Geometrische Deutung des Gauß'schen Verschlingungsintegrals.

Geometrische Deutung des Gauß'schen Verschlingungsintegrals

Von W. SCHERRER, Bern

Sind $x_1(u)$, $x_2(u)$, $x_3(u)$ und $y_1(v)$, $y_2(v)$, $y_3(v)$ die Parameterdarstellungen zweier geschlossener Raumkurven C und D, so stellt bekanntlich das von Gauß eingeführte Integral

$$\int\limits_C\int\limits_D \frac{(y_1-x_1)(dx_2\,dy_3-dx_3\,dy_2)+(y_2-x_2)(dx_3\,dy_1-dx_1\,dy_3)+(y_3-x_3)(dx_1\,dy_2-dx_2\,dy_1)}{[(y_1-x_1)+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

eine Invariante gegenüber stetigen Transformationen von C und D dar, deren Nichtverschwinden mit Sicherheit auf das Vorhandensein einer Verschlingung schließen läßt, während das Umgekehrte nicht zu gelten braucht.

Dieses Integral läßt sich in einfacher Weise als Raumwinkel einer Fläche in bezug auf einen Punkt deuten. Um die Verhältnisse bequemer zu beschreiben, bediene ich mich der Vektorsymbolik und setze

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}(u) &= (x_1(u),\ x_2(u),\ x_3(u))\\ \mathfrak{y}(v) &= (y_1(v),\ y_2(v),\ y_3(v))\ .\end{aligned}$$

Das Integral läßt sich jetzt auch schreiben in der Form:

$$\int\limits_C\int\limits_D \frac{[\mathfrak{y}(v)-\mathfrak{x}(u)]\cdot[\mathfrak{x}'(u),\ \mathfrak{y}'(v)]}{\{(\mathfrak{y}(v)-\mathfrak{x}(v))\}^{\frac{3}{2}}}\,du\,dv.$$

Diesem Integral stelle ich nun gegenüber den Raumwinkel Ω einer beliebigen Fläche in bezug auf den Koordinatenursprung. Bedeutet $\mathfrak{x}(u, v)$ den vom Ursprung aus zum laufenden Punkt auf der Fläche führenden Ortsvektor als Funktion der Flächenparameter u und v, so ist der gesuchte Raumwinkel Ω gegeben durch die Gleichung:

$$\Omega = \int\limits_F\int \frac{\mathfrak{x}(u, v)\,[\mathfrak{x}_u(u, v),\ \mathfrak{x}_v(u, v)]}{\{(\mathfrak{x}(u, v))^2\}^{\frac{3}{2}}}\,du\,dv.$$

Setze ich in diesen Ausdruck für $\mathfrak{x}(u, v)$ den Wert $\mathfrak{y}(v) - \mathfrak{x}(u)$ ein, so erhalte ich abgesehen von einem festen und an sich willkürlichen Vorzeichen genau das Gauß'sche Verschlingungsintegral.

Wir haben uns nur noch Rechenschaft zu geben über die Bedeutung der durch

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{y}(v) - \mathfrak{x}(u)$$

dargestellten Fläche. Offenbar kann sie aufgefaßt werden als Schiebefläche:

$$\mathfrak{x}(u, v) = \mathfrak{y}(v) + (-\mathfrak{x}(u)) .$$

Sie entsteht also folgendermaßen: Man spiegle die durch die Gleichung $\mathfrak{x} = -\mathfrak{x}(u)$ definierte Kurve C am Koordinatenursprung O. Man erhält so die der Gleichung $\mathfrak{x} = -\mathfrak{x}(u)$ entsprechende Kurve $\bar{C}$. Nun verschiebe man diese Kurve parallel mit sich selbst und starr verbunden mit dem zu Beginn der Bewegung loszulösenden Nullpunkt soweit, bis der mitgeführte Nullpunkt $\bar{O}$ auf die Kurve D zu liegen kommt. Schließlich führe man den Punkt $\bar{O}$ der Kurve D entlang und nehme dabei die Kurve $\bar{C}$ starr in bezug auf $\bar{O}$ und parallel zu sich selbst mit. Diese Schiebefläche bildet gewissermaßen einen die Kurve D begleitenden Schlauch. Willkürlich bei dieser Konstruktion sind die Lage des Ursprungs und die Reihenfolge der Kurven.

Am einfachsten liegen die Verhältnisse, wenn eine der Kurven ein Zentrum hat, welches man dann als Nullpunkt wählt. Man betrachte etwa einen horizontalen Kreis C und einen zweiten D, der durch das Zentrum von C geht und senkrecht zur Ebene von C steht.

Daß der Wert des Gauß'schen Integrals ein Vielfaches von 4π ist, erkennt man nun ohne weiteres, ebenso die Invarianz gegenüber stetigen Transformationen.

Auch die in dem Enzyklopädieartikel von *Dehn* und *Heegaard* über Analysis situs angedeutete Verallgemeinerung von *Dyck* ergibt sich auf diesem Wege unmittelbar. Sind nämlich.

$$\mathfrak{x}(u_1, u_2, \ldots u_p) = (x_1(u_1, \ldots u_p), \ldots\ldots\ldots x_n(u_1, \ldots u_p))$$

$$\mathfrak{y}(v_1, v_2, \ldots v_q) = (y_1(v_1, \ldots v_q), \ldots\ldots\ldots y_n(v_1, v_2, \ldots v_q))$$

die Parameterdarstellungen zweier Mannigfaltigkeiten C und D im R_n mit den Dimensionszahlen p und q, die der Bedingung $p + q = n - 1$ genügen, so bilde man die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} y_1 - x_1, & y_2 - x_2, & \ldots\ldots\ldots, & y_n - x_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}, & \ldots\ldots\ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_p}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_p}, & \ldots\ldots\ldots, & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_p} \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial v_1}, & \dfrac{\partial y_2}{\partial v_1}, & \ldots\ldots\ldots, & \dfrac{\partial y_n}{\partial v_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial v_q}, & \dfrac{\partial y_2}{\partial v_q}, & \ldots\ldots\ldots, & \dfrac{\partial y_n}{\partial v_q} \end{vmatrix}$$

und die Distanz

$$r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots\ldots = (y_n - x_n)^2}.$$

Auf das Integral

$$\iint\limits_{CD} \frac{\varDelta}{r^n}\, du_1\, du_2 \ldots\ldots du_p \cdot dv_1\, dv_2 \ldots\ldots dv_q$$

läßt sich dann alles oben Gesagte übertragen.

(Eingegangen den 7. März 1932)