

# Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen.

Autor(en): **Eckmann, Beno**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **14 (1941-1942)**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-14306>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen

Von BENO ECKMANN, Zürich

1. Die Hurewicz'schen Homotopiegruppen<sup>1)</sup> haben sich als wichtige topologische Invarianten erwiesen; ihre Anwendung scheitert aber oft daran, daß man ihre Struktur nur in wenigen Fällen wirklich kennt, und daß überhaupt selbst für spezielle Räume kein allgemein gangbarer Weg zu ihrer Bestimmung bekannt ist. In dieser Arbeit geben wir Beiträge allgemeiner und spezieller Natur zur Kenntnis der *Homotopiegruppen von Gruppenräumen*. Wir formulieren zunächst nur die Ergebnisse: die *allgemeinen* (Nr. 2 und 3) gestatten unmittelbare Anwendungen auf Sphären (Nr. 4), die von den durch stetige Abbildungen bewirkten Homomorphismen der Homotopiegruppen handeln; die *speziellen* betreffen gewisse Homotopiegruppen der *orthogonalen Gruppen* (Nr. 5) und stehen mit dem übrigen nur in losem Zusammenhang.

2. a) Die allgemeinen Sätze formulieren wir nicht für Gruppenräume, sondern für deren *Verallgemeinerungen* im Sinne von Hopf [3], da dies für die Beweise genügt und für die Anwendungen erwünscht ist, und halten uns dabei immer an folgende Definition:  $R$  sei ein metrischer (zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer) Raum, in welchem eine stetige Multiplikation erklärt ist; das heißt: jedem geordneten Punktepaar  $(a, b)$  von  $R$  ist als Produkt ein Punkt  $a \cdot b$  von  $R$  zugeordnet, der stetig vom Paar  $(a, b)$  abhängt (die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes wird also nicht gefordert). Ein solcher Raum soll  $\Gamma$ -Raum heißen. Besitzt die Multiplikation eine Eins, d. h. gibt es in  $R$  einen Punkt  $e$ , derart, daß für alle  $a \in R$

$$e \cdot a = a \cdot e = a$$

ist, so bezeichnen wir  $R$  als  $\Gamma_e$ -Raum. Wir werden in diesem Fall gelegentlich auch annehmen, daß „das Inverse existiert“, d. h. daß es zu jedem Punkt  $a \in R$  einen Punkt  $a^{-1}$  mit

$$a \cdot a^{-1} = e$$

gibt, der von  $a$  stetig abhängt.

---

<sup>1)</sup> Definition s. [1], S. 114, ferner [2], S. 203. — Die Zahlen in eckiger Klammer [] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

Jeder Gruppenraum ist ein  $\Gamma_e$ -Raum mit Inversem; unsere Aussagen über  $\Gamma$ - und  $\Gamma_e$ -Räume gelten also insbesondere für Gruppenräume.

b)  $X$  sei ein Kompaktum,  $R^X$  der Raum der stetigen Abbildungen von  $X$  in  $R$ . Ist  $R$  ein  $\Gamma$ -Raum, so definieren wir für zwei Abbildungen  $f, g \in R^X$  ein *Produkt*

$$f \cdot g = h \in R^X$$

durch

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dadurch wird auch zwischen den Abbildungsklassen, d. h. den Klassen homotoper Abbildungen von  $X$  in  $R$  eine Multiplikation induziert: Bezeichnen wir die Klasse von  $f \in R^X$  mit  $\{f\}$ , so ist die Klasse  $\{f' \cdot g'\}$  von der Wahl von  $f' \in \{f\}$  und  $g' \in \{g\}$  unabhängig, also durch  $\{f\}$  und  $\{g\}$  bestimmt, und wir setzen

$$\{f\} \cdot \{g\} = \{f \cdot g\}.$$

Wir lassen gewöhnlich, wenn kein Mißverständnis möglich ist, die Klammer weg und schreiben auch für Abbildungsklassen nur  $f, g, f \cdot g$  usw.

$\pi_n(R)$  sei die  $n^{\text{te}}$  Homotopiegruppe von  $R$ , und für  $f, g \in \pi_n(R)$  bedeute  $f + g$  die nach der Hurewicz'schen Vorschrift<sup>1)</sup> auszuführende Addition der Homotopieklassen.

c) Wir werden zeigen, daß zwischen  $f + g$  und  $f \cdot g$  ( $f, g \in \pi_n(R)$ ) folgende Zusammenhänge bestehen:

*Satz I:*  $R$  sei ein  $\Gamma$ -Raum; für  $f_i, g_i \in \pi_n(R)$ ,  $i = 1, 2$  gilt bei beliebigem  $n$

$$(f_1 + f_2) \cdot (g_1 + g_2) = (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot g_2).$$

Daraus folgt leicht (vgl. Hurewicz [1], Satz XI):

*Satz II:*  $R$  sei ein  $\Gamma_e$ -Raum; für  $f, g \in \pi_n(R)$  gilt bei beliebigem  $n$

$$f \cdot g = f + g.$$

In einem  $\Gamma_e$ -Raum fällt also die Multiplikation  $f \cdot g$  der Homotopieklassen mit der Hurewicz'schen Addition zusammen und ist somit von selbst assoziativ (und für  $n \geq 2$  kommutativ).

3a) In einem  $\Gamma_e$ -Raum  $R$  definieren wir für  $a \in R$  die Potenz  $a^k \in R$  durch

$$a^0 = e, \quad a^k = a \cdot a^{k-1}$$

für alle ganzen Zahlen  $k \geq 0$ ; wenn sogar das Inverse existiert (vgl. 1 a), auch für negative  $k = -k'$ ,  $k' > 0$ , durch

$$a^k = a^{-k'} = (a^{-1})^{k'} .$$

Ist  $f \in R^X$  eine stetige Abbildung des Kompaktums  $X$  in  $R$ , so ist dann klar, was unter  $f^k$  zu verstehen ist:

$$f^k(x) = (f(x))^k, \quad x \in X .$$

Diejenige Abbildung (bzw. ihre Klasse), bei welcher alle Punkte von  $X$  in  $e \in R$  abgebildet werden, bezeichnen wir ebenfalls mit  $e$ , oder auch mit  $0$  (wegen der additiven Schreibweise, die bei den Homotopiegruppen üblich ist):  $f^0 = e$ .

b) Folgerungen aus Satz II:

*Satz III:*  $R$  sei ein  $\Gamma_e$ -Raum; für  $f \in \pi_n(R)$  gilt bei beliebigem  $n$ :

$$f^k = kf$$

für alle ganzen Zahlen  $k \geq 0$  und, wenn das Inverse existiert, auch für  $k < 0$ .

Das kann man auch so formulieren: die Abbildung  $p_k(x) = x^k$  von  $R$  in sich bewirkt eine homomorphe Abbildung der Homotopiegruppen von  $R$  in sich, die durch

$$p_k f = kf$$

gegeben ist.

*Satz IV:*  $R$  sei ein  $\Gamma_e$ -Raum; für  $f, g \in \pi_n(R)$ ,  $h \in \pi_r(S^n)$  gilt bei beliebigem  $n$  und  $r$

$$(f + g)h = fh + gh,$$

also auch

$$(-f)h = -(fh) .$$

Man beachte, daß dieses „Distributivgesetz“ im allgemeinen nicht zu gelten braucht, wenn  $R$  kein  $\Gamma_e$ -Raum ist<sup>2)</sup>; dagegen gilt immer ( $f \in \pi_n(R)$ ;  $g, h \in \pi_r(S^n)$ )

$$f(g + h) = fg + fh .$$

Die Sätze I—IV werden im § 1 bewiesen.

4. a) Im § 2 (Nr. 8) wenden wir diese Ergebnisse an auf den Fall einer  $m$ -dimensionalen Sphäre  $S^m$ , die  $\Gamma_e$ -Raum ist. Mit  $T_k$  bezeichnen wir eine Abbildung der  $S^m$  in sich vom Grade  $k$ . Aus Satz IV folgt:

---

<sup>2)</sup> Gegenbeispiel s. [2], S. 303.

*Satz V*:  $S^m$  sei ein  $\Gamma_e$ -Raum; dann gilt für  $f \in \pi_n(S^m)$  bei beliebigem  $n$  und  $k$ :

$$T_k f = k f .$$

Da bekanntlich<sup>3)</sup>  $S^3$  und  $S^7$   $\Gamma$ -Räume sind, gilt Satz V insbesondere für  $m = 3$  und  $7$ .

Vermöge der Freudenthal'schen „Einhängung“<sup>4)</sup> der Abbildungen von Sphären auf Sphären übertragen wir (Nr. 9 und 10) die Aussage von Satz V auch auf andere Dimensionszahlen  $m$ , wenigstens für gewisse  $n$ .  $\gamma(f)$  bedeute die Hopf'sche Invariante<sup>5)</sup> von  $f \in \pi_s(S^r)$ ,  $s \geq 2r - 1$ . Dann gilt (man beachte Anm. <sup>11)</sup>):

*Satz VI*: Wenn  $S^m$  ein  $\Gamma_e$ -Raum ist, so gilt für  $f \in \pi_{r+d}(S^r)$  mit  $d \leq m$  und  $r \geq d + 1$  und  $\gamma(f) = 0$

$$T_k f = k f .$$

Für  $r > d + 1$  bedeutet  $\gamma(f) = 0$  keine Einschränkung. — Weil  $S^7$  ein  $\Gamma$ -Raum ist, gilt insbesondere für  $f \in \pi_{r+d}(S^r)$  mit  $d \leq 7$ ,  $r \geq d + 1$ ,  $\gamma(f) = 0$

$$T_k f = k f .$$

*Korollar*<sup>6)</sup>: Für  $f \in \pi_{r+1}(S^r)$ ,  $r \geq 3$  gilt

$$T_2 f = 0 .$$

Das folgt nämlich daraus, daß für  $r \geq 3$  die Gruppe  $\pi_{r+1}(S^r)$  die Ordnung 2 hat.

b) In Satz V, angewandt auf  $m = 3$  und  $7$ , ist eine Aussage über die Abbildung  $T_{-1}$  der  $S^m$  auf sich vom Grade  $-1$  enthalten:

Bei beliebigem  $n$  gilt für  $f \in \pi_n(S^m)$

$$T_{-1} f = -f .$$

Wir schließen hieran in Nr. 11 noch einige Betrachtungen über die Abbildung  $T_{-1}$  und zeigen u. a., daß für  $n \geq 3$ ,  $f \in \pi_n(S^2)$  im Gegensatz zu V und VI

$$T_{-1} f = f$$

ist.

<sup>3)</sup> vgl. Hopf [4], S. 436—437.

<sup>4)</sup> s. [2], S. 303—304.

<sup>5)</sup> Definition: [5], S. 645ff. und [4], S. 428ff., ferner [2], S. 304—305.

<sup>6)</sup> vgl. [6], Nr. 12 b, Hilfssatz.

5. Im § 3 (der vom vorigen nur wenig benützt) bestimmen wir die dritte, vierte und fünfte Homotopiegruppe der orthogonalen Gruppen, unter Verwendung einer von mir kürzlich entwickelten Methode<sup>7)</sup>.  $\Gamma_n$  bedeute die Gruppe aller orthogonalen  $(n + 1)$ -reihigen Matrizen mit der Determinante  $+ 1$ ,  $\mathfrak{G}$  die additive Gruppe der ganzen Zahlen,  $\mathfrak{G}_2$  die Restklassengruppe von  $\mathfrak{G}$  mod. 2 ( $\approx$  bedeutet isomorph).

Wir fassen die Ergebnisse des § 3 im folgenden Satz zusammen:

Satz VII:

1. Für  $n \geq 4$  ist  $\pi_3(\Gamma_n) \approx \mathfrak{G}$
2. Für  $n \geq 5$  ist  $\pi_4(\Gamma_n) = 0$
3. Für  $n \geq 6$  ist  $\pi_5(\Gamma_n) = 0$

Ferner gilt

4.  $\pi_3(\Gamma_2) \approx \mathfrak{G}$ ,  $\pi_3(\Gamma_3) \approx \mathfrak{G} + \mathfrak{G}$ .
5.  $\pi_4(\Gamma_2) \approx \mathfrak{G}_2$ ,  $\pi_4(\Gamma_3) \approx \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2$ ,  $\pi_4(\Gamma_4) \approx \mathfrak{G}_2$ .
6.  $\pi_5(\Gamma_2) = 0$ ,  $\pi_5(\Gamma_3) = 0$ ,  $\pi_5(\Gamma_4) = 0$ ,  $\pi_5(\Gamma_5) \approx \mathfrak{G}$ .

## § 1. Beweis der Sätze I—IV

6. a).  $R$  sei ein zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer metrischer Raum. Wir bezeichnen mit  $R^{S^n}(a) \subset R^{S^n}$  den Raum derjenigen Abbildungen  $f \in R^{S^n}$ , für welche

$$f(x_0) = a$$

ist, wobei  $x_0$  ein beliebiger, aber festgewählter Punkt von  $S^n$ ,  $a$  von  $R$  ist. Die Elemente der  $n^{\text{ten}}$  Homotopiegruppe von  $R$ ,  $\pi_n(R)$ , sind die Komponenten von  $R^{S^n}(a)$ , also die Klassen homotoper Abbildungen der  $S^n$  in  $R$ , „unter Festhaltung von  $a$ “. Wir wählen als Urbild statt der Sphäre  $S^n$  auch den Einheitskubus  $E^n$  des  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes  $R^n$ , gegeben durch  $n$  reelle Koordinaten  $x_i$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n ;$$

den Punkt mit den Koordinaten  $(x_1, \dots, x_n)$  bezeichnen wir auch kurz mit  $x$ , einen Punkt auf dem Rande von  $E^n$  (d. h. für welchen mindestens eine seiner Koordinaten den Wert 0 oder 1 hat) mit  $x_0$ . Elemente von  $\pi_n(R)$  sind dann die Komponenten von  $R^{E^n}(a)$ ; das ist der Raum der Abbildungen  $f \in R^{E^n}$ , bei welchen für alle  $x_0$

$$f(x_0) = a$$

---

<sup>7)</sup> s. [6], insbesondere die Nr. 6 und 10. — Die Kenntnis der Arbeit [6] wird in Nr. 9 sowie im § 3 vorausgesetzt. Eine wesentliche Rolle spielt im § 3 der Satz ([6], Satz 27), daß die Sphäre  $S^5$  nicht parallelisierbar ist.

ist, und die Hurewicz'sche Summe<sup>1)</sup>  $f + g = h$  zweier Abbildungen  $f, g \in R^{\mathbb{E}^n}(a)$  kann durch

$$h(x) = h(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1, x_2, \dots, x_n) & 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n) & \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

gegeben werden.

Die Struktur von  $\pi_n(R)$  ist von der Wahl von  $a \in R$  unabhängig (man kann in naheliegender Weise mittelst eines Weges von  $a$  nach  $b \in R$  zwischen den zu  $a$  und  $b$  gehörigen Gruppen  $\pi_n(R)$  einen Isomorphismus herstellen).

b)  $R$  sei nun ein  $\Gamma$ -Raum (Nr. 2); dann ist für die Abbildungen (sowie ihre Klassen)  $f, g \in R^{\mathbb{E}^n}$  das Produkt

$$f \cdot g \in R^{\mathbb{E}^n}$$

definiert.

Aus den vier Abbildungen  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in R^{\mathbb{E}^n}(a)$  bilden wir die Abbildung

$$h = (f_1 + f_2) \cdot (g_1 + g_2)$$

also

$$h(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(2x_1, \dots, x_n) \cdot g_1(2x_1, \dots, x_n) & 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2x_1 - 1, \dots, x_n) \cdot g_2(2x_1 - 1, \dots, x_n) & \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1, \end{cases}$$

das ist aber definitionsgemäß die Abbildung  $(f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot g_2)$ . Es gilt also (Satz I):

$$(f_1 + f_2) \cdot (g_1 + g_2) = (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot g_2). \quad (2)$$

Man beachte, daß aus  $f, g \in R^{\mathbb{E}^n}(a)$  folgt

$$f \cdot g \in R^{\mathbb{E}^n}(a \cdot a);$$

in Gleichung (2) stehen also auf beiden Seiten Abbildungen aus  $R^{\mathbb{E}^n}(a \cdot a)$ .

Satz I ist damit nicht nur für Elemente der (zu beliebigem  $a \in R$  gehörigen) Homotopiegruppen, sondern für die Sphärenabbildungen selbst bewiesen.

c) In einem  $\Gamma$ -Raum  $R$  bezeichnen wir mit  $l_a$  die bei festem  $a$  und variablem  $b \in R$  durch

$$l_a(b) = a \cdot b$$

gegebene Abbildung von  $R$  in sich, analog mit  $r_a$  die Abbildung

$$r_a(b) = b \cdot a.$$

$X$  sei ein Kompaktum,  $f \in R^X$ , und die Abbildung von  $X$  in  $R$ , bei welcher alle Punkte von  $X$  auf  $a \in R$  abgebildet werden, sei auch mit  $a$  bezeichnet. Es gilt dann für  $f, a \in R^X$

$$\begin{aligned} f \cdot a &= r_a f \\ a \cdot f &= l_a f . \end{aligned}$$

Aus (2) folgt also für 2 Abbildungen  $f, g \in R^{\mathbb{E}^n(a)}$ :

$$(f + a) \cdot (a + g) = f \cdot a + a \cdot g = r_a f + l_a g .$$

Da aber  $f + a$  zu  $f$  und  $g + a$  zu  $g$  homotop ist (in  $R^{\mathbb{E}^n(a)}$ ), gilt für die Klassen von  $f$  und  $g$  in  $R^{\mathbb{E}^n(a)}$ :

$$f \cdot g = r_a f + l_a g . \quad (3)$$

7. a) In dieser Nummer soll  $R$  ein  $\Gamma_e$ -Raum sein (Nr. 7); wir zeichnen für die Bildung der Homotopiegruppen von  $R$  den Punkt  $e \in R$  aus und betrachten ausschließlich Abbildungen  $f \in R^{\mathbb{E}^n(e)}$ . Da sowohl  $r_e$  als auch  $l_e$  die Identität von  $R$  ist, folgt aus (3) für 2 Elemente  $f, g \in \pi_n(R)$  der Satz II :

$$f \cdot g = f + g . \quad (4)$$

Daraus folgt unmittelbar (wenn die Potenzen  $a^k, a \in R$ , bzw.  $f^k, f \in \pi_n(R)$  gemäß Nr. 2 erklärt sind)

$$f^k = f \cdot f^{k-1} = f + f^{k-1} ,$$

und durch vollständige Induktion der Satz III für  $k \geq 0$  : Für  $f \in \pi_n(R)$  ist

$$f^k = k \cdot f ; \quad (5)$$

für negative  $k$  folgt er aus

$$f \cdot f^{-1} = f + f^{-1} = 0 ,$$

also

$$f^{-1} = -f . \quad (5)'$$

b) Es seien  $f, g$  Elemente von  $\pi_n(R)$  und  $h$  ein Element von  $\pi_r(S^n)$ , bzw. Abbildungen, die die betreffenden Klassen repräsentieren. Nach (4) ist

$$(f + g)h = (f \cdot g)h ;$$

eine Abbildung dieser Klasse ist durch

$$f(h(x)) \cdot g(h(x)) , \quad x \in S_r$$

gegeben, es gilt also

$$(f + g)h = fh \cdot gh = fh + gh .$$



Also gilt für einen  $\Gamma_e$ -Raum das „Distributivgesetz“ (Satz IV) für die Homotopiegruppen: wenn  $f, g \in \pi_n(R)$  und  $h \in \pi_r(S^n)$ , so ist

$$(f + g)h = fh + gh. \quad (6)$$

Wegen

$$(f - f)h = fh + (-f)h = 0$$

folgt hieraus

$$(-f)h = -(fh). \quad (6)'$$

Es gilt also insbesondere für alle ganzen Zahlen  $k$ :

$$(kf)h = k(fh). \quad (6)''$$

(Daß für  $f \in \pi_n(R)$ ,  $g, h \in \pi_r(S^n)$  das Distributivgesetz

$$f(g + h) = fg + fh$$

immer gilt, geht direkt aus der Definition (1) hervor.)

## § 2. Abbildungen von Sphären auf Sphären

8. a) Mit  $T_k$  bezeichnen wir immer eine Abbildung (oder Abbildungsklasse) der orientierten  $r$ -dimensionalen Sphäre  $S^r$  auf sich vom Grade  $k$  ( $r$  und  $k$  beliebig). Faßt man  $T_k$  als Element der Homotopiegruppe  $\pi_r(S^r)$  auf, so ist

$$T_k = kT_1. \quad (7)$$

Wenn die Sphäre  $S^m$  ein  $\Gamma_e$ -Raum ist, gilt also nach Satz IV (Formel (6)''):

$$\begin{aligned} T_k f &= (k T_1) f = k(T_1 f) = k f, \\ T_k f &= k f. \end{aligned} \quad (8)$$

Damit ist Satz V bewiesen.

b) Für den Fall einer  $\Gamma_e$ -Sphäre  $S^m$  ist also der durch  $T_k \in \pi_m(S^m)$  bewirkte Homomorphismus der Gruppen  $\pi_n(S^m)$  in sich durch  $T_k f = kf$  gegeben.

Man kann ganz allgemein die Abbildungen  $T_k \in \pi_r(S^r)$  als Operatoren der Homotopiegruppen  $\pi_n(S^r)$  auffassen; für sie gilt bei beliebigem  $f \in \pi_n(S^r)$

$$T_k (T_{k'} f) = T_{kk'} f, \quad (9)$$

hingegen nicht immer

$$(T_k + T_{k'}) f = T_k f + T_{k'} f, \quad (10)$$

wie das Beispiel  $n = 2r - 1$  bei geradem  $r$  zeigt (dann gilt nämlich für die Hopf'sche Invariante<sup>8)</sup>  $\gamma$

$$\gamma((T_k + T_{k'})f) = \gamma(T_{k+k'}f) = (k + k')^2 \gamma(f)$$

aber

$$\gamma(T_k f + T_{k'} f) = \gamma(T_k f) + \gamma(T_{k'} f) = (k^2 + k'^2) \cdot \gamma(f) ,$$

was für  $\gamma(f) \neq 0$ ,  $k \neq 0$ ,  $k' \neq 0$  unmöglich gleich sein kann).

Für  $\Gamma_e$ -Sphären folgt (10) natürlich aus (8). — Es sei hier noch erwähnt, daß für  $f \in \pi_3(S^2)$

$$T_k f = k^2 f$$

ist<sup>9)</sup>.

9. a) Nach Freudenthal<sup>4)</sup> verstehen wir unter *Einhängung*  $\mathfrak{E}$  eine homomorphe Abbildung der Homotopiegruppe  $\pi_n(S^r)$  in  $\pi_{n+1}(S^{r+1})$  (für beliebige  $n$  und  $r$ ), die folgendermaßen gegeben ist:  $E^1$  sei die Einheitsstrecke  $0 \leq t \leq 1$ ; für  $x \in S^n$  bedeute  $(x, t)$  einen Punkt des topologischen Produkts  $S^n \times E^1$ , für  $y \in S^r$  ( $y, t$ ) einen Punkt von  $S^r \times E^1$ .  $f$  sei eine Abbildung der  $S^n$  in  $S^r$ ,  $F$  die durch

$$F(x, t) = (f(x), t) \quad x \in S^n, f(x) \in S^r$$

gegebene Abbildung von  $S^n \times E^1$  in  $S^r \times E^1$ . Identifiziert man  $S^n \times (1)$  und  $S^n \times (0)$  und ebenso  $S^r \times (1)$  und  $S^r \times (0)$  zu je einem Punkt, so kann man  $F$  als Abbildung von  $S^{n+1}$  in  $S^{r+1}$  auffassen; diese Abbildung bzw. ihre Klasse heißt  $\mathfrak{E}f$ .

b) *Hilfssatz 1*: Für  $g \in \pi_3(S^n)$ ,  $f \in \pi_n(S^r)$  gilt

$$(\mathfrak{E}f)(\mathfrak{E}g) = \mathfrak{E}(fg) .$$

Beweis:  $\mathfrak{E}f$  sei gegeben durch die Abbildung  $F$  von  $S^n \times E^1$  in  $S^r \times E^1$

$$F(u, t) = (f(u), t) \quad u \in S^n, f(u) \in S^r ,$$

und  $\mathfrak{E}g$  durch die Abbildung  $G$  von  $S^3 \times E^1$  in  $S^n \times E^1$

$$G(x, t) = (g(x), t) \quad x \in S^3, g(x) \in S^n .$$

Dann ist  $(\mathfrak{E}f)(\mathfrak{E}g)$  gegeben durch die Abbildung  $FG$  von  $S^3 \times E^1$  in  $S^r \times E^1$ :

$$F(G(x, t)) = F(g(x), t) = (f(g(x)), t) ;$$

durch diese Abbildung ist aber gerade  $\mathfrak{E}(fg)$  erklärt.

<sup>8)</sup> s. <sup>5)</sup>, ferner [5], S. 653.

<sup>9)</sup> die Klassen  $f \in \pi_3(S^2)$  sind durch die Invariante  $\gamma(f)$  bestimmt, vgl. [6], Nr. 12 b, im Beweis des Hilfssatzes.

c)  $T_k^{(r)}$  sei wie in Nr. 6a) erklärt; der obere Index ( $r$ ) soll hervorheben, daß es sich um ein Element von  $\pi_r(S^r)$  handelt.

*Hilfssatz 2:* Für jedes  $f \in \pi_n(S^r)$  ist

$$T_k^{(r+1)}(\mathfrak{E}f) = \mathfrak{E}(T_k^{(r)}f) .$$

Beweis: Offenbar gilt

$$T_k^{(r+1)} = \mathfrak{E}T_k^{(r)} ,$$

somit nach Hilfssatz 1

$$T_k^{(r+1)}(\mathfrak{E}f) = (\mathfrak{E}T_k^{(r)})(\mathfrak{E}f) = \mathfrak{E}(T_k^{(r)}f) .$$

## 10. Beweis von Satz VI.

a) Wenn für ein Element  $f \in \pi_n(S^r)$  und eine ganze Zahl  $k$

$$T_k f = k f$$

gilt, dann gilt dies auch für jede Abbildungsklasse, die aus  $f$  durch (evtl. wiederholte) Einhängung hervorgeht.

Dies folgt aus Hilfssatz 2 und der Tatsache, daß  $\mathfrak{E}$  ein Homomorphismus ist. — Allgemein gilt

$$T_k(\mathfrak{E}f) - k(\mathfrak{E}f) = \mathfrak{E}(T_k f - k f) . \quad (11)$$

b)  $S^m$  sei eine  $\Gamma_e$ -Sphäre; dann gilt nach Satz V für  $f \in \pi_n(S^m)$

$$T_k f = k f ,$$

und diese Formel läßt sich für gewisse, in Satz VI genannte Zahlen  $r$  und  $d$  auf  $f \in \pi_{r+d}(S^r)$  mit  $\gamma(f) = 0$  übertragen ( $\gamma(f)$  ist die Hopf'sche Invariante<sup>5)</sup> von  $f$ ). Wir unterscheiden für den Beweis die Fälle

$$r > m , \quad m \geq d$$

und

$$r < m , \quad r \geq d + 1$$

( $r = m$  ist in Satz V enthalten), die man in der Form

$$m \geq d , \quad r \geq d + 1$$

zusammenfassen kann.

c)  $r > m$ ,  $m \geq d$ . In diesem Falle läßt sich jedes Element  $f \in \pi_{r+d}(S^r)$  mit  $\gamma(f) = 0$  durch (evtl. mehrfache) Einhängung aus einem Element  $h \in \pi_{m+d}(S^m)$  erzeugen (nach einem Satze von Freudenthal<sup>10)</sup>); nach Nr. 10a) gilt also  $T_k f = k f$ .

<sup>10)</sup> [2], S. 300, Satz I.

d)  $r < m$ ,  $r \geq d + 1$ . Ein Element  $f \in \pi_{r+d}(S^r)$  geht durch  $(m - r)$ -fache Einhängung über in  $g \in \pi_{m+d}(S^m)$ , und gleichzeitig wegen (11)  $T_k f - kf$  in  $T_k g - kg = 0$ . Ferner folgt aus  $\gamma(f) = 0$

$$\gamma(T_k f - kf) = (k^2 - k)\gamma(f) = 0$$

und nach Freudenthal<sup>11)</sup> folgt aus  $\mathfrak{E}h = 0$ ,  $\gamma(h) = 0$  immer  $h = 0$ , also  $T_k f - kf = 0$ .

11a) Wir schließen noch einige Bemerkungen über den durch die Abbildung  $T_{-1}$  der Sphäre  $S^r$  auf sich vom Grade  $-1$  bewirkten Homomorphismus von  $\pi_n(S^r)$  an, die nur teilweise mit dem vorigen zusammenhängen.

In Satz V ist enthalten, daß für  $m = 3$  und  $7$  und beliebiges  $n$  und  $f \in \pi_n(S^m)$  gilt

$$T_{-1} f = -f. \quad (12)$$

Diese Formel gilt übrigens nach Freudenthal<sup>12)</sup> für jedes eingehängte Element  $f = \mathfrak{E}g$  einer Homotopiegruppe  $\pi_n(S^r)$ .

b) Wir benützen im folgenden den Begriff der *retrahierbaren Zerlegung*  $\mathfrak{Z}$  (oder *Faserung*) eines Kompaktums  $R$ <sup>13)</sup> und der zugehörigen *Projektion*  $P$  (oder *Faserabbildung*) von  $R$  auf den Zerlegungsraum  $Z$ , ferner verschiedene für solche Zerlegungen geltende Beziehungen, die ich an anderer Stelle [6] bewiesen habe.

$L_r$  sei der Linienelementraum der  $S^r$ , d. h. der (in natürlicher Weise topologisierte) Raum aller an die  $S^r$  tangentialen Einheitsvektoren; er ist gefasert in die Teilmengen der in einem bestimmten Punkt der  $S^r$  angreifenden Einheitsvektoren; diese Teilmengen sind alle der  $S^{r-1}$  homöomorph. Diese Zerlegung  $\mathfrak{Z}$  ist retrahierbar<sup>14)</sup>, und ihr Zerlegungsraum ist zur  $S^r$  homöomorph und sei mit ihr identifiziert. Eine Abbildung  $F$  eines Kompaktums  $X$  in die  $S^r$  heißt *Spur in  $L_r$* , wenn es eine Abbildung  $f$  von  $X$  in  $L_r$  gibt, derart, daß

$$F = Pf$$

ist.

<sup>11)</sup> [2], S. 300, Satz II. Der Fall  $r < m$ ,  $r = d + 1$  für ungerades  $r$  wird von diesem Satz allerdings nur für  $r = 1, 3, 7$  erledigt; für die übrigen ungeraden  $r$  folgt der Satz II von [2] erst aus einer Mitteilung von Freudenthal (Proc. Akad. Amsterdam 42 (1939), S. 140), deren Beweis noch nicht erschienen und mir unbekannt ist; auf Grund dieser Mitteilung würde Satz II von [2] die Form erhalten: für  $f \in \pi_{r+d}(S^r)$ ,  $r \geq d + 1$ ,  $\mathfrak{E}f = 0$ ,  $\gamma(f) = 0$  folgt  $f = 0$ .

<sup>12)</sup> s. [2], S. 304, Nr. 3.7.

<sup>13)</sup> [6], § 1.

<sup>14)</sup> [6], Nr. 14.

c) Ist  $r$  gerade und  $F \in S^{n^X}$  eine Spur in  $L_r$ , so ist  $T_{-1}F$  zu  $F$  homotop.

Beweis: Wenn  $r$  gerade ist, so hat die Spiegelung der  $S^r$  an ihrem Mittelpunkt, die jeden Punkt  $a \in S^r$  in seinen Antipodenpunkt  $a'$  abbildet, den Grad  $-1$ ; wir können also für  $T_{-1}$  diese Abbildung wählen.

$F \in S^r$  sei eine Spur in  $L_r$ ; das bedeutet, daß wir dem Punkt  $F(x) \in S^r$  in stetiger Weise einen in  $F(x)$  angebrachten tangentialen Einheitsvektor und infolgedessen einen durch  $F(x)$  gehenden gerichteten Großkreis der  $S^r$  zuordnen können. Läßt man für jedes  $x \in X$  den Punkt  $F(x)$  auf dem zu ihm gehörigen gerichteten Großkreis in den Antipodenpunkt  $F'(x) = T_{-1}F(x)$  wandern, so wird  $F$  stetig in  $T_{-1}F$  übergeführt.

d) Wenn eine Abbildung von  $X$  in  $S^r$  Spur in  $L_r$  ist, so ist auch jede zu ihr homotope Abbildung Spur in  $L_r$ <sup>15)</sup>; wir sagen deshalb auch von einer *Abbildungsklasse* (oder einem Element einer Homotopiegruppe), sie sei Spur in  $L_r$ .

Wenn  $f \in \pi_n(S^r)$  eingehängt, d. h. von der Form  $f = \mathfrak{E}g$  ist, und wenn bei geradem  $r$   $f$  eine Spur in  $L_r$ , bei ungeradem  $r$   $g$  eine Spur in  $L_{r-1}$  ist, so ist  $2f = 0$ .

Beweis: Wenn  $f = \mathfrak{E}g$  ist, so ist<sup>12)</sup>

$$T_{-1}f = -f ;$$

$r$  sei gerade: Wenn  $f$  Spur in  $L_r$  ist, so ist  $T_{-1}f = f$ , also

$$f = -f .$$

$r$  sei ungerade: Wenn  $g$  Spur in  $L_{r-1}$  ist, so ist  $T_{-1}g = g$ , also nach Hilfsatz 2

$$T_{-1}f = T_{-1}\mathfrak{E}g = \mathfrak{E}T_{-1}g = \mathfrak{E}g = f$$

also

$$f = -f .$$

e) Jedes Element  $f \in \pi_n(S^2)$  mit beliebigem  $n \geq 3$  ist Spur in  $L_2$ .

Beweis: Wegen  $\pi_{n-1}(S^1) = 0$  ( $n \geq 3$ ) ist dies eine unmittelbare Folgerung aus den an anderer Stelle<sup>16)</sup> bewiesenen „Hurewicz'schen Formeln“.

Aus 9c) folgt also: Für jedes Element  $f \in \pi_n(S^2)$  ( $n \geq 3$ ) gilt

$$T_{-1}f = f . \tag{13}$$

Aus 9d) folgt: Für jedes eingehängte Element  $f = \mathfrak{E}g \in \pi_n(S^3)$ , ( $n \geq 4$ ) gilt  $2f = 0$ .

<sup>15)</sup> [6], Nr. 3d (Lemma).

<sup>16)</sup> [6], Nr. 6, Satz E mit Korollar.

### § 3. Einige Homotopiegruppen der orthogonalen Gruppen

12. a) Die Methode, mit welcher wir in diesem Paragraphen die 3., 4. und 5. Homotopiegruppe der orthogonalen Gruppen bestimmen, habe ich an anderer Stelle [6] ausführlich entwickelt; wir geben hier nur die wichtigsten Bezeichnungen und Beziehungen an, soweit sie für das Folgende benötigt werden.

b)  $\Gamma_m$  sei die (topologische) Gruppe aller  $(m + 1)$ -reihigen orthogonalen Matrizen  $a = (a_{ik})$  mit der Determinante  $+ 1$ . Die Untergruppe der Matrizen  $(a_{ik})$  mit

$$a_{1k} = \delta_{1k} \quad k = 1, \dots, m + 1$$

ist zur Gruppe  $\Gamma_{m-1}$  isomorph und werde ebenfalls mit  $\Gamma_{m-1}$  bezeichnet. Die Zerlegung  $\mathfrak{Z}_m$  von  $\Gamma_m$  in Restklassen nach der Untergruppe  $\Gamma_{m-1}$  ist retrahierbar<sup>13</sup>); ihr Zerlegungsraum ist zur Sphäre  $S^m$  homöomorph: jede Restklasse von  $\Gamma_m$  nach  $\Gamma_{m-1}$  umfaßt genau alle diejenigen Matrizen  $(a_{ik})$ , die in den Elementen  $a_{1k}$  der ersten Zeile übereinstimmen, und ist somit gegeben durch  $(m + 1)$  reelle Zahlen  $a_{1k}$ , die der einzigen Bedingung

$\sum_{k=1}^{m+1} a_{1k}^2 = 1$  genügen, und die man somit in einem  $(m + 1)$ -dimensionalen euklidischen Raum  $R^{m+1}$  als Koordinaten eines Punktes  $u = (u_1, \dots, u_{m+1})$  der Sphäre  $S^m$

$$\sum_{k=1}^{m+1} u_k^2 = 1$$

deuten kann.

Die Abbildung von  $\Gamma_m$  auf  $S^m$ , die jedem Punkt  $a = (a_{ik})$  von  $\Gamma_m$  seine Restklasse, d. h. den Punkt  $u$

$$u_k = a_{1k} \quad k = 1, \dots, m + 1$$

der Sphäre  $S^m$  zuordnet, heißt *Projektion* und wird mit  $P_m$  bezeichnet.

c) Bei der Bildung der Homotopiegruppen von  $\Gamma_m$  sei der Punkt  $e = (\delta_{ik}) \in \Gamma_m$  ausgezeichnet (vgl. 4a), bei denen von  $S^m$  der Punkt  $u_0$  mit den Koordinaten  $\delta_{1k}$ :

$$P_m e = u_0 .$$

$\psi_n(\mathfrak{Z}_m)$  sei die Untergruppe derjenigen Elemente von  $\pi_n(\Gamma_{m-1})$ , d. h. Abbildungsklassen von  $S^n$  in die Untergruppe  $\Gamma_{m-1}$  von  $\Gamma_m$ , die in der 0-Klasse von  $\pi_n(\Gamma_m)$  enthalten sind.

$\varphi_n(\mathfrak{Z}_m)$  sei die Untergruppe derjenigen Elemente von  $\pi_n(\Gamma_m)$ , die, als Abbildungsklassen aufgefaßt, Elemente von  $\pi_n(\Gamma_{m-1})$  enthalten.

Es gelten die „Hurewicz’schen Formeln“<sup>16)</sup> ( $\approx$  bedeutet isomorph)

$$\left. \begin{array}{l} \text{I} \quad \pi_n(S^m)/P_m \pi_n(\Gamma_m) \approx \psi_{n-1}(\mathfrak{Z}_m) \\ \text{II} \quad \quad \quad P_m \pi_n(\Gamma_m) \approx \pi_n(\Gamma_m)/\varphi_n(\mathfrak{Z}_m) \\ \text{III} \quad \quad \quad \varphi_n(\mathfrak{Z}_m) \approx \pi_n(\Gamma_{m-1})/\psi_n(\mathfrak{Z}_m) \end{array} \right\} \quad (14)$$

für beliebiges  $n \geq 1$  ( $\psi_0(\mathfrak{Z}_m)$  ist = 0 zu setzen) und  $m \geq 2$ . Der Isomorphismus (14), II wird durch die Projektion  $P_m$  selbst vermittelt.

Eine Folge dieser Beziehungen ist insbesondere<sup>17)</sup>: Für  $m \geq n + 1$  ist

$$\pi_n(\Gamma_m) \approx \pi_n(\Gamma_{n+1}).$$

Es ist also von besonderem Interesse, die Gruppen  $\pi_n(\Gamma_{n+1})$  zu bestimmen.

d) Unter einem *Schnittelement*  $t$  der Zerlegung  $\mathfrak{Z}_m$  verstehen wir eine stetige Abbildung  $t$  der  $m$ -dimensionalen Vollkugel  $V^m$  in  $\Gamma_m$ , bei welcher die Randsphäre  $\Sigma^{m-1}$  von  $V^m$  in die Untergruppe  $\Gamma_{m-1}$  von  $\Gamma_m$  abgebildet wird, und derart, daß die Abbildung  $P_m t$  das Innere von  $V^m$  topologisch auf  $S^m - u_0$  abbildet. Die zugehörige Abbildung  $t'$  von  $\Sigma^{m-1}$  in  $\Gamma_{m-1}$  (bei welcher ein bestimmter Punkt  $\xi_0 \in \Sigma^{m-1}$  auf  $e \in \Gamma_{m-1}$  abgebildet werden soll) heißt *Rand des Schnittelements*. Für alle  $n < 2m - 1$  (und bei ungeradem  $m$  auch für  $n = 2m - 1$ ) ist<sup>18)</sup>

$$\psi_{n-1}(\mathfrak{Z}_m) = t' \pi_{n-1}(\Sigma^{m-1});$$

insbesondere ist also  $\psi_{m-1}(\mathfrak{Z}_m)$  die von  $t' \in \pi_{m-1}(\Gamma_{m-1})$  erzeugte Untergruppe von  $\pi_{m-1}(\Gamma_{m-1})$ .

Vermöge dieser Beziehung erlaubt die Konstruktion eines Schnittelements in einigen Fällen die Bestimmung von  $\psi_{n-1}(\mathfrak{Z}_m)$  und wegen (14) auch von  $\pi_n(\Gamma_m)$ .

13. a) Wir untersuchen zunächst die Gruppe  $\pi_3(\Gamma_2)$ . Da  $\Gamma_2$  zum 3-dimensionalen reellen projektiven Raum homöomorph ist, muß  $\pi_3(\Gamma_2)$  (nach [1], Satz IV) eine unendliche zyklische Gruppe sein; genauer: In der Zerlegung  $\mathfrak{Z}_2$  gilt nach (14):

$$\pi_3(S^2)/P_2 \pi_3(\Gamma_2) \approx \psi_2(\mathfrak{Z}_2) \subset \pi_2(\Gamma_1) = 0,$$

weil  $\Gamma_1$  dem Kreis  $S^1$  homöomorph ist, also

$$\pi_3(S^2) = P_2 \pi_3(\Gamma_2) \approx \pi_3(\Gamma_2)/\varphi_3(\mathfrak{Z}_2) = \pi_3(\Gamma_2),$$

<sup>17)</sup> [6], Satz 9 (Nr. 8).

<sup>18)</sup> [6], Satz 12 (Nr. 10).

<sup>19)</sup> [6], Satz 19 (Nr. 14).

denn nach (14), III ist  $\varphi_3(\mathfrak{Z}_2)$  einer Faktorgruppe von  $\pi_3(\Gamma_1) = 0$  isomorph. Wir finden also

$$\pi_3(\Gamma_2) \approx \pi_3(S^2), \quad (15)$$

und dieser Isomorphismus wird durch die Projektion  $P_2$  von  $\Gamma_2$  auf  $S^2$  vermittelt. Die Elemente von  $\pi_3(S^2)$  lassen sich aber durch die Hopf'sche Invariante charakterisieren<sup>9)</sup>.

Jedes Element  $f \in \pi_3(\Gamma_2)$  kann also durch eine ganze Zahl  $\gamma(f)$  charakterisiert werden, nämlich durch die Hopf'sche Invariante von  $P_2 f \in \pi_3(S^2)$ .

b)  $\Gamma_3$  ist dem topologischen Produkt  $S^3 \times \Gamma_2$  homöomorph, und zwar gibt es eine solche topologische Abbildung  $\Phi$  von  $\Gamma_3$  auf  $S^3 \times \Gamma_2$ , daß dabei jede Restklasse von  $\Gamma_3$  nach  $\Gamma_2$  genau auf eine der Mengen  $(u) \times \Gamma_2$  ( $u \in S^3$ ) abgebildet wird. Diese Abbildung

$$\Phi(a) = (u, v) \quad a \in \Gamma_3, \quad u \in S^3, \quad v \in \Gamma_2 \quad (16)$$

können wir geben durch

$$\begin{aligned} u &= P_3 a \\ v &= P'_3 a, \end{aligned}$$

wo  $P'_3$  folgendermaßen erklärt ist:

Wir bilden aus den Elementen der ersten Zeile der Matrix  $a = (a_{ik}) \in \Gamma_3$  die Vektoren  $v_k(a)$  ( $k = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} v_1 &= (-a_{12}, \quad a_{11}, \quad -a_{14}, \quad a_{13}) \\ v_2 &= (-a_{13}, \quad a_{14}, \quad a_{11}, \quad -a_{12}) \\ v_3 &= (-a_{14}, \quad -a_{13}, \quad a_{12}, \quad a_{11}) . \end{aligned}$$

Wir können sie auffassen als paarweise orthogonale Tangentialvektoren der Sphäre  $S^3$ , die im Punkt  $P_3 a \in S^3$  angreifen (also ein stetiges tangentiales 3-Feld<sup>20)</sup> auf  $S^3$  bilden).  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) seien die Zeilenvektoren der Matrix  $a = (a_{ik})$ ;  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  können ebenso wie  $v_1, v_2, v_3$  als paarweise orthogonale Tangentialvektoren der  $S^3$  im Punkte  $P_3 a$  der  $S^3$  aufgefaßt werden.

Wir betrachten nun die skalaren Produkte

$$v_{ik}(a) = \alpha_{i+1} \cdot v_k(a) \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3$$

(d. h. die Komponenten von  $\alpha_{i+1}$  bezüglich des durch die  $v_k(a)$  gebildeten cartesischen Koordinatensystems) als Elemente einer orthogonalen Matrix

$$v(a) = (v_{ik}(a)) \in \Gamma_2$$

und setzen

$$P'_3 a = v(a) ;$$

---

<sup>20)</sup> [7], S. 27 und S. 45.



das ist eine stetige Abbildung von  $\Gamma_3$  auf  $\Gamma_2$ , bei welcher jede Restklasse von  $\Gamma_3$  nach  $\Gamma_2$ , d. h. jede Teilmenge aller der Matrizen  $a$ , die im ersten Zeilenvektor  $a_1$  übereinstimmen, topologisch auf  $\Gamma_2$  abgebildet wird.

c) Die Homotopiegruppen von  $\Gamma_3$  zerfallen also wie die von  $S^3 \times \Gamma_2$  in direkte Summen<sup>21)</sup>

$$\pi_n(\Gamma_3) \approx \pi_n(S^3) + \pi_n(\Gamma_2),$$

und dieser Isomorphismus kann durch die topologische Abbildung  $\Phi$  vermittelt werden: für  $f \in \pi_n(\Gamma_3)$  ist

$$\Phi f = (P_3 f, P'_3 f)$$

wo  $P_3 f \in \pi_n(S^3)$  und  $P'_3 f \in \pi_n(\Gamma_2)$ .

Insbesondere ist  $\pi_3(\Gamma_3)$  ein 2-gliedriger Modul, den wir folgendermaßen beschreiben können: jedes Element  $f \in \pi_3(\Gamma_3)$  ist charakterisiert durch 2 ganze Zahlen  $c$  und  $\gamma$ , nämlich

$$c = \text{Grad von } P_3 f \in \pi_3(S^3),$$

$$\gamma = \text{Invariante von } P'_3 f \in \pi_3(\Gamma_2) \quad (\text{vgl. 11 a}).$$

Bezeichnen wir das zu  $c$  und  $\gamma$  gehörige Element  $f \in \pi_3(\Gamma_3)$  mit  $f_{c,\gamma}$ , so ist

$$f_{c,\gamma} + f_{c',\gamma'} = f_{c+c',\gamma+\gamma'},$$

also

$$f_{c,\gamma} = c \cdot f_{1,0} + \gamma f_{0,1}.$$

Durch die bisherigen Ausführungen haben wir Satz VII, 4) bewiesen und präzisiert.

#### 14. Untersuchung einer speziellen Abbildung.

a) Wir bestimmen die Invarianten  $c$  und  $\gamma$  folgender Abbildung  $s$  der Sphäre  $\Sigma^3$  in  $\Gamma_3$ : die Punkte  $x \in \Sigma^3$  seien durch 4 reelle Koordinaten  $x_1, x_2, x_3, x_4$  mit  $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1$  gegeben;  $a = (a_{ik})$  sei ein Punkt von  $\Gamma_3$ ; durch

$$a_{ik}(x) = \delta_{ik} - 2x_i x_k \quad i = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (17)$$

ist eine Matrix

$$a = s(x) \in \Gamma_3$$

<sup>21)</sup> [6], Satz G (Nr. 9).

bestimmt (die vierte Zeile einer orthogonalen Matrix mit der Determinante  $+1$  ist durch die 3 ersten festgelegt). Man verifiziert, daß

$$\sum_{k=1}^4 a_{ik}(x) \cdot a_{jk}(x) = \delta_{ij} - 4x_i x_j + 4x_i x_j \sum_{k=1}^4 x_k^2 = \delta_{ij}$$

ist. Bedeutet  $x_0 \in \Sigma^3$  den Punkt  $(0, 0, 0, 1)$ , so ist

$$s(x_0) = e.$$

b) Die Abbildung  $P_3 s$  der Sphäre  $\Sigma^3$  auf  $S^3$  ist gegeben durch

$$a_{1k}(x) = \delta_{1k} - 2x_1 x_k \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

diese Abbildung hat bekanntlich<sup>22)</sup> den Grad 2.

Die zu  $s$  gehörige Zahl  $\gamma$  ist nach Nr. 11 definiert als die Hopf'sche Invariante von  $P_2 P'_3 s \in \pi_3(S^2)$ . Es genügt also, von der Matrix

$$v(s(x)) \in \Gamma_2$$

(vgl. Nr. 11 b) die erste Zeile

$$v_{1k}(s(x)) \quad k = 1, 2, 3$$

zu berechnen; sie gibt uns die Abbildung  $P_2 P'_3 s$  von  $\Sigma^3$  auf  $S^2$ .

c) Nach 11 b) ist

$$v_{1k}(s(x)) = \alpha_2(x) \cdot v_k(s(x)) \quad k = 1, 2, 3;$$

dabei bedeutet  $\alpha_2(x)$  den zweiten Zeilenvektor der Matrix  $s(x)$ :

$$\alpha_2(x) = (-2x_2 x_1, 1 - 2x_2^2, -2x_2 x_3, -2x_2 x_4);$$

$v_k(s(x))$  sind die Vektoren

$$\begin{aligned} v_1(s(x)) &= (2x_1 x_2, 1 - 2x_1^2, 2x_1 x_4, -2x_1 x_3) \\ v_2(s(x)) &= (2x_1 x_3, -2x_1 x_4, 1 - 2x_1^2, 2x_1 x_2) \\ v_3(s(x)) &= (2x_1 x_4, 2x_1 x_3, -2x_1 x_2, 1 - 2x_1^2). \end{aligned}$$

---

<sup>22)</sup> Identifiziert man  $\Sigma^3$  mit  $S^3$ , so ist  $s(x)$  derjenige Punkt von  $\Sigma^3$ , der aus dem Punkt  $(1, 0, 0, 0)$  durch Spiegelung an der zum Durchmesser von  $x$  orthogonalen Diametralebene hervorgeht; vgl. [5], S. 434—435.

Also wird

$$\begin{aligned} v_{11}(s(x)) &= -4x_1^2 x_2^2 + (1-2x_1^2)(1-2x_2^2) - 4x_1 x_2 x_3 x_4 + 4x_1 x_2 x_3 x_4 \\ v_{12}(s(x)) &= -4x_1^2 x_2 x_3 - 2(1-2x_2^2)x_1 x_4 - 2(1-2x_1^2)x_2 x_3 - 4x_1 x_2^2 x_4 \\ v_{13}(s(x)) &= -4x_1^2 x_2 x_4 + 2(1-2x_2^2)x_1 x_3 + 4x_1 x_2^2 x_3 - 2(1-2x_1^2)x_2 x_4, \end{aligned}$$

also, wenn wir statt  $v_{1k}(s(x)) = u_k(x)$  schreiben

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 - 2(x_1^2 + x_2^2) \\ u_2(x) &= -2(x_1 x_4 + x_2 x_3) \\ u_3(x) &= 2(x_1 x_3 - x_2 x_4). \end{aligned}$$

Faßt man die Koordinaten von  $x \in \Sigma^3$  durch

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 - ix_2 \\ w_2 &= -x_4 + ix_3 \end{aligned}$$

zu komplexen Zahlen zusammen, so kann man also die Abbildung  $P_2 P_3'$  von  $\Sigma^3$  auf die Sphäre  $S^2$  (deren Punkte  $u$  durch die reellen Koordinaten  $u_1, u_2, u_3$ , gegeben sind) in der Form

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - 2\bar{w}_1 w_1 \\ u_2 + iu_3 &= 2\bar{w}_1 w_2 \end{aligned} \tag{18}$$

darstellen. Das ist aber nichts anderes als die von Hopf<sup>23)</sup> angegebene „Faserabbildung“  $p$  von  $\Sigma^3$  auf  $S^2$  (projiziert man nämlich  $S^2$  stereographisch auf die Ebene der komplexen Zahlen  $u_2 + iu_3$ , so wird bei der Abbildung (18) dem Punkt  $x \in \Sigma^3$  mit den (komplexen) Koordinaten  $w_1, w_2$  der Punkt  $w_2 : w_1$  dieser Zahlenebene zugeordnet); für diese Abbildung hat aber die Hopf'sche Invariante den Wert 1 (bei geeigneter Orientierung von  $\Sigma^3$ ).

Für die Abbildungsklasse von  $s$  gilt also (vgl. 11c):  $s = f_{2,1} \in \pi_3(\Gamma_3)$ .

15. a) Wir konstruieren nun ein *Schnittelement*  $t$  (s. Nr. 10d) der Zerlegung  $\mathcal{Z}_4$  von  $\Gamma_4$  in Restklassen nach der Untergruppe  $\Gamma_3$ . Die Vollkugel  $V^4$  ersetzen wir dabei durch die Halbsphäre  $H^4$ , die im  $R^5$  mit den Koordinaten  $x_1, \dots, x_5$  durch

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 1 \quad x_1 \geq 0$$

gegeben sei; die Randsphäre  $\Sigma^3$  ist also durch  $x_1 = 0$  bestimmt.

<sup>23)</sup> [4], S. 654.

$t$  sei die folgende Abbildung von  $H^4$  in  $\Gamma_4$ :

$$t(x) = (a_{ik}(x)) \in \Gamma_4,$$

wobei

$$a_{ik}(x) = \delta_{ik} - 2x_i x_k, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, 4 \\ k = 1, 2, 3, 4, 5, \end{array}$$

und die fünfte Zeile durch die 4 ersten bestimmt ist. Dann ist  $P_4 t$  gegeben durch

$$a_{1k}(x) = \delta_{1k} - 2x_1 x_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5;$$

das ist eine topologische Abbildung<sup>22)</sup> der offenen Halbsphäre  $x_1 > 0$  auf  $S^4 - u_0$  ( $u_0$  ist der Punkt  $(1, 0, 0, 0, 0)$  der Sphäre  $S^4$ ), während die Randsphäre  $\Sigma^3(x_1 = 0)$  durch  $t$  in die Untergruppe  $\Gamma_3$  von  $\Gamma_4$  abgebildet wird:  $t$  ist also ein Schnittelement von  $\Gamma_4$ . Der Rand dieses Schnittelements, d. h. die Abbildung  $t'$  von  $\Sigma^3$  in  $\Gamma_3$  hat die Form

$$a_{ik}(x) = \delta_{ik} - 2x_i x_k \quad \begin{array}{l} i = 2, 3, 4 \\ k = 2, 3, 4, 5 \end{array}$$

d. h.  $t'$  ist genau die in Nr. 12 untersuchte Abbildung  $s$  von  $\Sigma^3$  in  $\Gamma_3$ . Da die Abbildungsklasse des Randes eines Schnittelementes  $t$  durch die Zerlegung eindeutig bestimmt ist<sup>24)</sup>, gilt also:

*Für den Rand eines Schnittelementes  $t$  der Zerlegung  $\mathfrak{Z}_4$  gilt*

$$t' = f_{2,1} \in \pi_3(\Gamma_3). \quad (19)$$

b) Die Gruppe  $\psi_3(\mathfrak{Z}_4)$  ist nach Nr. 10d) die von  $f_{2,1} \in \pi_3(\Gamma_3)$  erzeugte Untergruppe von  $\pi_3(\Gamma_3)$ , also zyklisch von unendlicher Ordnung

$$\psi_3(\mathfrak{Z}_4) = (f_{2,1}) \approx \mathfrak{G}.$$

Aus den Formeln (14) folgt ferner:

$$P_4 \pi_3(\Gamma_3) = 0,$$

da es sich nach (14), I um eine Untergruppe von  $\pi_3(S^4) = 0$  handelt; nach (14), II und III ist also

$$\pi_3(\Gamma_4) = \varphi_3(\mathfrak{Z}_4) \approx \pi_3(\Gamma_3)/\psi_3(\mathfrak{Z}_4).$$

Die Faktorgruppe von  $\pi_3(\Gamma_3)$  nach  $\psi_3(\mathfrak{Z}_4) = (f_{2,1})$  ist aber zyklisch von unendlicher Ordnung; das sieht man, wenn man als Basis des zwei-

---

<sup>24)</sup> [6], Nr. 10b.

gliedrigen Moduls  $\pi_3(\Gamma_3)$  statt  $f_{1,0}$  und  $f_{0,1}$  die Elemente  $f_{1,0}$  und  $f_{2,1}$  wählt (der Übergang wird durch die unimodulare Matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  vermittelt).

Also :

$$\pi_3(\Gamma_4) \approx \mathfrak{G} . \quad (20)$$

Wegen  $\pi_n(\Gamma_m) \approx \pi_n(\Gamma_{n+1})$  für alle  $m \geq n + 1$  (vgl. 10c) ist damit Satz VII, 1) bewiesen.

c) Nach Nr. 10d) gilt für die Untergruppe  $\psi_4(\mathfrak{B}_4)$  von  $\pi_4(\Gamma_3)$

$$\psi_4(\mathfrak{B}_4) = f_{2,1}\pi_4(\Sigma^3) , \quad f_{2,1} \in \pi_3(\Gamma_3) ;$$

da  $\pi_4(\Sigma^3) \approx \mathfrak{G}_2$  nur 2 Elemente besitzt, kann  $\psi_4(\mathfrak{B}_4)$  also höchstens 2 Elemente haben. Wir behaupten:

$$\psi_4(\mathfrak{B}_4) \approx \mathfrak{G}_2 . \quad (21)$$

Beweis:  $h \in \pi_4(\Sigma^3)$  sei die (einzige) Klasse wesentlicher Abbildungen von  $S^4$  auf  $\Sigma^3$ . Dann ist

$$f_{2,1} h = (f_{2,0} + f_{0,1})h ,$$

also nach Satz IV

$$f_{2,1} h = f_{2,0}h + f_{0,1} h .$$

Nach Satz V ist

$$P_3 f_{2,0} h = T_2 h = 2h = 0 ;$$

wegen

$$P'_3 f_{2,0} h = 0$$

ist also

$$f_{2,0} h = 0$$

und

$$f_{2,1} h = f_{0,1} h .$$

Ferner ist

$$P_2 P'_3 f_{0,1} h = p \in \pi_3(S^2)$$

die Hopf'sche Faserabbildung (bzw. ihre Klasse) von  $\Sigma^3$  auf  $S^2$  (vgl. Nr. 12c), also

$$P_2 P'_3 f_{0,1} h = ph \in \pi_4(S^2)$$

die Abbildung, die man erhält, wenn man die Sphäre  $S^4$  wesentlich auf  $\Sigma^3$  und dann  $\Sigma^3$  vermöge der Faserabbildung  $p$  auf  $S^2$  abbildet; diese Abbildung ist wesentlich; denn wenn  $F$  irgendeine wesentliche Abbildung auf  $\Sigma^3$  ist, so ist  $pF$  immer wesentlich<sup>25)</sup>. Also ist

$$ph \neq 0$$

---

<sup>25)</sup> s. [1], S. 118, oder [6], Satz C (Nr. 4).

und infolgedessen auch  $f_{0,1}h = f_{2,1}h \neq 0$ ;  $\psi_4(\mathfrak{Z}_4)$  enthält also 2 Elemente, q. e. d.

d) Nach (14), I ist

$$\pi_4(S^4)/P_4\pi_4(\Gamma_4) \approx \psi_3(\mathfrak{Z}_4) \approx \mathfrak{G} ;$$

das ist nur möglich, wenn

$$P_4\pi_4(\Gamma_4) = 0$$

ist. Somit ist

$$\pi_4(\Gamma_4) = \varphi_4(\mathfrak{Z}_4) \approx \pi_4(\Gamma_3)/\psi_4(\mathfrak{Z}_4) .$$

Nach 11 c) ist aber

$$\pi_4(\Gamma_3) \approx \pi_4(S^3) + \pi_4(\Gamma_2) \approx \pi_4(S^3) + \pi_4(S^3) \approx \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2 ,$$

weil  $\Gamma_2$  zum reellen projektiven Raum von 3 Dimensionen homöomorph ist und dessen Homotopiegruppen (außer der ersten) mit denen von  $S^3$  übereinstimmen<sup>26)</sup>. Wir erhalten also

$$\pi_4(\Gamma_4) \approx \mathfrak{G}_2 . \quad (22)$$

(Die Aussagen von Satz VII, 5) sind damit bewiesen.)

c) Wir können nun Satz VII, 2) beweisen. Nach (14), I ist nämlich

$$P_5 \pi_4(\Gamma_5) = 0 ,$$

also

$$\pi_4(\Gamma_5) = \varphi_4(\mathfrak{Z}_5) \approx \pi_4(\Gamma_4)/\psi_4(\mathfrak{Z}_5) .$$

$\psi_4(\mathfrak{Z}_5)$  kann also höchstens 2 Elemente enthalten; ich habe aber an anderer Stelle<sup>27)</sup> bewiesen, daß

$$\psi_4(\mathfrak{Z}_5) \neq 0$$

ist (das ist äquivalent damit, daß die Sphäre  $S^5$  nicht parallelisierbar ist); es muß also

$$\psi_4(\mathfrak{Z}_5) \approx \mathfrak{G}_2 \quad (23)$$

sein, und für  $\pi_4(\Gamma_5)$  folgt

$$\pi_4(\Gamma_5) = 0 , \quad (24)$$

also

$$\pi_4(\Gamma_m) = 0 \quad \text{für alle } m \geq 5 .$$

**16. Die fünfte Homotopiegruppe der  $\Gamma_m$ .** Wir beweisen in dieser Nummer Satz VII, 3) und 6).

a) Daß  $\pi_5(\Gamma_2) = 0$  ist, folgt aus

$$\pi_5(\Gamma_2) \approx \pi_5(S^3)$$

<sup>26)</sup> [1], Satz IV.

<sup>27)</sup> [6], Satz 27 (Korollar).

und dem Satze von Pontrjagin<sup>28)</sup>, daß jede Abbildung von  $S^5$  in  $S^3$  unwesentlich ist, ebenso

$$\pi_5(\Gamma_3) \approx \pi_5(S^3) + \pi_5(\Gamma_2) = 0 .$$

b) Nach (14), I und (21) ist

$$\pi_5(S^4)/P_4\pi_5(\Gamma_4) \approx \psi_4(\mathfrak{Z}_4) \approx \mathfrak{G}_2 ;$$

wegen  $\pi_5(S^4) \approx \mathfrak{G}_2$  ist also

$$P_4\pi_5(\Gamma_4) = 0 ,$$

also

$$\pi_5(\Gamma_4) = \varphi_5(\mathfrak{Z}_4) ;$$

aber  $\varphi_5(\mathfrak{Z}_4)$  ist einer Faktorgruppe von  $\pi_5(\Gamma_3) = 0$  isomorph, also

$$\pi_5(\Gamma_4) = 0 . \tag{25}$$

c) Nach (14), I und (23) ist

$$\pi_5(S^5)/P_5\pi_5(\Gamma_5) \approx \psi_4(\mathfrak{Z}_5) \approx \mathfrak{G}_2 ,$$

also

$$P_5\pi_5(\Gamma_5) = 2\pi_5(S^5) .$$

Andererseits ist aber

$$P_5\pi_5(\Gamma_5) \approx \pi_5(\Gamma_5)/\varphi_5(\mathfrak{Z}_5) ,$$

wobei

$$\varphi_5(\mathfrak{Z}_5) \approx \pi_5(\Gamma_4)/\psi_5(\mathfrak{Z}_5) = 0$$

ist, also

$$P_5\pi_5(\Gamma_5) \approx \pi_5(\Gamma_5) .$$

$$\pi_5(\Gamma_5) \approx 2\pi_5(S^5) \approx \mathfrak{G} , \tag{26}$$

und dieser Isomorphismus wird durch die Projektion  $P_5$  vermittelt. Jedes Element  $f \in \pi_5(\Gamma_5)$  ist also durch eine gerade Zahl charakterisiert, nämlich durch den Grad von  $P_5 f \in \pi_5(S^5)$ .

d) Ganz ähnlich wie in Nr. 13a) konstruieren wir ein *Schnittelement* der Zerlegung  $\mathfrak{Z}_6$  von  $\Gamma_6$  in Restklassen nach der Untergruppe  $\Gamma_5$  durch die Abbildung

$$\begin{aligned} t(x) &= (a_{ik}(x)) \in \Gamma_6 , \\ a_{ik}(x) &= \delta_{ik} - 2x_i x_k , \quad i = 1, \dots, 6 \quad k = 1, \dots, 7 \end{aligned}$$

(letzte Zeile  $i = 7$  durch die übrigen bestimmt) der Halbsphäre  $H^6$  :

$$\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 1 \quad , \quad x_1 \geq 0$$

---

<sup>28)</sup> Comptes Rendues de l'Acad. des Sc. de l'URSS., 1938, XIX, 5.

in die Gruppe  $\Gamma_6$ . Der Rand  $t'$  dieses Schnittelements ist gegeben durch die Abbildung von  $\Sigma^5(x_1 = 0)$  in  $\Gamma_5$ :

$$a_{ik}(x) = \delta_{ik} - 2x_i x_k, \quad \begin{array}{l} i = 2, \dots, 6 \\ k = 2, \dots, 7 \end{array}$$

und die Abbildung  $P_5 t'$  von  $\Sigma^5$  auf  $S^5$

$$a_{2k}(x) = \delta_{2k} - 2x_2 x_k, \quad k = 2, \dots, 7$$

hat den Grad 2; folglich ist  $t' \in \pi_5(\Gamma_5)$  nach (26) ein erzeugendes Element von  $\pi_5(\Gamma_5)$ . Andererseits ist  $\psi_5(\Gamma_6)$  die von  $t'$  erzeugte Untergruppe von  $\pi_5(\Gamma_5)$ , also

$$\psi_5(\mathcal{B}_6) = \pi_5(\Gamma_5), \quad (27)$$

und aus den Formeln (14) folgt:

$$\begin{aligned} P_6 \pi_5(\Gamma_6) &= 0, \\ \pi_5(\Gamma_6) &= \varphi_5(\mathcal{B}_6) \approx \pi_5(\Gamma_5) / \psi_5(\mathcal{B}_6), \end{aligned}$$

also

$$\pi_5(\Gamma_6) = 0. \quad (28)$$

Damit ist Satz VII in allen Teilen bewiesen.

#### L I T E R A T U R :

- [1] *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen I, Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), 112—119.
- [2] *H. Freudenthal*, Über die Klassen der Sphärenabbildungen, Comp. math. V, 299—314.
- [3] *H. Hopf*, Über die Topologie der Gruppenmannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen, Annals of Math. 42 (1941).
- [4] *H. Hopf*, Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. math. XXV (1935), 427—440.
- [5] *H. Hopf*, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann. 104 (1931), 637—714.
- [6] *B. Eckmann*, Zur Homotopietheorie gefaseter Räume, Commentarii mathematici helvetici 14 (1942).
- [7] *E. Stiefel*, Richtungsfelder und Fernparallelismus in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comm. math. helv. 8 (1935), 3 — 51.

(Eingegangen den 17. Juni 1941.)