$\lim_{r\to\infty}{}^{*}\, r^{-\varrho} \cdot \log |\pi(re^{i\varphi})| = -\int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN(\varphi+\theta) \; .$$

Daraus folgt aber in Verbindung mit (3.2) die Behauptung des Satz 1.

4. Beweis von Lemma 1.

Es seien irgend zwei beliebig große Radien R' und $R'' > 2R'$ gegeben. Wir wählen eine Zahl c und eine ganze Zahl m mit

$$2 < c < 4 \qquad \text{und} \qquad R'' = c^m R' \tag{4.1}$$

und betrachten die zugehörige Folge

$$R' = R_1, \;\; R_{\nu+1} = cR_\nu, \;\; \nu = 1, 2, 3, \ldots, m \;, \;\; R_{m+1} = R'' \; .$$

Setzen wir

$$S(R', R'') = \sum_{R' < |a_\mu| \leqq R''} a_\mu^{-\varrho}$$

und

$$A_\nu = \sum_{R_\nu < |a_\mu| \leqq R_{\nu+1}} a_\mu^{-\varrho}$$

so wird

$$S(R', R'') = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu \; . \tag{4.2}$$

Zur Abschätzung von A_ν teilen wir die z-Ebene in k_ν Winkelräume ein von maximaler Öffnung δ_ν — zwei Größen, die wir später festlegen werden. Ihre Schenkel $\arg z = \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{k_\nu}, \theta_{k_\nu+1} = \theta_1 + 2\pi$ seien Stetigkeitsstellen von $N(\varphi)$, so daß gemäß (2.5)

$$|n(t;\, \theta_j, \theta_{j+1}) - (N(\theta_{j+1}) - N(\theta_j))t^\varrho| < K\sigma(t) \, , \;\; t > 0 \, , \;\; j = 1, 2, \ldots, k_\nu . \tag{4.3}$$

Setze $N(\theta_{j+1}) - N(\theta_j) = d_j$. Dann existiert gemäß dem Mittelwertsatz der Integralrechnung in jedem Intervall (θ_j, θ_{j+1}) eine Richtung φ_j, so daß wegen (2.4)

$$\sum_{j=1}^{k_\nu} d_j \cos \varrho\varphi_j = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{k_\nu} d_j \sin \varrho\varphi_j = 0 \; . \tag{4.4}$$

Jene Nullstellen a_μ, die im Winkelraum $\theta_j \leqq \arg z < \theta_{j+1}$ gelegen sind, drehen wir um O auf den Strahl $\arg z = \varphi_j$ und bezeichnen diese neuen Stellen mit $b_\mu^{(j)} = r_\mu e^{i\varphi_j}$. Für ihre Anzahlfunktion gilt

$$n_j(t) = n(t\,;\,\theta_j,\,\theta_{j+1})$$

und daher

$$|n_j(t) - d_j \cdot t^\varrho| < K \cdot \sigma(t), \quad t > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k_\nu\,. \tag{4.5}$$

Wir setzen

$$\sum_{\substack{R_\nu < |b_\mu^{(j)}| \leqq R_{\nu+1} \\ j \text{ fest}}} (b_\mu^{(j)})^{-\varrho} = B_\nu^{(j)}\,,\ j = 1\,,2\,,\ldots,k_\nu\,, \tag{4.6}$$

und

$$\sum_{R_\nu < |a_\mu| \leqq R_{\nu+1}} |a_\mu|^{-\varrho} = C_\nu\,. \tag{4.7}$$

Zwischen jedem a_μ im Winkelraum $(\theta_j\,,\theta_{j+1})$ und dem zugehörigen $b_\mu^{(j)}$ besteht nun die Ungleichung

$$|a_\mu^{-\varrho} - (b_\mu^{(j)})^{-\varrho}| \leqq \varrho\,\delta_\nu \cdot |a_\mu|^{-\varrho}\,,\ j = 1\,,2\,,\ldots,k_\nu\,,$$

und daher insgesamt

$$|A_\nu - \sum_{j=1}^{k_\nu} B_\nu^{(j)}| \leqq \varrho\,\delta_\nu \cdot C_\nu\,,\ \nu = 1\,,2\,,\ldots,m\,. \tag{4.8}$$

Wegen (4.6) und $b_\mu^{(j)} = r_\mu \cdot e^{i\varphi_j}$ ist nun

$$B_\nu^{(j)} = e^{-i\varrho\varphi_j} \cdot \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} t^{-\varrho} \cdot d\,n_j(t) = e^{-i\varrho\varphi_j}\left\{\frac{n_j(t)}{t^\varrho}\Bigg|_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} + \varrho\int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{n_j(t)\,dt}{t^{\varrho+1}}\right\} =$$

$$= e^{-i\varrho\varphi_j} \cdot \left\{\varrho\,\delta_j \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{dt}{t} + \frac{n_j(t) - d_j t^\varrho}{t^\varrho}\Bigg|_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} + \varrho\int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{n_j(t) - d_j\,t^\varrho}{t^{\varrho+1}} \cdot dt\right\}.$$

Weiter folgt gemäß (4.5)

$$\left| B_\nu^{(j)} - \varrho\,d_j\,e^{-i\varrho\varphi_j} \cdot \log\frac{R_{\nu+1}}{R_\nu}\right| < K\,\frac{\sigma(t)}{t^\varrho}\Bigg|_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} + \varrho K \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{\sigma(t)\,dt}{t^{\varrho+1}}$$

$$< \left(2 + \varrho\ \log\frac{R_{\nu+1}}{R_\nu}\right) K \cdot \frac{\sigma(R_\nu)}{R_\nu^\varrho}$$

und schließlich aus (4.1) und (2.5)

$$| B_\nu^{(j)} - \varrho d_j e^{-i\varrho\varphi_j} \cdot \log c \,| < K(2 + \varrho \log 4)\,(\log R_\nu)^{-2-\varepsilon}, \tag{4.9}$$

$$j = 1, 2, \ldots, k_\nu$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Entsprechend gilt wegen (4.7) und (2.5)

$$|C_\nu - \varrho D \log c| < K(2 + \varrho \log 4)\,(\log R_\nu)^{-2-\varepsilon},\ \nu = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{4.10}$$

Die Addition der Ungleichungen (4.9) unter Berücksichtigung von (4.4) ergibt

$$\Big| \sum_{j=1}^{k_\nu} B_\nu^{(j)} \Big| < K_1 k_\nu (\log R_\nu)^{-2-\varepsilon}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Daher wird aus (4.8) in Verbindung mit (4.10)

$$|A_\nu| < \varrho^2 D \log 4 \cdot \delta_\nu + (k_\nu + 2\pi\varrho)\, K_1\, (\log R_\nu)^{-2-\varepsilon}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Nun wählen wir

$$\delta_\nu = \frac{2\pi}{(\nu \log 2 + \log R')^{1+\varepsilon/2}}$$

und

$$2\pi\varrho < k_\nu < 2(\nu \log 2 + \log R')^{1+\varepsilon/2}, \ R' \text{ genügend groß.}$$

Dann wird wegen $R_\nu \geqslant 2^\nu R'$

$$|A_\nu| < \frac{K'}{(\nu \log 2 + \log R')^{1+\varepsilon/2}} + \frac{4K_1}{(\nu \log 2 + \log R')^{1+\varepsilon/2}}\,;$$

$$|A_\nu| < K'' (\log R')^{-\varepsilon/4} \cdot \nu^{-1-\varepsilon/4}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Nun ist $\sum_{\nu=1}^{m} \nu^{-1-\varepsilon/4} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1-\varepsilon/4} = C$ und daher in Verbindung mit (4.2)

$$|S(R', R'')| < K''' \cdot (\log R')^{-\varepsilon/4}\,. \tag{4.11}$$

Da aber K''' von R' und R'' unabhängig ist und (4.11) für alle $R'' > 2R'$ gilt, so ist hiedurch Lemma 1 bewiesen.

5. Beweis von Lemma 2.

Die Zahl $r > e^{10}$ sei beliebig vorgegeben. Wir betrachten die zugehörige Folge

$$0 = R_1, \quad R_2 = r^3, \quad R_{\nu+1} = rR_\nu, \quad \nu = 2, 3, 4, \ldots \tag{5.1}$$

und setzen

$$A_\nu(z) = \log \prod_{R_\nu < |a_\mu| \leq R_{\nu+1}} E\left(\frac{z}{a_\mu}, \varrho - 1\right), \ \nu = 1, 2, \ldots\,. \tag{5.2}$$

Dann ist [16])

$$\log \pi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(z) \quad . \tag{5.3}$$

Zur Abschätzung von $A_\nu(z)$ wird der Winkelraum $\varphi + \eta \leqslant \arg z \leqslant \varphi + 2\pi - \eta$ eingeteilt in k_ν kleine Winkelräume von maximaler Öffnung δ_ν. Die Wahl ihrer Schenkel $\arg z = \theta_j$, $j = 1, 2, \ldots, k_\nu + 1$, $\theta_1 = \varphi + \eta$, $\theta_{k_\nu+1} = \varphi + 2\pi - \eta$, und der Richtungen $\arg z = \varphi_j$ im Intervall (θ_j, θ_{j+1}) treffen wir entsprechend wie in Nr. 4, so daß, unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen, (4.3) und (4.4) erfüllt sind. Wieder drehen wir die Nullstellen a_μ im Winkelraum $\theta_j \leqslant \arg z < \theta_{j+1}$ um O auf den Strahl $\arg z = \varphi_j$, so daß die Anzahlfunktion der $b_\mu^{(j)}$ (4.5) erfüllt. Wir setzen

$$B_\nu^{(j)}(z) = \log \prod_{\substack{R_\nu < |b_\mu^{(j)}| \leqslant R_{\nu+1} \\ j \text{ fest}}} E\left(\frac{z}{b_\mu^{(j)}}, \varrho - 1\right), \quad j = 1, 2, \ldots, k_\nu \, . \tag{5.4}$$

Bezeichnet C_μ jenen Bogen, der ein a_μ im Winkelraum $\theta_j \leqslant \arg z < \theta_{j+1}$ mit dem entsprechenden $b_\mu^{(j)}$ verbindet, so besteht zwischen den beiden entsprechenden *Weierstraß*'schen Primfaktoren $E\left(\frac{z}{a_\mu}, \varrho - 1\right)$ und $E\left(\frac{z}{b_\mu^{(j)}}, \varrho - 1\right)$ die folgende Beziehung

$$\begin{aligned} &\log E\left(\frac{z}{a_\mu}, \varrho - 1\right) - \log E\left(\frac{z}{b_\mu^{(j)}}, \varrho - 1\right) = \\ &= \int_{C_\mu} \frac{d}{d\zeta} \log E\left(\frac{z}{\zeta}, \varrho - 1\right) \cdot d\zeta = \int_{C_\mu} \frac{z^\varrho \, d\zeta}{\zeta^\varrho (\zeta - z)} \, . \end{aligned} \tag{5.5}$$

Mit $z = re^{i\varphi}$ und $\zeta = te^{i\theta}$ ist wegen $|\varphi - \arg a_\mu| \geqslant \eta$

$$|\zeta - z| \geqslant (r + t) \sin \eta/2 \geqslant \eta/4\,(t + r)\,, \qquad \eta < \pi/3 \, , \tag{5.6}$$

und daher das Integral der letzten Seite von (5.5) wegen $\theta_{j+1} - \theta_j \leqslant \delta_\nu$ absolut kleiner als $4\,\frac{\delta_\nu}{\eta} \cdot \frac{r^\varrho}{r_\mu^{\varrho-1}(r_\mu + r)}$.

---

[16]) Es ist zu beachten, daß infolge (2.5) der Ursprung nullstellenfrei ist. Diese Einschränkung wurde aus beweistechnischen Gründen vorgenommen. Im übrigen hat die Abänderung von endlich vielen Nullstellen auf das Resultat keinen Einfluß.

Also insgesamt, gemäß (5.2) und (5.4)

$$| A_\nu(re^{i\varphi}) - \sum_{j=1}^{k_\nu} B_\nu^{(j)}(re^{i\varphi}) | < 4 \frac{\delta_\nu}{\eta} \sum_{R_\nu < r_\mu \lessgtr R_{\nu+1}} \frac{r^\varrho}{r_\mu^{\varrho-1}(r + r_\mu)} = 4 \frac{\delta_\nu}{\eta} \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{r^\varrho \cdot dn(t)}{t^{\varrho-1}(t+r)} =$$

$$= 4 \frac{\delta_\nu}{\eta} \cdot \frac{r^\varrho\, n(t)}{t^{\varrho-1} \cdot (t+r)} \Bigg|_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} - 4 \frac{\delta_\nu}{\eta} \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} r^\varrho n(t) \cdot \frac{d}{dt} \frac{1}{t^{\varrho-1}(t+r)} \cdot dt\,.$$

Wegen (2.6) und $\sigma(t) \leqslant t^\varrho$ ist das erste Glied der rechten Seite kleiner als $8 \frac{\delta_\nu}{\eta} \cdot (D + K)\, r^\varrho$. Der Differentialquotient unter dem Integralzeichen ist negativ, sein absoluter Betrag kleiner als $\frac{\varrho}{t^\varrho(t+r)}$. Der Betrag des Integrals selbst also kleiner als $3\varrho\,(D + K)\, r^\varrho \log r$. Folglich ist

$$| A_\nu(re^{i\varphi}) - \sum_{j=1}^{k\nu} B_\nu^{(j)}(re^{i\varphi}) | < \frac{\delta_\nu}{\eta} \cdot K' r^\varrho \log r\,. \tag{5.7}$$

6. Zur Abschätzung der $B_\nu^{(j)}(z)$ betrachten wir vorerst den Fall, daß alle Stellen b_μ auf der negativen reellen Achse liegen und ihre Anzahlfunktion $n(t)$ der Bedingung

$$|n(t) - dt^\varrho| < K\sigma(t)\quad,\qquad t > 0\,, \tag{6.1}$$

genügt. Mit $b_\mu = -r_\mu$ wird dann [17])

$$B_\nu(z) = \log \prod_{R_\nu < r_\mu \lessgtr R_{\nu+1}} E\left(-\frac{z}{r_\mu}, \varrho - 1\right) = \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \log E\left(-\frac{z}{t}, \varrho - 1\right) \cdot dn(t)$$

$$= n(t) \log E\left(-\frac{z}{t}, \varrho - 1\right) \Bigg|_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} - (-1)^\varrho \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{z^\varrho \cdot n(t) \cdot dt}{t^\varrho(t+z)}$$

$$= d \left\{ t^\varrho \log E\left(-\frac{z}{t}, \varrho - 1\right) \Bigg|_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} - (-1)^\varrho \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{z^\varrho \cdot dt}{z+t} \right\} \tag{6.2}$$

$$+ \left\{ (n(t) - dt^\varrho) \log E\left(-\frac{z}{t}, \varrho - 1\right) \Bigg|_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} - (-1)^\varrho \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{z^\varrho (n(t) - dt^\varrho)\, dt}{t^\varrho(t+z)} . \right\}$$

---

[17]) Weil der Ursprung keine Nullstelle ist, und die Weierstraßschen Primfaktoren E von der Ordnung $\varrho - 1$ sind, haben alle nachfolgenden Ausdrücke auch für $t = 0$ einen Sinn oder es existiert ein Grenzwert für $t \to 0$.

Wir setzen

$$J_\nu(z) = \Re\left\{ t^\varrho \log E\left(-\frac{z}{t}, \varrho - 1\right) \Bigg|_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} - (-1)^\varrho \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{z^\varrho \cdot dt}{z+t} \right\} \tag{6.3}$$

und

$$j_\nu(r) = \operatorname*{Max}_{\substack{|z|=r \\ t=R_\nu,\, R_{\nu+1}}} \sigma(t) \left| \log E\left(-\frac{z}{t}, \varrho - 1\right) \right| + \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{r^\varrho \sigma(t) \cdot dt}{t^\varrho (t+r)} \,. \tag{6.4}$$

Aus (6.4), (6.3), (6.2), (6.1) und (5.6) (wir setzen $|\varphi| \leqq \pi - \eta$ voraus) folgt dann

$$|\Re B_\nu(z) - d J_\nu(z)| < \frac{4K}{\eta} \cdot j_\nu(r) \,, \quad |z| = r \,. \tag{6.5}$$

Zur weitern Abschätzung der Ausdrücke J und j formen wir folgendermaßen um

$$\int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{z^\varrho \cdot dt}{z+t} = \begin{cases} z^\varrho \left\{ \log \dfrac{R_2}{z} + \log\left(1 + \dfrac{z}{R_2}\right) \right\}, & \nu = 1 \,, \\ z^\varrho \left\{ \log \dfrac{R_{\nu+1}}{R_\nu} + \log\left(1 + \dfrac{z}{R_{\nu+1}}\right) - \log\left(1 + \dfrac{z}{R_\nu}\right) \right\}, & \nu = 2, 3, \ldots \,. \end{cases}$$

Wegen (5.1) und $\log|1+u| < K|u|$ für $|u| \leqq \frac{1}{2}$ folgt weiter

$$\Re \int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{z^\varrho \cdot dt}{z+t} = \begin{cases} 2 r^\varrho \log r \cdot \cos \varrho\varphi + r^\varrho \cdot \varphi \sin \varphi\varrho + r^{\varrho-2} \cdot O(1) \,, & \nu = 1 \,, \\ r^\varrho \log r \cdot \cos \varrho\varphi + r^{\varrho-\nu} \cdot O(1) \,, & \nu = 2, 3, \ldots \,. \end{cases}$$

Aus

$$\log E\left(-\frac{z}{t}, \varrho - 1\right) = \frac{(-1)^{\varrho-1}}{\varrho} \cdot \left(\frac{z}{t}\right)^\varrho + \frac{(-1)^\varrho}{\varrho+1} \cdot \left(\frac{z}{t}\right)^{\varrho+1} \cdot O(1)$$
für $t \geqq 2r$

folgt in Verbindung mit (5.1) [18])

$$\Re \left\{ t^\varrho \log E\left(-\frac{z}{t}, \varrho - 1\right) \right\} \Bigg|_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\varrho-1}}{\varrho} \cdot r^\varrho \cdot \cos \varrho\varphi + r^{\varrho-2} \cdot O(1) \,, & \nu = 1 \,, \\ r^{\varrho-\nu} \cdot O(1) \,, & \nu = 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{6.7}$$

und gemäß (2.5)

$$\operatorname*{Max}_{\substack{|z|=r \\ t=R_\nu,\, R_{\nu+1}}} \sigma(t) \cdot \left| \log E\left(-\frac{z}{t}, \varrho - 1\right) \right| < K' \frac{r^\varrho}{((\nu+1)\log r)^{2+\varepsilon}} \,, \tag{6.8}$$
$$\nu = 1, 2, 3, \ldots \,.$$

[18]) Es ist zu beachten, daß die linken Seiten von (6.7) und (6.8) mit t gegen null streben.

Ferner gilt

$$\int_{R_\nu}^{R_{\nu+1}} \frac{r^\varrho \cdot \sigma(t) \cdot dt}{t^\varrho (t+r)} \leqslant K' r^\varrho (\nu+1)^{-2-\varepsilon} \cdot (\log r)^{-1-\varepsilon}, \ \nu = 1, 2, 3, \ldots \,. \tag{6.9}$$

Setzen wir nun

$$H_\nu(re^{i\varphi}) = \begin{cases} (-1)^{\varrho-1} \cdot r^\varrho \left\{ \left(2 \log r + \frac{1}{\varrho}\right) \cos \varrho\varphi + \varphi \sin \varrho\varphi \right\}, & \nu = 1\,, \\ (-1)^{\varrho-1} \cdot r^\varrho \log r \cdot \cos \varrho\varphi\,, & \nu = 2, 3, \ldots \,. \end{cases} \tag{6.10}$$

so folgt aus (6.10), (6.7), (6.6), (6.3) und (6.9), (6.8), (6.4)

$$|J_\nu(z) - H_\nu(z)| < K_1 \cdot r^{\varrho-\nu}\,, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und

$$j_\nu(r) \leqslant 2K' r^\varrho (\log r)^{-1-\varepsilon} \cdot (\nu+1)^{-2-\varepsilon}\,, \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots .$$

Und endlich, wegen $r^\nu > (\nu+1)^{2+\varepsilon} \cdot (\log r)^{1+\varepsilon}$ für $r > e^{10}$, $0 < \varepsilon < 1$, in Verbindung mit (6.5)

$$|\,\Re B_\nu(z) - d H_\nu(z)\,| < \frac{K''}{\eta} r^\varrho (\log r)^{-1-\varepsilon} \cdot (\nu+1)^{-2-\varepsilon}\,, \ \nu = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.11}$$

für $|z| > e^{10}$ und $|\arg z| \leqslant \pi - \eta$.

7. Kehren wir nun zur Situation der Nr. 5 zurück. Gemäß (6.11) gilt[19])

$$|\,\Re B_\nu^{(j)}(re^{i\varphi}) - d_j H_\nu(re^{i(|\varphi-\varphi_j|-\pi)})\,| < \frac{K''}{\eta} r^\varrho (\log r)^{-1-\varepsilon} \cdot (\nu+1)^{-2-\varepsilon}, \quad j = 1, 2, \ldots, k_\nu\,, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und daher

$$\left| \sum_{j=1}^{k_\nu} \Re B_\nu^{(j)}(re^{i\varphi}) - \sum_{j=1}^{k_\nu} d_j H_\nu(re^{i(|\varphi-\varphi_j|-\pi)}) \right| < \frac{K''}{\eta} k_\nu r^\varrho (\log r)^{-1-\varepsilon} \cdot (\nu+1)^{-2-\varepsilon}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \,. \tag{7.1}$$

Zufolge (6.10) und (4.4) ist aber

$$\sum_{j=1}^{k_\nu} d_j \cdot H_\nu(re^{i(|\varphi-\varphi_j|-\pi)}) = \begin{cases} -r^\varrho \sum_{j=1}^{k_1} d_j' \,|\varphi - \varphi_j'| \cdot \sin \varrho\,|\varphi - \varphi_j'|\,, & \nu = 1\,, \\ 0\,, & \nu = 2, 3, \ldots \ ^{20)}\,. \end{cases} \tag{7.2}$$

---

[19]) Die Winkel φ und φ_j sind jedenfalls so zu messen, daß $0 \lesssim |\varphi - \varphi_j| \lesssim 2\pi$ ist.

[20]) Die Richtungen φ_j und die zugehörigen d_j sind von ν abhängig. Zu jedem Wert von ν gehört eine besondere Einteilung. Mit $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_{k_1}'$ $(d_1', d_2', \ldots, d_{k_1}')$ bezeichnen wir jetzt die speziell zu $\nu = 1$ gehörige Einteilung. Diese hängt natürlich wieder von r ab.

Sei nun $N_r(\theta) = d'_1 + d'_2 + \cdots + d'_j$ für $\varphi'_j < \theta \leqq \varphi'_{j+1}$, sodaß

$$d N_r(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{für } \theta \neq \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_{k_1}, \\ d'_j & \text{für } \theta = \varphi'_j \ . \end{cases}$$

Setzen wir das Differential $dN_r(\varphi)$ periodisch über das Intervall $(0, 2\pi)$ hinaus fort und beachten wir, daß $dN_r(\varphi + \theta) = d'_j$ für $\theta \equiv \varphi'_j - \varphi \pmod{2\pi}$, sonst aber Null ist, so wird nach (7.2)

$$\sum_{j=1}^{k_1} d'_j H_1(re^{i(|\varphi-\varphi'_j|-\pi)}) = -r^\varrho \int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN_r(\varphi+\theta) \ . \qquad (7.3)$$

Aus (7.3), (7.2), (7.1) und (5.7) folgt aber

$$|\Re A_1(re^{i\varphi}) + r^\varrho \int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN_r(\varphi+\theta)| < \frac{K''}{\eta} r^\varrho \{\delta_1 \log r + k_1 (\log r)^{-1-\varepsilon} \cdot 2^{-2-\varepsilon}\}$$

$$|\Re A_\nu(re^{i\varphi})| < \frac{K''}{\eta} r^\varrho \{\delta_\nu \cdot \log r + k_\nu (\log r)^{-1-\varepsilon} \cdot (\nu+1)^{-2-\varepsilon}\}, \quad \nu = 2, 3, \ldots$$

und daraus nach (5.3)

$$\begin{aligned} &|\log|\pi(re^{i\varphi})| + r^\varrho \int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN_r(\varphi+\theta)| \\ &\quad < \frac{K''}{\eta} r^\varrho \{\log r \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu + (\log r)^{-1-\varepsilon} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} k_\nu (\nu+1)^{-2-\varepsilon}\} \ . \end{aligned} \qquad (7.4)$$

Nun wählen wir

$$\delta_\nu \leqq 2\pi (\log r)^{-1-\varepsilon/2} \cdot (\nu+1)^{-1-\varepsilon/2}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

und

$$k_\nu \geqq 2 (\log r)^{1+\varepsilon/2} \cdot (\nu+1)^{1+\varepsilon/2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots \ .$$

Daher wird die rechte Seite von (7.4) kleiner als $\frac{K'''}{\eta} r^\varrho (\log r)^{-\varepsilon/2}$. Die Treppenfunktion $N_r(\theta)$ strebt aber mit $r \to \infty$ gegen $N(\theta)$, da die Einteilung $\varphi + \eta = \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_{k_1+1} = \varphi + 2\pi - \eta$ bei $r \to \infty$ beliebig fein wird. Es gilt also

$$r^\varrho \int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN_r(\varphi+\theta) = r^\varrho \int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN(\varphi+\theta) + 0(r^\varrho) \text{ [21]}$$

und daher

$$|\log|\pi(re^{i\varphi})| + r^\varrho \int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN(\varphi+\theta)| = 0(r^\varrho) ,$$

womit Lemma 2 bewiesen ist.

---

[21]) Vgl. Anm. [11]).

8. Beweis von Lemma 4.

Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, $\varphi = 0$ vorauszusetzen. Es sei ferner $0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{6\varphi}$.

Die Menge V' setzt sich zusammen aus folgenden zwei Teilmengen:

V_1' besteht aus jenen Stellen in $\dfrac{\pi}{\varrho} \leqslant \arg z < \dfrac{\pi}{\varrho} + \varepsilon$, die durch Drehung an O erhalten werden aus den Stellen von V in $0 \leqslant \arg z < \varepsilon$.

V_2' besteht aus neuen Stellen auf den Strahlen $\arg z = \pm \dfrac{\pi}{4\varrho}$ von der Dichte d_+ bzw. d_-, so daß $|n_\pm(r) - d_\pm r^\varrho| < K \cdot \sigma(r)$, $r > 0$.

Es gilt also

$$dN'(\theta) = \begin{cases} d_+ & \text{für } \theta = \dfrac{\pi}{4\varrho} \\ d_- & \text{für } \theta = -\dfrac{\pi}{4\varrho} \\ dN\left(\theta - \dfrac{\pi}{\varrho}\right) & \text{für } \dfrac{\pi}{\varrho} \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{\varrho} + \varepsilon \\ 0 & \text{für alle andern } \theta\,. \end{cases}$$

Demnach sind die positiven Zahlen d_+ und d_- so bestimmbar, daß

$$\int_0^{2\pi} \cos \varrho\theta \cdot dN'(\theta) = -\int_0^{\varepsilon} \cos \varrho\theta \cdot dN(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}(d_+ + d_-) = 0)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \varrho\theta \cdot dN'(\theta) = -\int_0^{\varepsilon} \sin \varrho\theta \cdot dN(\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}(d_+ - d_-) = 0\,.$$

Es erfüllt also V' und damit auch die Vereinigungsmenge V^* die Forderungen von Lemma 4.

Die Menge V^* zerlegen wir folgendermaßen in zwei komplementäre Mengen V_1 und V_2: V_1 besteht aus V_1' und den Nullstellen aus V in $0 \leqslant \arg z < \varepsilon$. Es gilt also

$$dN_1(\theta) = \begin{cases} dN(\theta) & \text{für } 0 \leqslant \theta < \varepsilon \\ dN\left(\theta - \dfrac{\pi}{\varrho}\right) & \text{für } \dfrac{\pi}{\varrho} \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{\varrho} + \varepsilon \\ 0 & \text{für alle andern } \theta\,. \end{cases}$$

$N_1(\theta)$ erfüllt also (2.4), und daher auch $N_2(\theta)$, die Maßfunktion der Komplementärmenge V_2 von V_1. Beide genügen den Forderungen von Lemma 4.

9. Geometrische Deutung des Zusammenhanges zwischen $N(\varphi)$ und $h(\varphi)$.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $h(\varphi)$ und $N(\varphi)$, wie er durch Gleichung (2.9) festgelegt ist, gestattet eine einfache geometrische Interpretation[22]).

Als Strahltypus einer ganzen Funktion der Ordnung ϱ ist $h(\varphi)$ stetig und je von rechts und links differenzierbar. Diese Rechts- und Linksableitungen sind von beschränkter totaler Schwankung und genügen den Bedingungen $h'_+(\varphi - 0) = h'_-(\varphi - 0) = h'_-(\varphi)$ und $h'_+(\varphi + 0) = h'_-(\varphi + 0) = h'_+(\varphi)$. Die Funktion

$$h'(\varphi) = \frac{h'_+(\varphi) + h'_-(\varphi)}{2} \tag{9.1}$$

besitzt also nur abzählbar viele Unstetigkeiten und es gilt für alle φ

$$h'(\varphi) = \frac{h'(\varphi + 0) + h'(\varphi - 0)}{2} .$$

Die Hüllkurve $\mathfrak{H}$ der Geradenschar

$$x \cdot \cos \varrho\varphi + y \cdot \sin \varrho\varphi - h(\varphi) = 0 , \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi ,$$

ist konvex, in sich geschlossen und kann sich im Falle $\varrho > 1$ mehrmals überschneiden; $h(\varphi)$ heißt ihre Stützfunktion. Durch

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= h(\varphi) \cdot \cos \varrho\varphi - \frac{1}{\varrho} h'(\varphi) \cdot \sin \varrho\varphi \\ y(\varphi) &= h(\varphi) \cdot \sin \varrho\varphi + \frac{1}{\varrho} h'(\varphi) \cdot \cos \varrho\varphi \end{aligned} \tag{9.2}$$

wird jedem φ eindeutig ein Punkt $P(\varphi)$ der Hüllkurve $\mathfrak{H}$ zugeordnet. In Unstetigkeitsstellen von $h'(\varphi)$ ist $P(\varphi)$ Mittelpunkt der Strecke, die $P(\varphi - 0)$ mit $P(\varphi + 0)$ verbindet. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{C}(\varphi, \varphi_1)$ die Länge jenes Stückes der Hüllkurve, das zwischen den Punkten $P(\varphi_1)$ und $P(\varphi)$ gelegen ist, mit andern Worten, dem Intervall $\varphi_1 \leqslant \theta \leqslant \varphi$ entspricht. Die Gleichung $\mathfrak{C}(\varphi, \varphi_1) = \mathfrak{C}(\varphi) - \mathfrak{C}(\varphi_1)$ definiert dann — bis auf eine additive Konstante — eine Funktion $\mathfrak{C}(\varphi)$. Wir nennen sie die zur Hüllkurve $\mathfrak{H}$ gehörige B o g e n f u n k t i o n. Diese Bogenfunktion ist monoton wachsend und es gilt

$$\mathfrak{C}(\varphi) = \frac{\mathfrak{C}(\varphi + 0) + \mathfrak{C}(\varphi - 0)}{2} , \tag{9.3}$$

[22]) Für diese Nr. vgl. P. 2. Teil, S. 25—41.

$$\mathfrak{C}(\varphi + 2\pi) - \mathfrak{C}(\varphi) = \mathfrak{C}(2\pi) - \mathfrak{C}(0) \ , \tag{9.4}$$

$$d\mathfrak{C}(\varphi) = \varrho h(\varphi)\, d\varphi + \frac{1}{\varrho}\, d\, h'(\varphi) \ , \tag{9.5}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varrho\theta \cdot d\mathfrak{C}(\theta) = 0 \quad , \quad \int_0^{2\pi} \sin \varrho\theta \cdot d\mathfrak{C}(\theta) = 0 \ . \tag{9.6}$$

10. Wir suchen den Zusammenhang zwischen $N(\varphi)$ und $h(\varphi)$ und betrachten zu diesem Zwecke die Gleichung (2.9)

$$h(\varphi) = -\int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN(\varphi + \theta) \ . \tag{10.1}$$

Durch partielle Integration von (2.4) folgt zunächst

$$\begin{aligned}\int_\varphi^{\varphi+2\pi} N(t) \ \sin\ \varrho t \cdot dt &= -\frac{N(2\pi) - N(0)}{\varrho} \cdot \cos\ \varrho\varphi \ , \\ \int_\varphi^{\varphi+2\pi} N(t) \ \cos\ \varrho t \cdot dt &= \frac{N(2\pi) - N(0)}{\varrho} \cdot \sin\ \varrho\varphi \ .\end{aligned} \tag{10.2}$$

Mittels der Variablentransformation $t = \varphi + \theta$ unter Verwendung von (2.4) und nachheriger partieller Integration folgt aus (10.1)

$$h(\varphi) = -\int_\varphi^{\varphi+2\pi} t \sin \varrho(t - \varphi) \cdot d\, N(t) =$$

$$= -\, t \sin \varrho(t-\varphi) \cdot N(t) \Big|_\varphi^{\varphi+2\pi} + \int_\varphi^{\varphi+2\pi} N(t) \sin \varrho(t-\varphi) \cdot dt + \varrho \int_\varphi^{\varphi+2\pi} t \cos \varrho(t-\varphi) \cdot N(t)\, dt.$$

Das erste Glied verschwindet, das zweite Glied ist gemäß (10.2) gleich $-\dfrac{N(2\pi) - N(0)}{\varrho}$ und daher

$$h(\varphi) = -\frac{N(2\pi) - N(0)}{\varrho} + \varrho \int_\varphi^{\varphi+2\pi} t \cos \varrho(t - \varphi) \cdot N(t)\, dt \ . \tag{10.3}$$

Durch differenzieren nach φ folgt

$$\frac{1}{\varrho} h'(\varphi) = (\varphi + 2\pi)\,(N(2\pi) - N(0)) + 2\pi \cdot N(\varphi) + \varrho \int_\varphi^{\varphi+2\pi} t \sin \varrho(t-\varphi) \cdot N(t)\, dt \tag{10.4}$$

und hieraus

$$\frac{1}{\varrho} dh'(\varphi) = (N(2\pi) - N(0)) \cdot d\varphi + 2\pi \cdot dN(\varphi) - d\varphi \cdot \varrho^2 \int_\varphi^{\varphi+2\pi} t \cos \varrho(t-\varphi) \cdot N(t)\, dt. \tag{10.5}$$

Fügen wir noch bei, daß durch partielle Integration von (10.4) und nachfolgender Variablentransformation folgt[23])

$$\frac{1}{\varrho} h'(\varphi) = \int_0^{2\pi} \theta \cos \varrho\theta \cdot dN(\varphi+\theta) \; . \tag{10.6}$$

Die erhaltenen Ausdrücke (10.3) und (10.5) in (9.5) eingesetzt ergeben

$$2\pi \cdot dN(\varphi) = d\mathfrak{C}(\varphi) \; .$$

Es ist also $2\pi \cdot N(\varphi)$ die Bogenfunktion der von $h(\varphi)$ erzeugten konvexen Kurve.

Durch die Bogenfunktion $2\pi N(\varphi)$ ist aber die Kurve nur bis auf Translationen bestimmt[24]). Wodurch ist dann die Lage der Hüllkurve ausgezeichnet? Um dies zu sehen, belegen wir die Kurve mit Masse, deren Dichte proportional ist der Kurvenkrümmung an der betreffenden Stelle. Der Schwerpunkt dieses Massensystems heißt Krümmungsschwerpunkt der Kurve. Wir behaupten: Der Krümmungsschwerpunkt der Hüllkurve liegt im Ursprung.

Um dies zu zeigen, beachten wir, daß der Länge $d\mathfrak{C}(\varphi)$ die Masse $kd\varphi$ zukommt, d. h. ihre Dichte proportional der Krümmung ist. Das zum Kurvenpunkt $P(\varphi)$ gehörige Massenelement ist also gleich $kd\varphi$ und die Gesamtmasse gleich $k \cdot 2\pi$. Die Koordinaten des Schwerpunktes sind dann

$$x_s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\varphi)\, d\varphi \quad , \qquad y_s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(\varphi)\, d\varphi \; .$$

Gemäß (10.1), (10.6) und (9.2) ist nun

$$x(\varphi) = -\int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\,(\theta+\varphi) \cdot d\,N(\varphi+\theta) \; ,$$

$$y(\varphi) = \int_0^{2\pi} \theta \cos \varrho\,(\theta+\varphi) \cdot d\,N(\varphi+\theta) \; .$$

Durch partielle Integration unter Verwendung von (10.2) folgt

$$x(\varphi) = -\,2\pi \sin \varrho\varphi \cdot N(\varphi+2\pi) + \int_0^{2\pi} N(\varphi+\theta)\{\sin \varrho(\theta+\varphi) + \varrho\theta \cos \varrho(\varphi+\theta)\}\,d\theta$$

$$= -\,2\pi \sin \varrho\varphi \cdot N(\varphi+2\pi) - \frac{N(2\pi)-N(0)}{\varrho}\cos \varrho\varphi + \varrho\int_0^{2\pi} \theta \cos \varrho(\varphi+\theta) \cdot N(\varphi+\theta)\,d\theta .$$

---

[23]) Man beachte, daß wegen (10.2) $\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \cos \varrho\,(t-\varphi) \,.\, N(t)\,dt$ verschwindet.

[24]) Vgl. P, 2. Teil, Nr. 23, insbes. Satz 7.

$$x_s = \frac{N(2\pi) - N(0)}{\varrho} + \frac{\varrho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} N(\varphi + \theta) \cos \varrho (\varphi + \theta)\, d\varphi = 0 \;.$$

Entsprechend

$$y(\varphi) = 2\pi \cos \varrho\varphi \cdot N(\varphi + 2\pi) + \int_0^{2\pi} N(\varphi + \theta) \{\cos \varrho(\varphi + \theta) - \varrho\theta \sin \varrho(\theta + \varphi)\}\, d\theta$$

$$= 2\pi \cos \varrho\varphi \cdot N(\varphi + 2\pi) + \frac{N(2\pi) - N(0)}{\varrho} \sin \varrho\varphi - \varrho \int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho(\varphi + \theta)\, N(\varrho + \theta) d\theta \;.$$

$$y_s = \int_0^{2\pi} N(\varphi) \cos \varrho\varphi\, d\varphi - \frac{\varrho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} N(\varphi + \theta) \sin \varrho(\varphi + \theta) \cdot d\varphi = 0 \;.$$

Es ist also $x_s = y_s = 0$, womit alles bewiesen ist. Wir haben als Resultat:

Satz 2. *Die Funktion*

$$h(\varphi) = -\int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN(\varphi + \theta)$$

erzeugt als Stützfunktion eine geschlossene konvexe Kurve, deren Krümmungsschwerpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt und deren Bogenfunktion gleich $2\pi \cdot N(\varphi)$ ist [25].

Bemerkung: Es erfüllen also Strahltypus und Maßfunktion die Gleichung (2.3).

11. Die in den vorangehenden Nummern 9 und 10 durchgeführten Betrachtungen deuten auf folgende Verallgemeinerung hin.

Sei $\mathfrak{C}(\varphi)$ eine monoton wachsende Funktion, die den Bedingungen (9.3), (9.4) und (9.6) genügt, $f(\varphi)$ eine beliebige monoton wachsende Funktion derart, daß für alle φ

$$f(\varphi + 2\pi) - f(\varphi) \equiv 1$$

ist. Mit ähnlichen Methoden wie in den vorangehenden Nummern läßt sich beweisen:

Die Funktion

$$h(\varphi) = \int_{\varphi}^{\varphi + 2\pi} f(\theta) \sin \varrho(\theta - \varphi) \cdot d\mathfrak{C}(\theta)$$

erzeugt als Stützfunktion eine geschlossene konvexe Hüllkurve, deren Bogenfunktion gleich $\mathfrak{C}(\varphi)$ ist.

[25]) Mitz Satz 1 und Satz 2 begegnen wir einem Resultat über Exponentialsummen von *G. Pólya*, „Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzendenter Funktionen", Sitzungsberichte Bayerisch. Akad. d. Wiss., Math. phys. Kl., 1920, S. 285—290, insbes. S. 288.

Der Übergang von einer Funktion $f(\theta)$ zu einer neuen kann also höchstens eine Translation der konvexen Kurve bewirken. Irgend wie muß also die Funktion $f(\theta)$ charakteristisch sein für die Lage der Hüllkurve. Wir können dies folgendermaßen präzisieren: Denken wir uns die Kurve so mit Masse belegt, daß dem Kurvenstück zwischen $P(\varphi_1)$ und $P(\varphi_2)$ die Masse $f(\varphi_2) - f(\varphi_1)$ zukommt. Dann liegt der Schwerpunkt dieses Massensystems im Ursprung.

B. Interpolation ganzer Funktionen

12. In einer früheren Arbeit[26]) und im vorangehenden Abschnitt wurden hinreichende Bedingungen für reguläres asymptotisches Verhalten (vgl. Nr. 2) hergeleitet und zwar einerseits für ganze Funktionen von beliebigem Wachstum einer nichtganzzahligen Ordnung[27]) und anderseits für ganze Funktionen vom Mitteltypus einer ganzen Ordnung (Satz 1). Diese Funktion und ihre Nullstellenverteilungen bilden die Grundlage für die nachfolgenden Untersuchungen. Sie sind hier durch ihr radiales Verhalten charakterisiert worden. Zur Integralabschätzung ist aber die Kenntnis ihres „zirkulären„ Verhaltens notwendig. Um den Übergang herstellen zu können benötigen wir folgendes, leicht verallgemeinertes Lemma von *Bernstein-Cartwright*[28])

Lemma 5. *Sei $F(z)$ in $|z| \leqq R$ regulär,*

$$\log |F(z)| \leqq A \qquad \textit{für} \quad |z| \leqq R$$

und bei gegebenem $k < 1$

$$\log |F(z_0)| \geqq -A \qquad \textit{für ein } z_0 \textit{ in } |z| \leqq kR\ .$$

Dann gibt es zu jedem $\zeta > 0$ ein nur von k und ζ abhängiges $K = K(k, \zeta)$, so daß

$$\log | F(z)| \geqq -AK$$

für $|z| \leqq kR$, ausgenommen in Kreislein, deren Radiensumme $< \zeta R$.

Ferner erinnern wir daran, daß zu jeder präzisen Wachstumsordnung $\varrho(r)$ eine Funktion $V(z)$ existiert, die auf der positiven reellen Achse reellwertig, monoton wachsend und von dort ausgehend im Winkelraum

[26]) P, 1. Teil.

[27]) Vgl. P, 1. Teil, Satz 3.

[28]) Vgl. P, 1. Teil, Hilfssatz 2.

$|\arg z| < \frac{\pi}{\varrho}$ der *Riemann*schen Fläche von $\log z$ eindeutig und analytisch ist. Sie genügt den Bedingungen

$$V(r) \sim r^{\varrho(r)}$$

und

$$V(zr) \sim z^{\varrho} \cdot V(r) \tag{12.1}$$

für jedes feste z in $|\arg z| < \frac{\pi}{\varrho}$; letzteres gilt gleichmäßig in jedem Winkelraum $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{\varrho} - \eta$, $\eta > 0$ [29]). Wir benützen sie deshalb als Vergleichsfunktion der ganzen Funktionen von präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$.

13. Wir beweisen nun

Lemma 6. *Die ganze Funktion $G(z)$ mit der Vergleichsfunktion $V(r)$ und dem Strahltypus $h(\varphi)$ sei von regulärem asymptotischen Verhalten. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ und $\gamma > 0$ im Kreisring $r(1-\gamma) < |z| < r(1+\gamma)$ eine geschlossene Kurve C ($\varrho = \varrho(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) von der Länge $< 8\pi r$ so daß darauf*

$$|\log|G(\varrho(\theta)e^{i\theta})| - h(\theta)V(r)| < \varepsilon V(r) \tag{13.1}$$

ist für alle genügend großen r.

Beweis. I. Zunächst betrachten wir die Funktion $G(z)$ in der Umgebung der Richtung $\arg z = \Phi$. Sei δ eine kleine positive Zahl und

$$\eta(\delta) = Max|h(\varphi) - h(\Phi)\cos\varrho(\Phi - \varphi)| \text{ für } \Phi - 3\delta \leqslant \varphi \leqslant \Phi + 3\delta. \tag{13.2}$$

Wir setzen

$$F(z) = G(z) \cdot e^{-h(\Phi)\cdot V(ze^{-i\Phi})} . \tag{13.3}$$

Dann ist wegen (13.2)

$$\log|F(z)| \leqslant 2\eta \cdot V(R) \quad \text{für alle } z \text{ in } |z - Re^{i\Phi}| \leqslant R\sin 3\delta \tag{13.4}$$

und wegen des regulären asymptotischen Verhaltens von $G(z)$ (2.2)

$$\log|F(z_0)| \geqslant -2\eta \cdot V(R) \text{ für ein } z_0 \text{ in } |z - Re^{i\Phi}| < R\sin\delta ,$$

sofern R genügend groß ist. Daraus folgt aber durch Anwendung von Lemma 5 mit $k = \frac{2}{3}$ und $\zeta = \frac{1}{12}$

[29]) Vgl. *V. Bernstein*, „Sulla crescenza delle trascendenti intere d'ordine finito", R. Acc. d'Italia, 4 (1933), 346—48.

$$\log |F(z)| \geqslant -2\eta \cdot K\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{12}\right) \cdot V(R) \qquad (13.5)$$

überall in $|z - Re^{i\Phi}| \leqslant \frac{2}{3} R \sin 3\delta$ ausgenommen in Kreislein, deren Radiensumme $< \frac{1}{12} R \sin 3\delta$ ist.

Nun ist $h(\varphi)$ stetig, es strebt η mit δ gegen null. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta(\varepsilon)$, so daß $Max\,(2\eta K, 2\eta) < \varepsilon|2$ wird für $|\varphi - \Phi| < 3\delta$. Aus (13.3), (13.4) und (13.5) folgt dann wegen $-\eta \leqslant h(\varphi) - h(\Phi) \cos\varrho(\varphi - \Phi) \leqslant \eta$

$$|\log|G(z)| - h(\varphi) \cdot V(R)| < \varepsilon V(R) \;, \qquad z = re^{i\varphi} \;, \qquad (13.6)$$

überall in $|z - Re^{i\Phi}| \leqslant \frac{2}{3} R \sin 3\delta$, ausgenommen in Kreislein, deren Radiensumme $< \frac{1}{12} R \sin 3\delta$ ist.

II. Sei $\varepsilon > 0$ eine beliebig klein vorgegebene Zahl. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $h(\varphi)$ läßt sich $\delta = \frac{2\pi}{N}$ (bei ganzem N) so wählen, daß

$$|h(\varphi') - h(\varphi'') \cos\varrho(\varphi' - \varphi'')| \leqslant \mathrm{Max}\left(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4K}\right) \text{ für } |\varphi' - \varphi''| \leqslant 3\delta$$

ist. Hiernach teilen wir durch die Strahlen $\arg z = n\delta = \Phi_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, die z-Ebene in N gleiche Winkelräume von der Öffnung δ ein. Das Resultat (13.6) in I wenden wir an auf jeden Strahl $\arg z = \Phi_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$. Es gilt dann (13.6) für genügend große R in jedem Kreis $|z - Re^{i\Phi_n}| \leqslant \frac{2}{3} R \sin 3\delta$, $n = 0, 1, \ldots, N$, ausgenommen in Kreislein, deren Radiensumme $< \frac{1}{12} R \sin 3\delta$ ist. Diese Kreise überdecken den Kreisring $R(1 - \sin\delta) \leqslant |z| \leqslant R(1 + \sin\delta)$. Da in jedem Sektorstumpf

$$R(1 - \sin\delta) \leqslant |z| \leqslant R(1 + \sin\delta)\,, \quad \Phi_n - \delta \leqslant \arg z \leqslant \Phi_n + \delta,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

die Radiensumme der Ausnahmekreislein nicht die Hälfte seiner Dimensionen beträgt, enthält jeder solche Sektorstumpf je einen Kreisbogen und eine radial gerichtete Strecke, die gegenüberliegende Ränder des Stumpfes verbinden und keine Ausnahmekreislein treffen. Diese Bogen und Strecken enthalten als Teilmenge eine geschlossene Kurve um den

Nullpunkt von der Länge $< 8\pi R$. Längs dieser Kurve gilt (13.6) und damit ist Lemma 6 bewiesen.

Aus dem Beweis ergibt sich zugleich folgende etwas allgemeinere Fassung von Lemma 6:

Zusatz zu Lemma 6: *Sei die Funktion $G(z)$ im Winkelraum $\alpha \leqq |\arg z| \leqq \beta$ regulär, von präziser Wachstumsordnung $\varrho(r)$ und von regulärem asymptotischen Verhalten.*

I. *Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\gamma > 0$ existiert im Sektorring*

$$r(1-\gamma) \leqq |z| \leqq r(1+\gamma), \qquad \alpha < \alpha' \leqq |\arg z| \leqq \beta' < \beta$$

eine Kurve $C(\varrho = \varrho(\theta)$, $\alpha' \leqq \theta \leqq \beta'$ von der Länge $< 4(\beta' - \alpha')r$, so daß darauf

$$|\log|G(\varrho(\theta)e^{i\theta})| - h(\theta)V(r)| < \varepsilon V(r) \quad , \quad \alpha' \leqq \theta \leqq \beta' \, ,$$

ist für alle genügend großen r.

II. *Für jedes $\varepsilon > 0$ und $\xi > 0$ gilt bei genügend großem r*

$$|\log|G(re^{i\theta})| - h(\theta)V(r)| < \varepsilon V(r)$$

im ganzen Intervall $\alpha' \leqq \theta \leqq \beta'$, ausgenommen höchstens eine Menge vom Maß $< \xi$.

Von II gilt die Umkehrung [30]).

14. Mit Lemma 6 sind wir nun in der Lage, folgendes „vorläufiges" Resultat über Interpolation zu beweisen.

Satz 3. *Die ganze Funktion $\pi(z)$ mit der Vergleichsfunktion $V(r)$ und dem Strahltypus $H(\varphi)$ sei von regulärem asymptotischen Verhalten; ihre Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ seien alle einfach. Sei ferner $G(z)$ eine beliebige ganze Funktion mit dem Strahltypus $h(\varphi) < H(\varphi)$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, bezüglich $V(r)$. Dann existiert eine Folge von Bereichen B_n, die mit $n \to \infty$ allseitig gegen unendlich streben, so daß*

$$\frac{G(z)}{\pi(z)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{a_\nu \subset B_n} \frac{G(a_\nu)}{\pi'(a_\nu)\,(z - a_\nu)} \, , \quad z \neq a_\nu \, .$$

Beweis: Wir wählen γ so klein, daß bei genügend großem r $h(\varphi) \cdot V(r + \gamma r) < (H(\varphi) - \varepsilon) \cdot V(r)$ wird für ein $\varepsilon > 0$ und alle φ, ferner eine monoton wachsende Folge $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots, r_n \to \infty$. Gemäß Lemma 6

[30]) Vgl. P, 2. Teil, Hilfssatz 8.

existiert in jedem Kreisring $r_n(1-\gamma) < |z| < r_n(1+\gamma)$ eine geschlossene Kurve C_n (um den Nullpunkt) von der Länge $< 8\pi r_n$, auf der (13.1) erfüllt ist. Den von C_n eingeschlossenen Bereich bezeichnen wir mit B_n. Es ist klar, daß $\pi(z)$ auf C_n keine Nullstellen besitzt. Aus dem Residuensatz, angewandt auf B_n, folgt nun

$$\frac{G(z)}{\pi(z)} = \sum_{a_\nu \subset B_n} \frac{G(a_\nu)}{\pi'(a_\nu)\,(z-a_\nu)} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{G(\zeta)\,d\zeta}{\pi(\zeta)\,(z-\zeta)} .$$

Zufolge von Lemma 6 und den Voraussetzungen des Satzes strebt das Integral für ein festes z und $n \to \infty$ gegen null, woraus sich die Behauptung des Satzes ergibt.

15. Die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \dfrac{G(a_\nu)}{\pi'(a_\nu)\,(z-a_\nu)}$ braucht selbst nicht zu konvergieren. Erst geeignete Abschnitte zusammengefaßt geben Glieder einer konvergenten Reihe. Damit obige Reihe selbst konvergiert, sind überdies noch gewisse Forderungen an $\pi'(a_\nu)$ zu stellen. Schon die Einfachheit der Nullstellen, $\pi'(a_\nu) \neq 0$, ist eine solche Forderung. Es darf aber $\pi'(a_\nu)$ für $\nu \to \infty$ nicht zu klein werden oder die Nullstellen dürfen nicht in zu dichten Gruppen vorkommen. Wir wollen genau die Bedingungen festlegen, wann eine Nullstellenverteilung ohne Verdichtungen sei.

Definition. *Eine Nullstellenverteilung heißt unverdichtet, wenn eine feste positive Zahl σ und eine positive Funktion $\eta(r)$ mit $\lim\limits_{r\to\infty} \eta(r) = 0$ existiert, derart, daß das geometrische Mittel der Abstände irgend einer Nullstelle a_n von seinen benachbarten a_ν innerhalb der Kreise $|z-a_n| \leqq \varrho$, $|a_n| > \varrho > \eta(|a_n|)\cdot|a_n|$ nicht kleiner wird als $\sigma\varrho$.*

Bezeichnet also N die Zahl der Nullstellen in $0 < |z-a_n| \leqq \varrho$, $|a_n| > \varrho > \eta(|a_n|)\cdot|a_n|$, so gilt

$$\prod_{|\alpha_\nu - a_n| \leqq \varrho} |a_\nu - a_n| \geqq (\sigma\varrho)^N . \tag{15.1}$$

Diese Forderung erstreckt sich demnach nicht nur auf Kreise von Radien $> 0(|a_n|)$; eine gewisse Unordnung „im kleinen" ist noch gestattet.

16. Es folgen zwei Beispiele unverdichteter Nullstellenverteilungen:

1. Beispiel. Es sollen die Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ohne endlichen Häufungspunkt, nach wachsenden Beträgen geordnet, folgende Voraussetzungen erfüllen:

1. Die Nullstellen besitzen eine positive Minimaldistanz, d. h. es existiert eine feste positive Zahl d, so daß für irgend zwei Nullstellen $|a_m - a_n| > d$ ist.
2. Es existiert eine positive Zahl c' und eine positive Funktion $\eta(r)$ mit $\lim\limits_{r\to\infty} \eta(r) = 0$ derart, daß die Anzahl N' der Nullstellen in den Kreisen $|z - z_0| \leqq \varrho$, $\varrho > |z_0| \cdot \eta(|z_0|)$ der Ungleichung $N' > c'\varrho^2$ genügt.

Diese Nullstellenverteilung besitzt keine Verdichtungen [31]).

Beweis: Offensichtlich genügt es, die Behauptung für genügend weit entfernte Stellen, also für genügend große n zu beweisen. Wir wählen eine Stelle a_n und einen Kreis $|z - a_n| \leqq \varrho$ mit $\varrho > \bar{\eta}(|a_n|) \cdot |a_n|$, wo $\bar{\eta}(r) \geqq \eta(r)$ und $\bar{\eta}(r) \cdot r \to \infty$ bei $r \to \infty$. Es wird dann mit n auch ϱ und N' beliebig groß. Zählen wir im Kreis nur die Nullstellen außerhalb des Mittelpunktes, so gilt für ihre Anzahl N offenbar auch

$$N > c\varrho^2 \quad , \qquad c > c' \ . \tag{16.1}$$

Diese Nullstellen wollen wir so dicht um den Mittelpunkt lagern, als dies nach Voraussetzung 1 zulässig ist. Umgeben wir die Stellen etwa mit kleinen Kreislein vom Radius $\delta = \frac{d}{2}$, so dürfen diese Kreislein einander nicht überdecken. Zur bequemen Abschätzung betrachten wir eine noch dichtere Lagerung, indem wir einzelne Kreislein einander überdecken lassen: Um den Mittelpunkt a_n wählen wir 4 Stellen a_ν auf $|z - a_n| = \delta$, 8 Stellen auf $|z - a_n| = 2\delta, \ldots, 4\nu$ Stellen auf $|z - a_n| = \nu\delta$ und den Rest auf dem letzten Kreis $|z - a_\mu| = \mu\delta$. Somit gilt

$$2\mu(\mu - 1) < N < 2\mu(\mu + 1) \ . \tag{16.2}$$

Diese Lagerung ist dichter als alle zulässigen; denn die Fläche aller Kreislein ist größer als die Kreisfläche vom Radius $(\mu + 1)\delta$, sobald $\mu \geqq 5$, was für hinreichend weit entfernte Stellen a_n sicher zutrifft. Es ist also

$$\log \prod_{|a_\nu - a_n| \leqq \varrho} |a_\nu - a_n| > 4\,(\log\delta + 2\log 2\delta + \cdots + (\mu - 1)\log(\mu - 1)\delta)$$

$$> 4\int_0^{\mu-1} x \log x\delta \cdot dx = 2\,(\mu - 1)^2 \cdot \log(\mu - 1)\,\delta - (\mu - 1)^2$$

$$= 2\mu(\mu + 1)\,\log\sqrt{2\mu(\mu + 1)} + O(\mu^2) \geqq N \cdot \log\sqrt{N} + O(N) \ .$$

---

[31]) Den Voraussetzungen des Beispieles genügen offenbar die Gitterpunkte $m + in$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Wegen (16.1) wird dann

$$\prod_{|a_\nu - a_n| \lesssim \varrho} |a_\nu - a_n| > (\sqrt{c} \cdot \varrho)^N \cdot e^{O(N)} > (\sigma\varrho)^N, \quad \sigma < \sqrt{c},$$

für n genügend groß.

2. Beispiel: Es sollen die Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ auf der positiven reellen Achse gelegen, nach wachsenden Beträgen geordnet und ohne endlichen Häufungspunkt, den folgenden Voraussetzungen genügen:

1. Die Nullstellen besitzen wie im ersten Beispiel eine positive Minimaldistanz.
2. Analog zum ersten Beispiel genügt die Anzahl N' der Nullstellen in den Intervallen $|x - x_0| \leqq \varrho$, $x_0 > \varrho > x_0 \cdot \eta(x_0)$ auf der positiven reellen Achse der Ungleichung $N' > c'\varrho$.

Diese Nullstellenverteilung besitzt keine Verdichtungen [32].

Der Beweis verläuft im wesentlichen gleich wie im ersten Beispiel.

17. Wir beweisen nun

Lemma 7. *Ist die ganze Funktion $\pi(z)$ mit der Vergleichsfunktion $V(r)$ und dem Strahltypus $H(\varphi)$ von regulärem asymptotischen Verhalten, besitzt überdies ihre Nullstellenverteilung keine Verdichtungen* [33]*, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und genügend großes n*

$$|\pi'(a_n)| > e^{(H(\varphi_n) - \varepsilon)\, V(r_n)}, \tag{17.1}$$

wenn $a_n = r_n e^{i\varphi_n}$ die nach wachsenden Beträgen geordneten Nullstellen bezeichnet.

Beweis: Er stützt sich auf folgende allgemeine Tatsache:

A. Ist m das Minimum der Funktion $\pi(z)$ auf der Kreislinie $|z - a_n| = \varrho$ und erfüllen ihre Nullstellen in diesem Kreis die Bedingung (15.1), so gilt

$$\frac{1}{\pi'(a_n)} < \frac{1}{m} \cdot \varrho \cdot \left(\frac{2}{\sigma}\right)^N. \tag{17.2}$$

Zum Beweis betrachten wir den Quotienten

$$Q(z) = \frac{(z - a_n) \cdot \prod_{|a_\nu - a_n| \lesssim \varrho} (z - a_\nu)}{\pi(z)},$$

[32] Über den damit zusammenhängenden Begriff des Kondensationsindex einer Folge vgl. *V. Bernstein*, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933, Note I, p. 251—293.

[33] Um so mehr sind die Nullstellen einfach.

der in $|z - a_n| \leqq \varrho$ regulär ist. Sein Betrag ist auf dem Rande kleiner als $(2\varrho)^N \cdot \frac{\varrho}{m}$, also auch im Innern. Für $z = a_n$ folgt dann

$$|Q(a_n)| = \frac{\Pi |a_n - a_\nu|}{|\pi'(a_n)|} \leqq (2\varrho)^N \cdot \frac{\varrho}{m}$$

und daraus in Verbindung mit (15.1) die Behauptung.

Zum Beweis des Satzes verbleibt also noch eine zusammengehörige Abschätzung der drei Größen ϱ, N und m.

Zunächst gilt:

B. Zu jeder positiven Funktion $\eta(r)$ mit $\lim\limits_{r\to\infty} \eta(r) = 0$ existiert eine zweite Funktion $\bar{\eta}(r) \geqq \eta(r)$, die bei $r\to\infty$ ebenfalls gegen null strebt, derart, daß für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes hinreichend große n auf einer Kreislinie $|z - a_n| = \varrho_n$ mit $\bar{\eta}(r_n) \cdot r_n < \varrho_n < 2\bar{\eta}(r_n) \cdot r_n$ und $a_n = r_n e^{i\varphi_n}$

$$\log |\Pi(a_n + \varrho_n e^{i\theta})| - h(\varphi_n)\,(V(r_n) > \varepsilon V(r_n)\,, \quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\,, \tag{17.3}$$

gilt.

Dies ist bereits im ersten Teil des Beweises von Lemma 6 mitenthalten.

Schließlich benützen wir die folgende Tatsache:

C. Ist $\pi(z)$ eine ganze Funktion von regulärem asymptotischen Verhalten, mit der Vergleichsfunktion $V(r)$, strebt die positive Funktion $\eta(r)$ bei $r\to\infty$ gegen null und bezeichnet N die Anzahl der Nullstellen im Kreis $|z - z_0| \leqq \eta(|z_0|) \cdot |z_0|$, so gilt

$$\lim_{z_0 \to \infty} \frac{N}{V(|z_0|)} = 0\ . \tag{17.4}$$

Wegen des regulären asymptotischen Verhaltens nämlich ist die Nullstellenverteilung meßbar[34]), d. h. es gibt um jede Richtung $\arg z_0 = \varphi_0$ beliebig kleine Winkelräume $\varphi_0 - \eta_0 \leqq \arg z \leqq \varphi_0 + \eta_0$, für die

$$n(r\,; \varphi_0 - \eta_0, \varphi_0 + \eta_0) = (N(\varphi_0 + \eta_0) - N(\varphi_0 - \eta_0) + \varepsilon(r)) \cdot V(r)\,,$$

$\varepsilon(r)\to 0$ bei $r\to\infty$; $n(r\,; \varphi', \varphi'')$ bezeichnet die Anzahl der Nullstellen im Sektor $|z| \leqq r$, $\varphi' \leqq \arg z < \varphi''$. Bei kleinem aber festem η_0 und genügend großem $|z_0| = R$ ist der Kreis $|z - z_0| \leqq \eta(R) \cdot R$ in $R(1 - \eta(R)) \leqq |z| \leqq R(1 + \eta(R))$, $\varphi_0 - \eta_0 \leqq \arg z \leqq \varphi_0 + \eta_0$ enthalten und daher gilt gemäß den Eigenschaften von $V(r)$ (vgl. 12.1)

[34]) Vgl. Nr. 2.

$$
\begin{aligned}
N &< n(R+R\cdot\eta(R);\varphi_0-\eta_0,\varphi_0+\eta_0)-n(R-R\cdot\eta(R);\varphi_0-\eta_0,\varphi_0+\eta_0)\\
&=\{N(\varphi_0+\eta_0)-N(\varphi_0-\eta_0)+\varepsilon(R+R\cdot\eta(R))\}\,V(R+R\cdot\eta(R))\\
&\qquad-\{N(\varphi_0+\eta_0)-N(\varphi_0-\eta_0)+\varepsilon(R-R\cdot\eta(R))\}\cdot V(R-R\cdot\eta(R))\\
&=K\{V(R+R\eta(R))-V(R-R\eta(R))\}+\varepsilon'(R)\cdot V(R),\ \varepsilon'(R)\to 0\,,\\
&=K\cdot V(R)((1+\eta)^{\varrho}-(1-\eta)^{\varrho})+\varepsilon''(R)\cdot V(R)\quad,\qquad \varepsilon''(R)\to 0\,,\\
&=\varepsilon'''(R)\cdot V(R)\quad,\qquad \varepsilon'''(R)\to 0\ ;
\end{aligned}
$$

denn $\eta(r)$ strebt für $r\to\infty$ gegen null. Daraus folgt die Behauptung.

Beachten wir nun, daß die Nullstellenverteilung keine Verdichtungen besitzt, also in den Kreisen $|z-a_n|\leqslant\varrho$, $|a_n|>\varrho>\eta(|a_n|)\cdot|a_n|$ die Bedingung (15.1) erfüllt. Unter diesen Kreisen gibt es gemäß B solche, auf denen (17.3) und gemäß C, (17.4) erfüllt sind. Daraus folgt in Verbindung mit A (17.2) für jedes $\varepsilon>0$ und genügend große n

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\pi'(a_n)}\right| &< e^{-(H(\varphi_n)-\varepsilon)\cdot V(r_n)}\cdot\bar{\eta}(r_n)\cdot r_n\cdot\left(\frac{2}{\sigma}\right)^{\varepsilon V(r_n)}\\
&< e^{-\left(H(\varphi_n)-2\varepsilon-\frac{\log r_n}{V(r_n)}\right)\cdot V(r_n)}\,.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt aber (17.1), denn $\pi(z)$ ist eine ganze *transzendente* Funktion und deshalb strebt $\dfrac{\log r_n}{V(r_n)}$ für $n\to\infty$ gegen null.

18. Die in Lemma 7 betrachteten Funktionen und ihre Nullstellenverteilungen bilden die Grundlage für die nachfolgenden Untersuchungen.

Definition: *Eine ganze Funktion mit regulärem asymptotischen Verhalten und unverdichteter Nullstellenverteilung nennen wir* Grundfunktion.

Nach den Vorbereitungen der vorangehenden Nummern sind wir nun in der Lage, folgendes Hauptresultat über Interpolation zu beweisen:

Satz 4. *Sei $\pi(z)$ eine Grundfunktion mit der Vergleichsfunktion $V(r)$, dem Strahltypus $H(\varphi)$ und den nach wachsenden Beträgen geordneten Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$.*

Ist $G(z)$ eine beliebige ganze Funktion mit dem Strahltypus $h(\varphi)<H(\varphi)$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, bezüglich $V(r)$, so gilt

$$
G(z)=\pi(z)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{G(a_\nu)}{\pi'(a_\nu)\,(z-a_\nu)}\,. \tag{18.1}
$$

Die Reihe konvergiert außerhalb der Stellen a_ν absolut und in jedem dort abgeschlossenen und endlichen Bereich gleichmäßig.

Beweis: Wegen Satz 3 genügt es, die Konvergenz der Reihe zu beweisen. Im betrachteten Bereich ist $|z - a_\nu| \geqslant \eta > 0$. Wegen der Voraussetzungen des Satzes und Lemma 7 gilt für ein $\varepsilon > 0$ und genügend großes ν

$$\left| \frac{G(a_\nu)}{\pi'(a_\nu)} \right| < e^{-\varepsilon V(|a_\nu|)} < e^{-\varepsilon |a_\nu|^{\varrho/2}} \;, \; |a_\nu|^{2\varrho} > \nu \;,$$

und daher

$$\left| \frac{G(a_\nu)}{\pi'(a_\nu)} \right| < e^{-\varepsilon \nu^{1/4}} < \nu^{-2} \;.$$

Die Reihe besitzt also eine konvergente Majorante.

19. Die Grundfunktionen $\pi(z)$ sind im wesentlichen schon durch ihre Nullstellen, die interpolierenden Stellen a_ν bestimmt. Welchen Bedingungen die Nullstellenverteilung zu genügen hat, damit das zugehörige kanonische Produkt eine Grundfunktion sei, ist in Nr. 15 im Abschnitt A und einer frühern Arbeit[35]) untersucht worden. Die Resultate sind, zusammengefaßt, folgende:

1. Ist eine Nullstellenverteilung unverdichtet (Nr. 15) und bezüglich einer präzisen, nichtganzen Wachstumsordnung $\varrho(r)$ $(\varrho(r) \to \varrho \neq 0, 1, 2, \ldots)$ meßbar mit der Maßfunktion $N(\varphi)$ (Nr. 2), so ist das zugehörige kanonische Produkt $\pi(z)$ eine Grundfunktion von der präzisen Ordnung $\varrho(r)$ mit dem Strahltypus

$$H(\varphi) = \frac{\pi}{\sin \varrho\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varrho\theta - \varrho\pi) \cdot dN(\varphi + \theta) \text{ [36])} \;. \tag{19.1}$$

2. Ist eine Nullstellenverteilung unverdichtet (Nr. 15) und bezüglich einer ganzen Ordnung ϱ meßbar im engern Sinne (Nr. 2) mit der Maßfunktion $N(\varphi)$, die überdies der Gleichgewichtsforderung (2.4) genügt, so ist die ganze Funktion $\pi(z)$ in (3.3) eine Grundfunktion vom Mitteltypus der Ordnung ϱ und dem Strahltypus

$$H(\varphi) = -\int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN(\varphi + \theta) \text{ [37])} \tag{19.2}$$

[35]) Vgl. Anm. [26]).
[36]) Vgl. Anm. [27]).
[37]) Vgl. Satz 1.

Diese so charakterisierten Nullstellenfolgen wollen wir kurz **Grundfolgen** von präziser, nicht ganzer Ordnung $\varrho(r)$ bzw. vom Mitteltypus einer ganzen Ordnung ϱ nennen.

Hiernach gilt in Verbindung mit Satz 4

Satz 5. I. *Sei $G(z)$ eine ganze Funktion von beliebigem Wachstum einer nichtganzen Ordnung, $V(r)$ ihre Vergleichsfunktion und $h(\varphi)$ ihr Strahltypus. Sei ferner $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ eine Grundfolge mit der Maßfunktion $N(\varphi)$ bezüglich $V(r)$, derart daß*

$$h(\varphi) < \frac{\pi}{\sin \varrho\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varrho\theta - \varrho\pi) \cdot dN(\varphi + \theta) \quad \textit{für alle } \varphi \,. \tag{19.3}$$

Dann gilt (18.1), *wenn $\pi(z)$ das kanonische Produkt mit den $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ als einfachen Nullstellen bezeichnet.*

II. *Sei $G(z)$ eine ganze Funktion höchstens vom Mitteltypus der ganzen Ordnung ϱ und dem Strahltypus $h(\varphi) \cdot a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ sei eine Grundfolge mit der Maßfunktion $N(\varphi)$ bezüglich $V(r) = r^\varrho$, derart daß*

$$h(\varphi) < -\int_0^{2\pi} \theta \sin \varrho\theta \cdot dN(\varphi + \theta) \qquad \textit{für alle } \varphi \,. \tag{19.4}$$

Dann gilt (18.1), *wenn $\pi(z)$ die ganze Funktion in* (3.3) *mit den $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ als einfachen Nullstellen bezeichnet.*

III. *Bei asymptotisch gleichmäßiger Stellenverteilung, $dN(\varphi) = \frac{\varrho}{2\pi} K \cdot d\varphi$ ist die Bedingung* (19.3) *bzw.* (19.4) *erfüllt, wenn der Typus der ganzen Funktion, $k = Max\, h(\varphi)$, der Ungleichung $k < K$ genügt.*

Im allgemeinen Resultat ist der folgende, besonders einfache Spezialfall enthalten:

Satz 6. *Wir denken uns die Gitterpunkte $m + in$, $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ einzeln höchstens um die Strecke S verschoben, aber so, daß die neuen Stellen, nach wachsenden Beträgen geordnet und mit $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ bezeichnet, die Bedingung*

$$\liminf_{\mu \neq \nu} |a_\mu - a_\nu| > 0 \tag{19.5}$$

erfüllen.

Wenn das Wachstum der ganzen Funktion $G(z)$ den Typus $\pi/2$ der Ordnung 2 nicht erreicht, so gilt (18.1).

Beweis. Es ist zu zeigen, daß die $a_1, a_2, \ldots$ eine Grundfolge vom Mitteltypus der Ordnung 2 bilden, für deren Maßfunktion $dN(\varphi) = \frac{1}{2} d\varphi$ gilt.

$n_1(r; \varphi_1, \varphi_2)$ bezeichne die Anzahl der Gitterpunkte und $n(r; \varphi_1, \varphi_2)$ die Zahl der Stellen a_ν im Sektor $|z| \leqslant r$, $\varphi_1 \leqslant \arg z < \varphi_2$. Die Zahl der Gitterpunkte ist nahezu gleich dem Flächeninhalt des Sektors, der Fehler ist von der Größenordnung seines Umfangs. Es gilt also

$$n_1(r; \varphi_1, \varphi_2) = \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot r^2 + O(r^2) \ .$$

Die Anzahl der Stellen a_ν im genannten Sektor ist aber für große r vergleichbar mit der Zahl der Gitterpunkte. Der Fehler ist wiederum nur von der Größenordnung des Sektorumfanges; denn im Umkreis eines festen Radius S um einen Gitterpunkt befindet sich die ihm zugeordnete Stelle a_ν. Es ist also

$$n(r; \varphi_1, \varphi_2) = \tfrac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot r^2 + O(r^2) \tag{19.6}$$

und daher diese Stellenverteilung im engern Sinne meßbar[38]). Für ihre Maßfunktion gilt offenbar $dN(\varphi) = \frac{1}{2} d\varphi$. Wegen (19.6) und (19.5) sind überdies die Voraussetzungen des ersten Beispieles in Nr. 16 erfüllt. Es besitzt daher obige Verteilung keine Verdichtungen, womit alles bewiesen ist.

20. Die vorangehenden Methoden gestatten nicht nur eine gegebene ganze Funktion durch die Interpolationsformel darzustellen, sondern auch eine ganze Funktion mit vorgegebenen Werten in den a_ν zu konstruieren. Betrachten wir also das folgende Konstruktionsproblem[39]) etwas genauer: Gegeben sei in der komplexen Ebene eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ ohne endlichen Häufungspunkt und eine beliebige zweite Folge $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$. Gesucht ist eine ganze Funktion, die in den Stellen a_ν die Werte A_ν annimmt. Um nicht konvergenzerzeugende Faktoren verwenden zu müssen, m. a. W. um eine Darstellung von der Form (18.1) zu erhalten, wählen wir als erste Folge eine Grundfolge. Die zweite Folge jedoch darf nicht zu stark anwachsen. Unser Resultat lautet:

Satz 7. *Sei $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ eine Grundfolge mit der Maßfunktion $N(\varphi)$ bezüglich einer Vergleichsfunktion $V(r)$. Eine zweite Folge $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ erfülle für ein $\varepsilon > 0$ und genügend große ν die Bedingung*

---

[38]) Es ist (2.5) allerdings erst für genügend große t erfüllt. Aber die Abänderung von endlich vielen Nullstellen hat auf das Resultat von Satz 1 keinen Einfluß.

[39]) Vgl. Nr. 1.

$$\frac{\log |A_\nu|}{V(|a_\nu|)} < H(\varphi_\nu) - \varepsilon \ , \quad \arg a_\nu = \varphi_\nu \ ,$$

wobei $H(\varphi)$ *durch* (19.1) *bzw.* (19.2) *definiert ist. Dann stellt*

$$G(z) = \pi(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_\nu}{\pi'(a_\nu)\ (z - a_\nu)} \tag{20.1}$$

eine ganze Funktion dar mit dem Strahltypus $\leqq H(\varphi)$ *bezüglich* $V(r)$, *die in den Stellen* a_ν *die Werte* A_ν *annimmt.*

Beweis. Zufolge der Voraussetzungen des Satzes und von Lemma 7 konvergiert die Reihe in (20.1) außerhalb der Stellen a_ν absolut und in jedem dort abgeschlossenen und beschränkten Bereich gleichmäßig (vgl. Beweis von Satz 4). Es stellt also (20.1) eine ganze Funktion dar, die in den Stellen a_ν die Werte A_ν annimmt. Umgeben wir die Stellen a_ν mit den Kreislein $|z - a_\nu| \leqq \varrho_\nu$, $\varrho_\nu = e^{-\frac{\varepsilon}{3} V(|a_\nu|)}$, so wird das allgemeine Glied der obigen Reihe außerhalb dieser Kreislein absolut kleiner als $e^{-\frac{\varepsilon}{3} V(|a_\nu|)}$, letztere Glieder bilden aber eine konvergente Reihe. Außerhalb der Kreislein ist somit die Reihe in (20.1) gleichmäßig beschränkt. Die Radiensumme der Ausnahmekreislein, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_\nu$, ist aber auch beschränkt und daher fast überall $|G(z)| < C \cdot |\pi(z)|$. Daraus folgt, daß für $G(z)$ der Strahltypus $\leqq H(\varphi)$ ist.

21. Als Anwendung der vorangehenden Ergebnisse verallgemeinern wir den Satz A. Gemäß Satz 5 lautet unser Resultat:

Satz 8. *Sei* $V(r)$ *Vergleichsfunktion für eine ganze Ordnung vom Mitteltypus oder für eine beliebige nichtganze Ordnung und* $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ *eine Grundfolge für deren Maßfunktion bezüglich* $V(r)$ *gilt* $dN(\varphi) = \frac{\varrho}{2\pi} K \cdot d\varphi$, $K > 0$ [40]).

Genügt die ganze Funktion $G(z)$ *den Bedingungen*

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{V(r)} = k < K \ , \quad M(r) = \operatorname{Max} |G(re^{i\varphi})| \ , \tag{21.1}$$

und

$$|G(a_\nu)| \leqq \kappa \ , \qquad \nu = 1, 2, \ldots \ , \tag{21.2}$$

so ist $G(z)$ *notwendig eine Konstante.*

---

[40]) Selbstverständlich genügt auch die Voraussetzung, $H(\varphi) \geqq K$ für alle φ, wobei $H(\varphi)$ durch (19.1) bzw. (19.2) definiert ist.

Beweis: Wir setzen

$$G(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

und bemerken vorerst, daß der Typus k in (21.1) nur von den Beträgen der Entwicklungskoeffizienten abhängt. Mit

$$\lambda(r) = |c_0| + |c_1| \cdot r + \cdots + |c_n| \cdot r^n + \cdots$$

gilt dann auch

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log \lambda(r)}{V(r)} = k < K . \tag{21.3}$$

Da auch $z^n \cdot G(z)$ die Bedingung (21.1) und damit die Voraussetzungen von Satz 5 erfüllt, so gilt

$$z^n \cdot G(z) = \pi(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G(a_\nu) \cdot a_\nu^n}{\pi'(a_\nu)\ (z - a_\nu)} , \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Daraus folgt aber

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right) \cdot G(z) = \pi(z) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G(a_\nu) \cdot c_n a_\nu^n}{\pi'(a_\nu)\ (z - a_\nu)} = \pi(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G(a_\nu) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_\nu^n}{\pi'(a_\nu)\ (z - a_\nu)}$$

und daher

$$G^2_{(z)} = \pi(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G^2_{(a_\nu)}}{\pi'(a_\nu)\ (z - a_\nu)} . \tag{21.4}$$

Die Reihenfolge der Summation ist nämlich vertauschbar; denn wegen (21.2) und (21.3) ist obige Doppelreihe absolut konvergent.

Wenden wir dasselbe Verfahren auf (21.4) an, so folgt entsprechendes für $G^3_{(z)}$ usw., durch vollständige Induktion, immer unter Beachtung von (21.2) und (21.3)

$$\frac{G^p_{(z)}}{p!} = \pi(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\dfrac{G^p_{(a_\nu)}}{p!}}{\pi'(a_\nu)\ (z - a_\nu)} , \quad p = 0, 1, 2, \ldots .$$

Wieder folgt durch Umordnen

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{G^p_{(z)}}{p!} = \pi(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{G^p_{(a_\nu)}}{p!}}{\pi'(a_\nu)\ (z - a_\nu)}$$

oder

$$e^{G(z)} = \pi(z) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{G(a_\nu)}}{\pi'(a_\nu)\ (z - a_\nu)} . \tag{21.5}$$

Nun ist $|e^{G(a_\nu)}| < e^\kappa = C$. Daher ist nach Satz 7 die rechte Seite von (21.5) und somit auch $e^{G(z)}$ von der Ordnung $\leqq [\varrho]$. Es ist also $G(z)$ höchstens ein Polynom vom Grade $[\varrho]$; wegen (21.2) ist dann $G(z)$ notwendig eine Konstante [41]).

Gemäß Satz 6 ist in unserem allgemeinen Resultat folgende unmittelbare Erweiterung von Satz A enthalten:

Satz 9. *Die Folge $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ erfülle die Voraussetzungen von Satz 6 und die ganze Funktion $G(z)$ genüge den Bedingungen*

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{r^2} < \frac{\pi}{2},$$

und

$$|G(a_\nu)| < \kappa, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots .$$

Dann ist $G(z)$ notwendig eine Konstante.

Nachtrag nach der ersten Korrektur.

Im Falle des Mitteltypus einer nichtganzen Ordnung, auf den sich der wesentliche Teil seiner Arbeit (vergl. Anm. 10) bezieht, verlangt Herr *Lévine* neben der Meßbarkeit der Stellen a_ν, daß die Kreislein $|z - a_\nu| < d\,|a_\nu|^{1-\frac{1}{2}\varrho}$ einander nicht überdecken. Letztere Bedingung deckt sich nicht mit der Forderung (15.1). Wie man aber leicht sieht, gilt Lemma 7 auch dann, wenn man (15.1) durch

$$\prod_{|a_\nu - a_n| \lessgtr R} |a_\nu - a_n| \geqq R^N \cdot C^{V(R)}, \quad C = \text{konst.}, \tag{15.1 a}$$

ersetzt. Diese neue Fassung enthält die Forderung von *Lévine*. Allgemein, wenn die Kreislein $|z - a_\nu| < d\,|a_\nu|^{1-\frac{1}{2}\varrho(|a_\nu|)}$ einander nicht überdecken, so ist (15.1a) erfüllt. Dies folgt aus zwei Überlegungen: Bezeichnet einerseits $n_1(t)$ die Anzahl der Stellen a_ν mit $0 < |a_\nu - a_n| \leqq t$, so ist

$$n_1(t) < \frac{\pi t^2}{\pi d^2 (r-t)^{2-\varrho(r-t)}} < \frac{1}{d^2}\, t^{\varrho(r-t)};$$

anderseits gilt

$$\sum_{|a_\nu - a_n| \lessgtr R} \log |a_\nu - a_n| = \int_0^R \log t \cdot dn_1(t) = n_1(R) \log R - \int_0^R \frac{n_1(t)}{t}\, dt .$$

(Eingegangen den 6. Oktober 1941.)

41) Bezüglich der Beweismethode vgl. Anm. 5).