Die Klassen der Abbildungen der n-dimensionalen Polyeder auf die n-dimensionale Sphäre.

Autor(en): **Hopf, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **5 (1933)**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-6654

Die Klassen der Abbildungen der *n*-dimensionalen Polyeder auf die *n*-dimensionale Sphäre

Von Heinz Hopf, Zürich

1. Eine Behauptung von Brouwer und ihre Modifikation

Der *Grad* einer Abbildung f einer n-dimensionalen geschlossenen orientierten Mannigfaltigkeit μ auf eine ebensolche Mannigfaltigkeit μ' besitzt die wichtige Eigenschaft, bei stetiger Abänderung von f ungeändert zu bleiben[1]; mit andern Worten: zwei Abbildungen f und g von μ auf μ', welche zu einer „Abbildungsklasse" gehören, haben denselben Grad. Brouwer hat auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Cambridge 1912 die Behauptung ausgesprochen, daß „*in vielen Fällen*" die Umkehrung dieses Satzes gelte, also aus der Gleichheit der Grade zweier Abbildungen ihre Zugehörigkeit zu einer Klasse folge[2]. Er hat gleichzeitig einen Beweis seiner Behauptung für den Fall angegeben, in dem μ und μ' Kugelflächen sind; dann hat er ihre Gültigkeit für den allgemeineren Fall erwiesen, in dem zwar μ' eine Kugel, μ aber eine beliebige Fläche ist[3], und später habe ich gezeigt, daß dieser letzte Satz für beliebige Dimensionenzahl richtig ist, daß also $\mu = M^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\mu' = S^n$ die n-dimensionale Sphäre sein darf[4].

In der vorliegenden Arbeit soll nun gezeigt werden, daß der Gültigkeitsbereich der Brouwerschen Behauptung noch weiter ist, falls man sich nicht genau an ihren Wortlaut hält, sondern sie einer Modifikation unterzieht, die mir überdies, worüber nachher (Nr. 2) noch einige Worte gesagt werden sollen, die prinzipielle Bedeutung der Behauptung und der an sie anschließenden Sätze in ein klareres Licht zu setzen scheint.

In der neuen Erweiterung soll wieder $\mu' = S^n$ die n-dimensionale Sphäre, $\mu = P^n$ aber soll ein beliebiges n-dimensionales Polyeder sein. Dann hat eine Abbildung f von P^n auf S^n keinen Grad im ursprünglichen

---

1) *Brouwer*, Ueber Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71 (1912).

2) *Brouwer*, Sur la notion de «classe» de transformations d'une multiplicité, Proc. V. Intern. Congress of Math. (Cambridge 1912), vol. II.

3) *Brouwer*, Over één-éénduidige continue transformaties..., Akad. Amsterdam, Versl. 21 (1913); Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen, Math. Annalen 82 (1921).

4) Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 96 (1926).

Sinn. Die Modifikation, die man hier vorzunehmen hat, ist durch die Begriffsbildungen der algebraisch-kombinatorischen Topologie in natürlicher Weise gegeben. Ist Z^n ein n-dimensionaler Zyklus[5]) in P^n, so ist sein Bild $f(Z^n)$ ein n-dimensionaler Zyklus in S^n; aber die einzigen n-dimensionalen Zyklen in S^n sind die S^n selbst und ihre Vielfachen; daher gibt es eine ganze Zahl c so, daß $f(Z^n) = c \cdot S^n$ ist. Falls P^n eine Mannigfaltigkeit ist, ist c der Brouwersche Grad; wir nennen c auch jetzt den Grad von $f(Z^n)$. Die zu den verschiedenen Zyklen Z^n in P^n gehörigen Grade sind innerhalb der durch f bestimmten Abbildungsklasse konstant. Ihre Betrachtung reicht jedoch für unsern Zweck, die Aufstellung eines vollen Invariantensystems der Abbildungsklasse, nicht aus; das sieht man schon im Falle $n = 2$, wenn man für P^2 die projektive Ebene nimmt: dann ist in P^2 überhaupt kein Z^2 vorhanden, und es gibt trotzdem zwei Abbildungsklassen; diese kann man aber durch ihre „Parität" oder den „Abbildungsgrad mod. 2" voneinander unterscheiden, und daran erkennt man, wie man im allgemeinen Fall fortzufahren hat: es sei Z^n_m ein Zyklus mod. m mit irgend einem ganzen $m > 1$ [5]); dann ist sein Bild $f(Z^n_m)$ ein Zyklus mod. m in S^n, und daraus folgt, ähnlich wie oben, daß es eine, mod. m eindeutig bestimmte Zahl c so gibt, daß $f(Z^n_m) \equiv c\, S^n$ ist. Diese Zahl c, der „Grad mod. m" von $f(Z^n_m)$, bleibt ebenfalls in der Klasse konstant. Alle diese Grade und Grade mod. m mit beliebigen $m > 1$, die zu den, in P^n in endlicher Anzahl vorhandenen, n-dimensionalen Zyklen und Zyklen mod. m gehören, bilden nun aber — das ist die Erweiterung der Brouwerschen Behauptung, die hier bewiesen werden soll, — ein volles Invariantensystem der Abbildungsklasse; es gilt also

Satz I. *Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei Abbildungen f und g von P^n auf S^n zu einer Klasse gehören, ist die Bedingung, daß jeder n-dimensionale Zyklus bezw. Zyklus mod. m (mit beliebigem $m > 1$) aus P^n durch f mit demselben Grade bezw. Grade mod. m abgebildet wird wie durch g.*

Der Beweis dieses Satzes wird in Nr. 3—5 geliefert werden[6]).

[5]) Ein Zyklus ist ein unberandeter Komplex, ein n-dimensionaler Zyklus mod. m ein Komplex, in dessen Rande jedes $(n - 1)$-dimensionale Simplex mit einer durch m teilbaren Vielfachheit vorkommt. Die Grundtatsachen aus der kombinatorischen Topologie und aus der Topologie der stetigen Abbildungen werden als bekannt vorausgesetzt.

[6]) Den Spezialfall, in dem g eine Abbildung auf einen einzigen Punkt von S^n ist, habe ich bereits früher bewiesen: Ueber wesentliche und unwesentliche Abbildungen von Komplexen, Moskauer Mathematische Sammlung, 1930 (Satz II). Die dortige Methode reicht auch zum Beweis des obigen Satzes I aus, jedoch scheint mir für diesen Zweck die in der vorliegenden Arbeit verwendete Zurückführnng auf einen „Erweiterungssatz" (Nr. 3) den Vorzug zu verdienen.

2. Verallgemeinerung der Fragestellung; Klassen und algebraische Typen von Abbildungen

Die Verwendung von Begriffen der algebraisch-kombinatorischen Topologie, wie sie für die Formulierung des Satzes I notwendig war, führt, wenn man sie konsequent weiter treibt, zu der allgemeinen Problemstellung, in deren Rahmen erst die tiefere Bedeutung der Brouwerschen Behauptung sichtbar wird. Wenn man nämlich zwei beliebige Polyeder P, Q und die Gesamtheit der stetigen Abbildungen von P auf Q betrachtet, so gibt es zwei, ihrem Wesen nach voneinander verschiedene, Gesichtspunkte, unter denen man versuchen kann, in diese Gesamtheit Ordnung zu bringen, die Abbildungen also zu klassifizieren: erstens eben den rein topologischen Begriff der „Abbildungsklasse", wonach zwei Abbildungen f und g zusammengehören, wenn man die eine stetig in die andere überführen kann; zweitens den, auf den Grundbegriffen der algebraischen Topologie, den Begriffen der Berandung und der Homologie, beruhenden Begriff des „algebraischen Abbildungstypus", den wir folgendermaßen definieren: f und g gehören zu einem algebraischen Typus, wenn von jedem Zyklus $Z \subset P$ die beiden Bilder $f(Z)$ und $g(Z)$, die ja als Zyklen in Q aufzufassen sind, einander homolog sind, und wenn das Gleiche für die Zyklen mod. m gilt, wobei man natürlich den Begriff der gewöhnlichen Homologie durch den der „Homologie mod. m" zu ersetzen hat. Man kann noch ein drittes Klassifikationsprinzip hinzufügen, indem man anstelle der Homologiegruppen die Fundamentalgruppe betrachtet, doch soll darauf hier nicht eingegangen werden[7]). Die Dimensionen von P und Q sind für diese Begriffe ganz unwesentlich, sie brauchen nicht einander gleich zu sein. Ist Q n-dimensional, so fällt für die n-dimensionalen Zyklen und Zyklen mod. m in Q der Begriff der Homologie bezw. Homologie mod. m mit dem der Gleichheit bezw. Kongruenz mod. m zusammen; in diesem Fall wird daher der algebraische Typus einer Abbildung, soweit er die n-dimensionalen Zyklen in P und Q betrifft, vollständig durch die Angabe der Grade und Grade mod. m beschrieben; ist speziell $Q = S^n$, so ist für $0 < r < n$ jeder r-dimensionale Zyklus oder Zyklus mod. m in S^n homolog 0, so daß diese Zyklen kein Unterscheidungsmerkmal für die Abbildungstypen liefern; mithin sind dann die Grade und Grade mod. m die einzigen Merkmale der Typen. Daher kann man den Satz I auch so aussprechen:

Satz I'. *Ist P ein n-dimensionales Polyeder, Q die n-dimensionale*

[7]) Man vergl. etwa den §2 meiner Arbeit: Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, II. Teil, Math. Annalen 102 (1929).

Sphäre, so gehören zwei Abbildungen von P auf Q dann und nur dann zu einer Klasse, wenn sie denselben algebraischen Typus haben.

Der eine Teil dieses Satzes ist insofern trivial, als bei *beliebigen* P und Q zwei Abbildungen, die zu einer Klasse gehören, stets denselben algebraischen Typus besitzen, da ein Zyklus $f(Z)$ in Q, wenn man ihn stetig abändert, immer in derselben Homologieklasse bleibt. Die Einteilung aller Abbildungen in Klassen ist also im allgemeinen, jedenfalls *begrifflich, feiner* als die nach algebraischen Typen; dafür, daß sie auch *tatsächlich* feiner sein kann, gibt es Beispiele, von denen nachher noch die Rede sein soll; im allgemeinen reichen somit die *Homologie*-Begriffe nicht aus, um die Klassifikation der Abbildungen nach dem rein topologischen Standpunkt der „*Homotopie*", d. h. der stetigen Überführbarkeit, durchzuführen. Das ist auch gar nicht zu erwarten, denn der Begriff der Homologie hat kaum etwas mit stetiger Abänderung zu tun; andererseits spielt der Homologiebegriff — und zwar gerade infolge der Entwicklung während der letzten Jahre — eine so beherrschende Rolle in fast allen Gebieten der Topologie, daß die Frage nach den „Ausnahmefällen" gerechtfertigt ist, in denen er doch dasselbe leistet wie die Homotopie; das sind, für unser Problem, die Fälle, in denen für zwei Abbildungen aus der Gleichheit des algebraischen Typus folgt, daß sie sich stetig ineinander überführen, daß sie sich also auch unter dem Gesichtspunkt der Homotopie nicht voneinander unterscheiden lassen. Wenn man nun die eingangs zitierte Behauptung Brouwers weiter — allerdings recht kräftig — modifiziert, so kann man sie so aussprechen: es gibt eine große Menge von Ausnahmen der eben genannten Art; und der Satz I gibt eine wichtige Klasse aus dieser Menge an. Behauptung und Satz gehören also in den allgemeinen Problemkreis, in dem es sich um die Zusammenhänge zwischen Homologie und Homotopie, genauer: um den *Einfluß von Berandungs- und Homologieeigenschaften auf Homotopieeigenschaften*, handelt[8]).

Es sei nun noch etwas über die „allgemeinen" Fälle gesagt, in denen P und Q so beschaffen sind, daß die Einteilung in Klassen wirklich feiner ist als die Einteilung nach algebraischen Typen, Bleiben wir zunächst dabei, daß $Q = S^n$ ist; (das ist für alle Anwendungen der wichtigste Fall;) ist dann P ein r-dimensionales Polyeder und $r < n$, so bleibt der Satz I trivialerweise noch richtig, denn dann gibt es nur eine Klasse, — da man das Bild $f(P)$ stetig auf einen Punkt zusammenziehen kann,

[8]) Daß der in Satz I, in seiner in Nr. 1 gegebenen Formulierung, benutzte Begriff des Grades zu den Berandungseigenschaften gehört, ist klar: er benutzt ja den auf dem Begriff des Randes beruhenden Begriff des Zyklus (man vergl.[5])).

— und a fortiori nur einen Typus; wir befinden uns also noch bei einem „Ausnahmefall"; ist dagegen $r > n$, so zeigt das Beispiel $P = S^3$, $Q = S^2$, daß der Satz I nicht für alle P gilt: es gibt dann offenbar nur einen einzigen algebraischen Typus, da jeder 1- oder 2-dimensionale Zyklus ~ 0 in S^3, sein Bild daher ~ 0 in S^2 ist, dagegen, wie ich gezeigt habe, unendlich viele Klassen[9]). Ist Q keine Sphäre, so ist es leichter, Beispiele zu finden, in denen ein Typus mehrere Klassen enthält; solche erhält man bereits, wenn P und Q geschlossene orientierbare Flächen von Geschlechtern > 0 sind; jedoch reicht in diesem Fall zur Bestimmung der Abbildungsklassen die oben kurz erwähnte Betrachtung der Fundamentalgruppe aus[10]). Aber auch diese versagt z. B. in folgendem Fall: P sei eine Kugelfläche, Q eine projektive Ebene, f die Abbildung von P auf Q, die sich ergibt, wenn man P als zweiblättrige unverzweigte Überlagerungsfläche von Q auffaßt, g die Abbildung, die P auf einen einzigen Punkt von Q abbildet; dann sieht man leicht, daß f und g zwar denselben algebraischen Typus besitzen, aber zu verschiedenen Klassen gehören[11]).

Demnach scheint sich der Satz I nicht auf eine wesentlich größere Gesamtheit von Paaren P, Q ausdehnen zu lassen, es sei denn, daß man neben Polyedern auch andere abgeschlossene Mengen in Betracht zieht[12]).

Abgesehen von diesen prinzipiellen Gesichtspunkten hat der Satz I auch praktischen Wert insofern, als man mit seiner Hilfe alle Abbildungsklassen von P^n auf S^n wirklich aufzählen kann, wenn man die kombinatorisch-topologische Struktur von P^n kennt; denn der Satz besagt ja, daß man nur die algebraischen Typen aufzuzählen hat, und das ist eine leichte, im wesentlichen algebraische, Aufgabe, die in Nr. 6 gelöst wird.

3. Zurückführung des Hauptsatzes (Satz I) auf einen „Erweiterungssatz" (Satz II).

Daß die im Satz I genannte Bedingung für die Zugehörigkeit von f und g zu einer Klasse notwendig ist, ist, wie schon mehrfach erwähnt,

[9]) Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Annalen 104 (1931).

[10]) *Brouwer*, wie unter [3]) (Aufzählung..., „Vierter Hauptfall"); *Hopf*, Beiträge zur Klassifizierung der Flächenabbildungen, Crelles Journal 165 (1931).

[11]) In der Terminologie meiner unter [7]) zitierten Arbeit hat der „Absolutgrad" von f den Wert 2, von g den Wert 0; da er (a. a. O. § 2) in der Klasse konstant ist, gehören f und g zu verschiedenen Klassen.

[12]) Die Antwort auf die Frage, ob die Abbildungen einer abgeschlossenen Menge F auf die S^n mehr als eine Klasse bilden, ist für wichtige geometrische Eigenschaften von F ausschlaggebend: *Alexandroff*, Dimensionstheorie, Math. Annalen 106 (1932), Nr. 81 („5. Hauptsatz"); *Borsuk*, Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume, Math. Annalen 106 (1932).

bekannt, da der Grad einer Abbildung $f(Z^n)$ und ebenso ein Grad mod. m sich bei stetiger Abänderung von f nicht ändert. Zu beweisen ist, daß die Bedingung hinreicht, daß es also, wenn sie erfüllt ist, eine Schar f_t von Abbildungen von P^n auf S^n gibt, die für $0 \leq t \leq 1$ stetig von t abhängt und in der $f_0 = f$, $f_1 = g$ ist. Zum Zweck des Beweises deuten wir eine solche Schar folgendermaßen. P^{n+1} sei das „Produkt" von P^n mit einer Strecke der Länge 1; dieses Produkt können wir so konstruieren: wir denken uns den euklidischen Raum R^N, in dem P^n liegt, im R^{N+1} gelegen und errichten nach einer bestimmten der beiden Seiten von R^N die Senkrechten auf R^N in allen Punkten p von P^n; p_t sei der Punkt, der auf der in p errichteten Senkrechten im Abstand t von p liegt; die Menge aller p_t mit $0 \leq t \leq 1$ ist das Produkt. Es ist ein $(n+1)$-dimensionales Polyeder P^{n+1}.

Die Punkte $p = p_0$ bilden das Polyeder $P^n = P_0^n$, die Punkte p_1 ein mit P^n kongruentes Polyeder P_1^n; unter $\bar{P}$ verstehen wir das Polyeder $P_0^n + P_1^n$. Üben wir die Abbildung f auf P_0^n, die Abbildung g mittels der Festsetzung $g(p_1) = g(p)$ auf P_1^n aus, so liegt eine Abbildung F von $\bar{P}$ auf S^n vor. Wenn wir F zu einer Abbildung des ganzen Polyeders P^{n+1} auf S^n erweitern können, so sind wir fertig; denn dann brauchen wir nur $f_t(p) = F(p_t)$ zu setzen, um eine Schar der gewünschten Art zu erhalten. Die *Behauptung* lautet also: *die Abbildung $F(\bar{P})$ läßt sich zu einer Abbildung $F(P^{n+1})$ erweitern.*

Wie lautet jetzt, unter Verwendung von P^{n+1}, $\bar{P}$ und F die *Voraussetzung* des Satzes I? Ich behaupte, daß sie folgendermaßen lautet: *jeder in $\bar{P}$ gelegene n-dimensionale Zyklus oder Zyklus mod. m, der ~ 0 bezw. ~ 0 mod. m in P^{n+1} ist, wird durch F mit dem Grade 0 abgebildet.*

In der Tat: ist $Z^n \subset \bar{P}$, so zerfällt Z^n in zwei zu einander fremde Teile $X_0^n \subset P_0^n$, $Y_1^n \subset P_1^n$; da Z^n unberandet ist, haben sie selbst keine Ränder, sind also Zyklen. Ist Y_0^n der Y_1^n entsprechende Zyklus in P_0^n, so ist $Y_0^n \sim Y_1^n$ in P^{n+1}, da offenbar $Y_1^n - Y_0^n$ der Rand des $(n+1)$-dimensionalen Produktes von Y_0^n mit der t-Strecke ist. Folglich ist $Z^n = X_0^n + Y_1^n \sim X_0^n + Y_0^n$ in P^{n+1}, und da wir voraussetzen, daß $Z^n \sim 0$ ist, ist daher auch der in P_0^n gelegene Zyklus $X_0^n + Y_0^n \sim 0$ in P^{n+1}. K sei ein von $X_0^n + Y_0^n$ berandeter Komplex, K_0 seine Projektion auf P_0^n, (die man erhält, indem man für jeden Punkt $p_t \subset K$ t durch 0 ersetzt); da bei dieser Projektion (wie bei jeder simplizialen Abbildung) der Rand von K in den Rand des Bildes K_0 übergeht, der Rand $X_0^n + Y_0^n$ von K aber fest bleibt, ist $X_0^n + Y_0^n$ der Rand von K_0; also ist $X_0^n + Y_0^n \sim 0$ in P_0^n, und da P_0^n ebenso wie X_0^n und Y_0^n n-dimensional ist, bedeutet das: $X_0^n + Y_0^n = 0$, also $X_0^n = -Y_0^n$. Da mithin

$Z^n = Y_1^n - Y_0^n$ ist, gilt bei der Abbildung: $F(Z^n) = F(Y_1^n) - F(Y_0^n) = g(Y_0^n) - f(Y_0^n)$, und da nach Voraussetzung $f(Y_0^n)$ und $g(Y_0^n)$ den gleichen Grad, etwa c, haben: $F(Z^n) = cS^n - cS^n = 0$; das bedeutet, daß $F(Z^n)$ den Grad 0 hat. Diese Betrachtung gilt in gleicher Weise für gewöhnliche Zyklen und Homologien wie mod. m. Damit ist bewiesen, daß die Voraussetzung des Satzes I jetzt in der angegebenen Form ausgesprochen werden kann.

Somit ist der Satz I auf den folgenden allgemeineren „Erweiterungssatz" zurückgeführt[13]), in dem P^{n+1} irgend ein $(n+1)$-dimensionales Polyeder ist:

Satz II. *In einem Teilpolyeder*[14]) $\overline{P}$ *des* $(n+1)$*-dimensionalen Polyeders* P^{n+1} *sei eine Abbildung* F *auf die* S^n *gegeben; für jeden* n*-dimensionalen Zyklus (und Zyklus mod.* m*)* $Z^n \subset \overline{P}$*, welcher* ~ 0 *(bezw.* ~ 0 *mod.* m*) in* P^{n+1} *ist, sei der Grad (bezw. Grad mod.* m*) gleich (bezw. kongruent) 0. Dann läßt sich* F *zu einer Abbildung des ganzen* P^{n+1} *auf die* S^n *erweitern*[15]).

Daß die in der Voraussetzung des Satzes ausgedrückte Bedingung für die Erweiterbarkeit von F zu einer Abbildung von P^{n+1} nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, ist klar: wenn $F(P^{n+1})$ existiert und wenn $Z^n \sim 0$ in P^{n+1}, also der Rand eines $K \subset P^{n+1}$ ist, so ist $F(Z^n)$ der Rand von $F(K)$, also ~ 0 auf S^n, also $= 0$; das Analoge gilt mod. m.

Der einfachste Spezialfall des Satzes II ist

Satz II'. *Ist auf dem Rande eines* $(n+1)$*-dimensionalen Simplexes eine Abbildung* F *vom Grade 0 auf die* S^n *gegeben, so läßt sich* F *zu einer Abbildung des ganzen Simplexes auf die* S^n *erweitern.*

Dieser Satz, den ich früher bewiesen habe[16]), bildet den wesentlichen topologischen Bestandteil beim Beweise des Satzes II; es müssen aber, wie schon die im Satz II vorkommenden Begriffe der Zyklen und Zyklen mod. m vermuten lassen, noch algebraische Bestandteile hinzukommen; auch diese werden sich auf die Erweiterungen gewisser Abbildungen, nämlich homomorpher Gruppenabbildungen, beziehen.

---

13) Der Zusammenhang zwischen Sätzen über Abänderungen von Abbildungen mit Sätzen über Erweiterungen spielt in der unter 12) zitierten Arbeit von Borsuk eine wesentliche Rolle; man vergl. auch die §§ 5, 6 meiner unter 4) genannten Arbeit.

14) Ein „Teilpolyeder" $\overline{P}$ eines Polyeders P soll stets aus Simplexen einer gegebenen Simplexzerlegung von P bestehen; die Dimension von $\overline{P}$ ist beliebig.

15) Man überzeugt sich leicht davon, daß man die auf die gewöhnlichen Zyklen bezügliche Voraussetzung sparen kann, da sie in der auf die Zyklen mod. m bezüglichen enthalten ist.

16) Wie unter 4); ein Beweis von II' ist dort im letzten Abschnitt der S. 224 enthalten.

4. Algebraische Hilfssätze

Die hier vorkommenden Gruppen sind Abelsch, werden von endlich vielen ihrer Elemente erzeugt und enthalten keine Elemente endlicher Ordnung; die Gruppenoperation bezeichnen wir als Addition. Die Gruppe G heißt, wie üblich, direkte Summe ihrer Untergruppen U, V — geschrieben: $G = U + V$ — wenn sich jedes von 0 verschiedene Element auf eine und nur eine Weise in der Form $u + v$ mit $u \subset U$, $v \subset V$ darstellen läßt, oder, was dasselbe ist, wenn 1) jedes Element wenigstens eine Darstellung $u + v$ besitzt, und wenn 2) U und V nur das Nullelement gemeinsam haben. Analog ist die direkte Summe von mehr als zwei Gruppen definiert. Jede der hier betrachteten Gruppen ist bekanntlich direkte Summe von endlich vielen unendlichen zyklischen Gruppen; d. h. jedes Element läßt sich auf eine und nur eine Weise in der Form $\Sigma\, a_i\, x_i$ darstellen, wenn die x_i erzeugende Elemente dieser Zyklen, die a_i ganze Zahlen sind. — Die Untergruppe U von G heiße „abgeschlossen", wenn sie folgende Eigenschaft hat: ist m eine von 0 verschiedene ganze Zahl, x ein Element von G und $mx \subset U$, so ist auch $x \subset U$. — Unter einem „Charakter" von G verstehen wir eine homomorphe Abbildung von G in die additive Gruppe der ganzen Zahlen.

a) Ist U abgeschlossene Untergruppe von G, so ist G direkte Summe von U und einer anderen Untergruppe V.

Beweis: Die Restklassengruppe (Faktorgruppe) R von G nach U ist Abelsch; sie wird von endlich vielen ihrer Elemente erzeugt; (als solche kann man die Restklassen wählen, die die Elemente eines Erzeugendensystems von G enthalten); sie enthält ferner infolge der Abgeschlossenheit von U kein Element endlicher Ordnung. Sie ist daher direkte Summe unendlicher Zyklen; X_i seien Restklassen, die diese Zyklen erzeugen, x_i irgendwelche Elemente aus den X_i $(i = 1, \ldots, r)$, V sei die von diesen x_i erzeugte Gruppe. Ist y irgend ein Element von G, Y die y enthaltende Restklasse, so ist Y in R von der Form $Y = \Sigma\, a_i\, X_i$, also ist $y = \Sigma\, a_i\, x_i + u$ mit $u \subset U$, also $y = u + v$ mit $u \subset U$, $v \subset V$. Ist $u_0 \subset U$ und $u_0 \subset V$, so ist $u_0 = \Sigma\, c_i\, x_i$, also in $R: 0 = \Sigma\, c_i\, X_i$; folglich ist $c_i = 0$, $u_0 = 0$. Mithin ist $G = U + V$.

b) Ein in einer abgeschlossenen Untergruppe U von G gegebener Charakter läßt sich stets zu einem Charakter von G erweitern.

Beweis: Man stelle G gemäß a) in der Form $U + V$ dar und setze fest, daß der Charakter für alle Elemente von V den Wert 0 hat.

c) Dafür, daß ein in einer beliebigen Untergruppe U von G gegebener Charakter χ zu einem Charakter von G erweitert werden kann, ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: ist x ein Element von G, m eine ganze Zahl, und ist $mx = u \subset U$, so ist $\chi(u)$ durch m teilbar.

Beweis: Die Bedingung ist notwendig, da, wenn χ auf G erweitert ist, $\chi(x)$ definiert ist und $\chi(u) = m \cdot \chi(x)$ wird. — Die Bedingung sei erfüllt. Unter $\overline{U}$ verstehen wir die Gesamtheit der Elemente x, welche Vielfache mx in U besitzen; sie bilden eine Gruppe, da mit x auch $-x$ in $\overline{U}$ ist, und da aus $mx \subset U$, $ny \subset U$ folgt: $mn(x+y) \subset U$. Die Gruppe $\overline{U}$ ist ex definitione abgeschlossen. Daher läßt sich nach b) der Charakter, falls er sich auf $\overline{U}$ erweitern läßt, auch auf G erweitern. Wir haben also χ auf $\overline{U}$ auszudehnen. Ist $mx = u \subset U$, so setzen wir $\chi(x) = \frac{1}{m}\chi(u)$; das ist nach Voraussetzung eine ganze Zahl. $\chi(x)$ ist auf diese Weise eindeutig bestimmt; denn ist außerdem $m'x = u' \subset U$, so ist $mu' = m'u$, also $m \cdot \chi(u') = m' \cdot \chi(u)$, also $\frac{1}{m'}\chi(u') = \frac{1}{m}\chi(u)$. Diese somit in $\overline{U}$ eindeutige Funktion ist ein Charakter; denn ist $mx = u_1$, $ny = u_2$, so ist $mn(x+y) = nu_1 + mu_2 \subset U$, also $\chi(x+y) = \frac{1}{m}\chi(u_1) + \frac{1}{n}\chi(u_1) = \chi(x) + \chi(y)$.

d) U und V seien Untergruppen von G; in U sei ein Charakter χ gegeben. Dafür, daß sich χ derart auf G erweitern läßt, daß er in allen Elementen von V den Wert 0 erhält, ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: ist x ein Element von G, m eine ganze Zahl, v ein Element von V, und ist $mx + v = u \subset U$, so ist $\chi(u)$ durch m teilbar.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist wieder ohne weiteres klar: wenn ein Charakter χ mit den genannten Eigenschaften in G existiert, so ist $\chi(mx+v) = m \cdot \chi(x) + \chi(v) = m \cdot \chi(x)$. — Die Bedingung sei erfüllt. Ist $z = u = v$ ein Element aus dem Durchschnitt D von U und V, so ist, wenn x_0 das Nullelement von G bezeichnet, $u = mx_0 + v$ mit beliebigem m, also nach Voraussetzung $\chi(u)$ durch jedes m teilbar, also $\chi(u) = \chi(z) = 0$ für jedes $z \subset D$. W sei die von U und V erzeugte Gruppe, also die Gesamtheit aller Elemente $u + v$. Wir erweitern χ zunächst auf W, indem wir festsetzen: $\chi(u+v) = \chi(u)$; diese Festsetzung ist eindeutig; denn ist $u + v = u' + v'$, so ist $u - u' = v' - v = z \subset D$, also $\chi(z) = 0$, d. h. $\chi(u) = \chi(u')$. Daß diese somit in W eindeutig erklärte Funktion ein Charakter ist und in allen Elementen von V den Wert 0 hat, ist klar. Ist nun $x \subset G$, m eine ganze Zahl und $mx \subset W$, so ist $mx = w = u + v$, $u = mx - v$, also nach Voraussetzung $\chi(u)$ durch m teilbar, also, da $\chi(w) = \chi(u)$ ist, $\chi(w)$ durch m teilbar. Daher läßt sich nach c) χ auf die ganze Gruppe G erweitern.

5. Beweis des Satzes II

Wir machen zunächst die spezielle Annahme, daß die in $\overline{P}$ gegebene Abbildung F simplizial sei. Dabei ist eine feste Simplexzerlegung von P^{n+1}, und damit auch von $\overline{P}$, zugrunde gelegt. Für diese Zerlegung sei G die Gruppe der n-dimensionalen Komplexe in P^{n+1}, d. h. der Linearformen mit ganzen Koeffizienten in den orientierten n-dimensionalen Simplexen, die wir mit x_i^n bezeichnen; U sei die Gruppe der zu $\overline{P}$ gehörigen n-dimensionalen Komplexe, V die Gruppe der n-dimensionalen Ränder in P^{n+1}, d. h. derjenigen Zyklen, welche $(n+1)$-dimensionale Komplexe beranden; U und V sind Untergruppen von G. τ^n sei ein festes n-dimensionales Simplex der bei der simplizialen Abbildung F benutzten Zerlegung von S^n. Jedes x_i^n aus $\overline{P}$, das durch F auf τ^n abgebildet wird, hat dabei den Grad $+1$ oder -1; wir nennen ihn $\chi(x_i^n)$; für diejenigen x_i^n aus $\overline{P}$, die nicht auf dieses T^n abgebildet werden, setzen wir $\chi(x_i^n) = 0$. Für einen beliebigen Komplex $x^n = \Sigma a_i x_i^n$ aus $\overline{P}$ hat dann F in dem Simplex τ^n den Grad $\chi(x^n) = \Sigma a_i \chi(x_i^n)$. χ ist ein Charakter in der Gruppe U. Ich behaupte, daß er in bezug auf die Gruppen G, U und V die Voraussetzungen des Hilfssatzes d) aus Nr. 4 erfüllt. In der Tat: ist, in der Bezeichnung von d), $mx + v = u$, so bedeutet das jetzt: der in $\overline{P}$ gelegene, n-dimensionale Komplex u ist mod. m einem Rande v in P^{n+1} kongruent, er ist also ein Zyklus mod. m, der ~ 0 mod. m in P^{n+1} ist; dann ist nach der Voraussetzung des Satzes II der Grad mod. m seines Bildes $F(u)$ Null; das gilt insbesondere in dem Simplex τ^n von S^n, und das bedeutet in unserer neuen Ausdrucksweise: $\chi(u) \equiv 0$ mod. m. Da somit die Voraussetzung von d) erfüllt ist, gilt auch die Behauptung, und wir können daher χ auf die Gruppe G aller n-dimensionalen Komplexe von P^{n+1} so erweitern, daß dieser Charakter für jeden Rand v den Wert 0 hat.

Nachdem damit die algebraischen Vorbereitungen erledigt sind, wird die gewünschte Ausdehnung von $F(\overline{P})$ auf das ganze Polyeder P^{n+1} in zwei Schritten vorgenommen werden: 1) Q sei das Polyeder, das aus allen nicht zu $\overline{P}$ gehörigen n-dimensionalen Simplexen von P^{n+1} besteht; dann wird F derart auf $\overline{P} + Q$ ausgedehnt, daß für jedes Simplex x_i^n

von $P^{n+1}\chi(x_i^n)$ der Grad des Bildes $F(x_i^n)$ in dem Simplex T^n ist; (dabei wird $F(Q)$ im allgemeinen nicht mehr simplizial sein); 2) die Abbildung $F(\bar{P}+Q)$ wird zu einer Abbildung $F(P^{n+1})$ erweitert.

Wir zeigen zunächst, wie man den zweiten Schritt vornimmt, wenn der erste bereits ausgeführt ist: da $\chi(x_i^n)$ der Grad in τ^n für jedes Simplex x_i^n ist, ist $\Sigma a_i \chi(x_i^n) = \chi(x)$ der Grad in T^n bei der Abbildung des Komplexes $x = \Sigma a_i x_i^n$; das gilt insbesondere, wenn $x = v$ ein Rand ist; für einen solchen ist der Grad daher $\chi(v) = 0$, und zwar ist dies, da v ein Zyklus ist, nicht nur der Grad in τ^n, sondern der Grad der Abbildung $F(v)$ schlechthin. Ist nun y^{n+1} ein (nicht zu $\bar{P}$ gehöriges) $(n+1)$-dimensionales Simplex von P^{n+1}, so läßt sich, da sein Rand v mit dem Grade 0 abgebildet wird, diese Abbildung F auf Grund des Satzes II′ auf y^{n+1} ausdehnen. Tun wir dies für jedes y^{n+1}, so erhalten wir die gewünschte Abbildung von P^{n+1}.

Die Ausführung des ersten Schrittes, die nun noch nachzuholen ist, ist ganz elementar und unabhängig von dem Satz II′ und den algebraischen Betrachtungen. Im Inneren jedes n-dimensionalen Simplexes x_i^n von Q wählen wir ein System von zueinander fremden n-dimensionalen Teilsimplexen in der Anzahl $|\chi(x_i^n)|$; jedes von ihnen bilden wir affin auf τ^n ab und zwar mit dem Grade $+1$ oder -1, je nachdem $\chi(x_i^n)$ positiv oder negativ ist. Wenn wir nun die Abbildung F, die jetzt außer in $\bar{P}$ auch in diesen Teilsimplexen erklärt ist, so auf den Rest von Q ausdehnen, daß die noch hinzukommenden Bildpunkte nicht im Innern von τ^n liegen, so sind wir fertig; denn dann hat jedes x_i^n in τ^n den Grad $\chi(x_i^n)$. Q' sei der Teil von Q, der entsteht, wenn man die Innengebiete aller der eben betrachteten n-dimensionalen Teilsimplexe aus Q entfernt. Die Ränder dieser Teilsimplexe und der Durchschnitt $Q \cdot \bar{P}$ bilden die Teilmenge $\bar{Q}$ von Q', auf der F schon erklärt ist; sie ist ein $(n-1)$-dimensionales Polyeder, und F ist auf ihm simplizial; daher liegt keiner der zugehörigen Bildpunkte im Inneren von τ^n. a sei ein innerer Punkt von τ^n; wir fassen jetzt für einen Augenblick S^n als euklidischen Raum R^n mit a als unendlich fernem Punkt auf. Dann liegt die Bildmenge $F(\bar{Q})$ im R^n; die euklidischen Koordinaten der Bildpunkte sind stetige Funktionen auf $\bar{Q}$; nach dem allgemeinen Erweiterungssatz für stetige Funktionen[17]) können wir diese Funktionen auf ganz Q' ausdehnen; dadurch wird $F(\bar{Q})$ zu einer Abbildung $F_1(Q')$ in den R^n er-

---

[17]) *Hausdorff*, Mengenlehre (2. Aufl. 1927), S. 248; *von Kerékjártó*, Vorlesungen über Topologie (1923), S. 75.

weitert; kehren wir zu der früheren Auffassung der S^n zurück, so kann bei dieser Abbildung die Bildmenge zwar ins Innere von τ^n eintreten; jedoch bleibt der Punkt a unbedeckt. Wenn wir daher jeden im Inneren von τ^n liegenden Bildpunkt durch den Punkt des Randes von τ^n ersetzen, in den er von a aus projiziert wird, so erhalten wir eine stetige Abbildung $F(Q')$, die alle Anforderungen erfüllt.

Wir haben uns jetzt noch von der am Anfang des Beweises gemachten Annahme zu befreien, daß F auf $\bar{P}$ simplizial sei. F sei also eine beliebige stetige Abbildung von $\bar{P}$, die die Voraussetzungen des Satzes II erfüllt; dann sei F' eine so gute simpliziale Approximation von F, daß sie auch noch diese Voraussetzungen erfüllt und daß für jeden Punkt $\bar{p} \subset \bar{P}$ die Entfernung $\varrho\,(F'(\bar{p}), F(\bar{p})) < 1$ ist; dabei fassen wir S^n als Kugel vom Radius 1 im euklidischen R^{n+1} auf. $F'(p)$ dürfen wir für alle $p \subset P^{n+1}$ als definiert betrachten. Unter $v\,(\bar{p})$ verstehen wir den Vektor mit dem Anfangspunkt $F'(\bar{p})$ und dem Endpunkt $F(\bar{p})$. Die Komponenten dieser Vektoren sind stetige Funktionen auf $\bar{P}$; wir können sie nach dem allgemeinen Erweiterungssatz [17]) zu stetigen Funktionen auf P^{n+1} erweitern; damit ist jedem Punkt $p \subset P^{n+1}$ ein Vektor zugeordnet; dabei können wir die Erweiterung so ausführen, daß nicht nur die Vektoren $v(\bar{p})$, sondern alle Vektoren $v\,(p)$ kürzer als 1 sind. $F''\,(p)$ sei der Endpunkt des im Punkte $F'\,(p)$ angebrachten Vektors $v\,(p)$; dann ist $F''\,(\bar{p}) = F(\bar{p})$ für alle $\bar{p} \subset \bar{P}$, und der Mittelpunkt m der Kugel fällt mit keinem $F''\,(p)$ zusammen. Ist nun $F\,(p)$ der Schnittpunkt des Halbstrahls $m\,F''\,(p)$ mit S^n, so erfüllt die damit erklärte Abbildung $F\,(P^{n+1})$ alle Anforderungen.

6. Aufzählung der Abbildungsklassen

Da auf Grund des Satzes I die Aufzählung der Klassen der Abbildungen von P^n auf S^n mit der Aufzählung der algebraischen Abbildungstypen zusammenfällt, handelt es sich hier im wesentlichen um eine algebraische Aufgabe. Wir beginnen mit einigen rein algebraischen Betrachtungen, die an diejenigen aus Nr. 4 anknüpfen.

Neben den Charakteren, die homomorphe Abbildungen einer Gruppe in die additive Gruppe der ganzen Zahlen sind und die wir jetzt als „ganze“ Charaktere bezeichnen wollen, werden noch „rationale“ Charaktere betrachtet, die homomorphe Abbildungen in die additive Gruppe der rationalen Zahlen sind. Ferner werden jetzt außer denjenigen Abelschen Gruppen mit endlichen Erzeugendensystemen, die nur Elemente unendlicher Ordnung enthalten und die wir jetzt „freie“ Abelsche Gruppe nennen werden, auch endliche Abelsche Gruppen vorkommen und in ihnen „zyklische“ Charaktere, d. h. homomorphe Abbildungen in die additive Gruppe der Restklassen mod. 1.

Für rationale Charaktere gilt der folgende einfache Erweiterungssatz:

e) Wenn U eine Untergruppe von endlichem Index in G und wenn in U ein rationaler Charakter χ gegeben ist, so läßt sich dieser auf eine und nur eine Weise auf die ganze Gruppe G erweitern.

Beweis: Infolge der Endlichkeit des Index gibt es zu jedem $x \subset G$ eine von Null verschiedene ganze Zahl m so, daß $mx = u \subset U$ ist. Wenn χ für alle x erklärt ist, so ist $m \cdot \chi(x) = \chi(u)$, also $\chi(x) = \frac{1}{m}\chi(u)$; mithin ist die Erweiterung auf höchstens eine Weise möglich. Daß umgekehrt durch $\chi(x) = \frac{1}{m}\chi(u)$ ein Charakter in G erklärt wird, erkennt man wie in Nr. 4, c.

e') Falls der eben betrachtete Charakter χ für alle Elemente von U ganzzahlig ist, ist $\chi(x) \equiv \chi(y)$ mod. 1 für je zwei Elemente x, y, die einer der Restklassen angehören, in welche G nach U zerfällt. Daher ist in der endlichen Restklassengruppe R ein zyklischer Charakter ζ durch die Bestimmung definiert, daß $\zeta(X) \equiv \chi(x)$ mod. 1 ist, falls X die das Element x enthaltende Restklasse ist. Infolge von e) ist ζ bereits durch den Charakter $\chi(U)$, und nicht erst durch $\chi(G)$, vollständig bestimmt. Wir sagen daher, daß der zyklische Charakter ζ in R durch den ganzen Charakter χ in U „induziert“ wird.

f) U sei eine Untergruppe von endlichem Index in der freien Gruppe G, R die zugehörige endliche Restklassengruppe; ζ sei ein gegebener zyklischer Charakter von R. Dann gibt es (unendlich viele) ganze Charaktere von U, die ζ induzieren.

Beweis: Es sei $G = Z_1 + \ldots + Z_r$, wobei die Z_i unendliche Zyklen sind; x_i sei erzeugendes Element von Z_i, X_i sei die x_i enthaltende Restklasse. Wir setzen $\chi(x_i) = \zeta_0(Z_i)$, wobei wir unter $\zeta_0(Z_i)$ irgend eine bestimmte Zahl aus der Restklasse mod. 1 $\zeta(Z_i)$ verstehen. Dadurch wird in G ein rationaler Charakter χ erklärt, für den $\chi(x) \equiv \zeta(X)$ mod. 1 ist, wenn x irgend ein Element von G, X die x enthaltende Restklasse ist. Ist insbesondere $x \subset U$, so ist daher $\chi(x) \equiv 0$ mod. 1; χ ist daher in U ganz. Daß ζ durch χ induziert wird, folgt unmittelbar aus der Definition.

Wir betrachten jetzt das Polyeder P^n in einer festen Simplexzerlegung. Unter L^n verstehen wir die Gruppe der n-dimensionalen Komplexe von P^n (in dieser Zerlegung), unter Z^n die Gruppe der n-dimensionalen Zyklen. L^n ist eine freie Gruppe, Z^n eine abgeschlossene Untergruppe von L^n. Daher gibt es nach Nr. 4, a) eine Untergruppe V^n von L^n so, daß $L^n = Z^n + V^n$ ist; die Gruppe V^n ist durch den Satz aus Nr. 4, a) nicht eindeutig bestimmt, wir wählen sie aber ein für alle Mal fest. Ferner sei R^{n-1} die Gruppe der $(n-1)$-dimensionalen Ränder, $\overline{R}^{n-1}$ die Gruppe der „Randteiler", d. h. derjenigen $(n-1)$-dimensionalen Zyklen, von denen gewisse Vielfache Ränder sind; R^{n-1} ist Untergruppe von $\overline{R}^{n-1}$ mit endlichem Index, die zugehörige Restklassengruppe T^{n-1} ist die $(n-1)$-dimensionale Torsionsgruppe. Verstehen wir für jedes Element $v^n \subset V^n$ unter $\dot{v}^n$ seinen Rand, so wird, indem man jedem $v^n \subset V^n$ den zugehörigen $\dot{v}^n \subset R^{n-1}$ zuordnet, V^n homomorph auf R^{n-1} abgebildet; dies ist aber sogar ein Isomorphismus; denn ist $\dot{v}_1^n = \dot{v}_2^n$ so ist $\dot{v}_1^n - \dot{v}_2^n = (v_1^n - v_2^n)^{\cdot} = 0$, d. h. $v_1^n - v_2^n$ ist Zyklus, also $v_1^n - v_2^n \subset Z^n$ und $v_1^n - v_2^n \subset V^n$, mithin $v_1^n - v_2^n = 0$.

Es sei nun f eine Abbildung von P^n auf S^n. Verstehen wir für jeden Zyklus $z^n \subset Z^n$ unter $\chi(z^n)$ den Grad der Abbildung $f(z^n)$, so ist χ ein ganzer Charakter von Z^n. Wir nehmen nun weiter an, daß f simplizial sei, und daß dabei die ursprüngliche Zerlegung von P^n oder eine ihrer Unterteilungen zugrundeliegt. Ist dann τ^n ein festes n-dimensionales Simplex der in S^n zugrundeliegenden Zerlegung, und verstehen wir für jeden Komplex $x^n \subset L^n$ unter $\chi(x^n)$ den Grad der Abbildung $f(x^n)$ in τ^n, so stimmt diese Definition in Z^n mit der eben gegebenen überein, und χ ist ein ganzer Charakter von L^n. Infolge der Isomorphie zwischen V^n und R^{n-1} wird durch die Bestimmung $\dot{\chi}(\dot{v}^n) = \chi(v_n)$ auch in R^{n-1} ein ganzer Charakter $\dot{\chi}$ definiert. Durch ihn wird — gemäß e') — in T^{n-1} ein zyklischer Charakter ζ induziert, wobei ζ nach folgender Vorschrift gebildet ist: X^{n-1} sei ein Element von T^{n-1}, also eine $(n-1)$-dimensionale Homologieklasse, welche Randteiler enthält (Restklasse von $\overline{R}^{n-1}$ nach R^{n-1}); x^{n-1} sei einer dieser Randteiler, und es sei $mx^{n-1} = \dot{v}^n$; dann ist $\zeta(X^{n-1}) \equiv \frac{1}{m}\chi(v^n)$ mod. 1, oder: $m \cdot \zeta(X^{n-1}) \equiv \chi(v^n)$ mod. m; infolge von $\dot{v}^n = mx^{n-1}$ ist v^n ein Zyklus mod. m; die Restklasse mod. m von $\chi(v^n)$ ist der Grad mod. m der Abbildung $f(v^n)$, da $\chi(v^n)$ der Grad in dem Simplex τ^n ist. Mithin ist der zyklische Charakter ζ von T^{n-1} durch die Grade mod. m der Abbildungen der n-dimensionalen Zyklen mod. m für $m > 1$ vollständig bestimmt, und umgekehrt bestimmt ζ diese Grade eindeutig[18]).

Demnach ist klar: sind f und g zwei simpliziale Abbildungen aus derselben Klasse, so bewirken sie sowohl denselben ganzen Charakter χ von Z^n als auch denselben zyklischen Charakter ζ von T^{n-1}; da jede Abbildungsklasse simpliziale Abbildungen enthält, gehören daher zu jeder Klasse ein bestimmter Charakter $\chi(Z^n)$ und ein bestimmter Charakter $\zeta(T^{n-1})$. Gehören dagegen f und g verschiedenen Klassen an, so besitzen sie nach Satz I verschiedene algebraische Typen, d. h. es gibt einen n-dimensionalen Zyklus oder Zyklus mod. m, der durch sie mit verschiedenen Graden bezw. Graden mod. m abgebildet wird; folglich bewirken sie nicht sowohl denselben $\chi(Z^n)$ als auch denselben $\zeta(T^{n-1})$. Mithin entsprechen den Klassen eineindeutig Paare χ, ζ von Charakteren; umgekehrt gibt es, wenn χ und ζ willkürlich gegeben sind, Abbildungen, die diese Charaktere bewirken. Denn zunächst gibt es nach f) einen ganzen Charakter $\dot{\chi}$ der Gruppe R^{n-1}, der ζ induziert; erklären wir dann durch $\chi(v^n) = \dot{\chi}(\dot{v}^n)$ einen Charakter χ in V^n, so ist in Verbindung mit dem in Z^n gegebenen Charakter jetzt in $L^n = Z^n + V^n$ ein ganzer Charakter χ definiert. Wir konstruieren nun eine stetige Abbildung h, so daß für jeden Komplex $x^n \subset L^n$ die Zahl $\chi(x^n)$ der Grad der Abbildung $h(x^n)$ in dem festen Simplex τ^n von S^n ist: a sei ein nicht zu τ^n gehöriger Punkt von S^n; in jedem n-dimensionalen Simplex x_i^n von P^n wählen wir $|\chi(x_i^n)|$ zueinander fremde n-dimensionale Simplexe und bilden jedes von ihnen so auf S^n ab, daß der Rand von x_i^n auf a abgebildet wird, die Abbildung im Inneren von x_i^n eineindeutig ist und den Grad $+1$ oder -1 hat, je nachdem $\chi(x_i^n)$ positiv oder negativ ist; alle übrigen Punkte von P^n bilden wir ebenfalls auf a ab. Dann ist $\chi(x_i^n)$ der Grad von $h(x_i^n)$ in τ^n für jedes Simplex x_i^n, und mithin $\chi(x^n) = \Sigma\, a_i \chi(x_i^n)$ der Grad von $f(x^n)$ für jeden Komplex $x^n = \Sigma\, a_i x_i^n$. h, sowie jede simpliziale Abbildung f aus derselben Klasse, bewirkt dann die gegebenen Charaktere χ und ζ von Z^n und T^{n-1}.

Damit ist folgendes bewiesen:

Satz III. *Jede Klasse von Abbildungen des Polyeders P^n auf die Sphäre S^n bewirkt einen ganzen Charakter der n-dimensionalen Zyklengruppe Z^n von P^n und einen zyklischen Charakter der $(n-1)$-dimensionalen Torsionsgruppe T^{n-1} von P^n durch die folgenden Festsetzungen: $\chi(z^n)$ ist der Grad, mit dem der Zyklus $z^n \subset Z^n$ abgebildet wird;*

[18]) Man vergesse aber nicht, daß in der Wahl der Gruppe V^n eine Willkür liegt. Ohne die Auszeichnung von V^n ist, wenn x^{n-1} gegeben ist, v^n durch $mx^{n-1} = \dot{v}^n$ nicht eindeutig bestimmt, da auch $mx = (v^n + z^n)^{\cdot}$ mit irgend einem (gewöhnlichen) Zyklus z^n ist; und im allgemeinen ist $\chi(v^n) \not\equiv \chi(v^n + z^n)$.

ferner sei die Gruppe L^n der n-dimensionalen Komplexe als direkte Summe $L^n = Z^n + V^n$ dargestellt; ist dann X^{n-1} eine Homologieklasse aus T^{n-1}, so gibt es in V^n einen Zyklus mod. m v^n_m, dessen Rand $\dot{v}^n_m \subset X^{n-1}$ ist; der Grad mod. m, mit dem v^n_m abgebildet wird, ist $\equiv m \cdot \zeta(X^{n-1})$ mod. m. Dies ist eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Abbildungsklassen und der Gesamtheit aller Charakterenpaare $\chi(Z^n)$, $\zeta(T^{n-1})$.

Hiernach kann man leicht die Anzahl der Klassen bestimmen:

Satz III'. *Ist die n-te Bettische Zahl von P^n positiv, so gibt es unendlich viele Klassen; ist sie 0, so ist die Anzahl der Klassen endlich, und zwar gleich der Ordnung der (n—1)-dimensionalen Torsionsgruppe.*

Beweis: Daß die n-te Bettische Zahl positiv ist, bedeutet, daß Z^n nicht nur aus dem Nullelement besteht; sie besitzt als freie Gruppe dann unendlich viele ganze Charaktere χ; denn man kann, wenn $Z^n = X_1 + \ldots + X_r$ ist und die X_i unendliche Zyklen sind, die Werte von χ für die erzeugenden Elemente der X_i willkürlich vorschreiben. Ist die n-te Bettische Zahl 0, so besteht Z^n nur aus der 0, und $\chi = 0$ ist der einzige Charakter von Z^n. Man hat also zu zeigen, daß die Anzahl der zyklischen Charaktere einer endlichen Gruppe T^{n-1} gleich der Ordnung von T^{n-1} ist. Nun ist T^{n-1} direkte Summe endlicher zyklischer Gruppen: $T^{n-1} = X_1 + \ldots + X_r$; x_i seien erzeugende Elemente der X_i, ihre Ordnungen seien e_i. Da $e_i \cdot x_i = 0$ ist, muß $e_i \cdot \zeta(x_i) \equiv 0$ mod. 1, also $\zeta(x_i) \equiv \frac{k_i}{e_i}$ mod. 1 sein, wobei k_i eine der Zahlen 0, 1, ... $e_i - 1$ ist.

Wählt man umgekehrt die k_i willkürlich und setzt $\zeta(x_i) \equiv \frac{k_i}{e_i}$ für $i = 1, \ldots, r$, so entsteht ein zyklischer Charakter von T^{n-1}. Daraus folgt, daß die Anzahl dieser Charaktere gleich Πe_i, also gleich der Ordnung von T^{n-1} ist.

Als Spezialfall des Satzes III' sei noch hervorgehoben:

Satz III". *Die Abbildungen von P^n auf die S^n bilden dann und und nur dann eine einzige Klasse, wenn für P^n die n-te Bettische Zahl 0 und keine (n — 1)-dimensionale Torsion vorhanden ist*[19].

(Eingegangen den 12. März 1932)

[19]) Satz I der unter [6]) zitierten Arbeit.