Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 3 (1931)

Artikel: Ueber analytische Funktionen mit nichtbeschränkten Randwerten des Realteiles.

Autor: Weinstein, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-4691

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ueber analytische Funktionen mit nichtbeschränkten Randwerten des Realteiles

Von A. WEINSTEIN, Breslau

Die folgenden Zeilen enthalten eine Bemerkung über das Verhalten einer analytischen Funktion, deren Realteil vorgeschriebene *nichtbeschränkte* Werte am Rande eines Gebietes annimmt. Wir werden zeigen, daß es möglich ist in gewissen einfachen Fällen das Verhalten der Funktion bei einer *beliebigen* Annäherung an den Rand mit elementaren Mitteln festzustellen.

Das Gebiet sei die obere Halbebene $y > 0$ der Ebene $z = x + iy$. Für das Verhalten einer analytischen Funktion in der Nähe der Stelle $z = 0$ ist die Verteilung der Randwerte auf der reellen Achse in der Umgebung der Stelle $x = 0$ ausschlaggebend. Wir wollen zunächst eine Verteilung betrachten, wo die Randwerte in einem beliebigen Intervall rechts von $x = 0$, z. B. im Intervall $(0, 1)$, die Größenordnung von $\frac{1}{x^\alpha}$ haben $(0 < \alpha < 1)$, während sie sonst beschränkt sind. Genauer gesagt wollen wir zunächst den folgenden Fall ins Auge fassen.

Die vorgeschriebenen Randwerte $\varphi(x)$ des Realteiles der gesuchten Funktion $f(z)$ seien

$$(1) \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 > x \text{ und } x > 1 \\ \dfrac{\chi(x)}{x^\alpha} & \text{für } 0 < x \leqq 1, \end{cases}$$

wobei $\chi(x)$ eine für $0 \leqq x \leqq 1$ zweimal stetig differentiierbare Funktion ist, die für $x = 0$ nicht verschwinden soll. Für den Exponenten α soll die Ungleichung $0 < \alpha < 1$ gelten. Wir werden auch den Fall $-1 < \alpha < 0$ zu betrachten haben. Die Randwerte sind dann im Punkte $x = 0$ stetig, die rechtsseitige Ableitung, nämlich $\chi'(x)\, x^\beta + \beta\, \chi(x)\, x^{\beta-1}$ verhält sich aber im Falle $\chi(0) \neq 0$ wie $\frac{1}{x^{1-\beta}}$. (Dabei wurde für einen Augenblick $-\alpha = \beta$, $0 < \beta < 1$ gesetzt.)

Wir wollen nun zeigen, daß es eine analytische Funktion $f(z)$ mit den vorgeschriebenen Randwerten (1) des Realteiles gibt, für welche $\lim\limits_{z \to 0} z^\alpha f(z)$ existiert und von 0 verschieden ist, wobei z bei dem Grenz-

übergang eine beliebige Folge von Werten mit positivem Imaginärteil durchlaufen darf. Diese Funktion ist, wie wir gleich zeigen werden, durch das Cauchy-Schwarzsche Integral

$$(2) \qquad f(z) = \frac{1}{i\pi} \int_0^1 \frac{\chi(x)}{x^\alpha} \frac{dx}{x-z}, \quad 0 < \alpha < 1$$

gegeben. Der einzige Punkt der Behauptung, der einer besonderen Untersuchung bedarf, ist das Verhalten von $f(z)$ an der Stelle $z = 0$. Wir beschäftigen uns zunächst mit der entsprechenden Frage für die Funktion

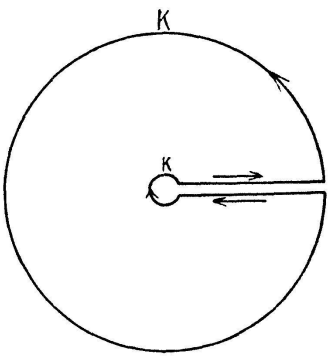
$$f_1(z) = \frac{1}{i\pi} \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha (x-z)},$$

die aus f entsteht, indem man $\chi(x)$ durch 1 ersetzt.

Wir betrachten z als Parameter mit einem positiven Imaginärteil und bilden das Integral

$$\int \frac{d\zeta}{\zeta^\alpha (\zeta - z)}$$

in der komplexen $\zeta = \xi + i\eta$ Ebene auf dem in der Figur angegebenen Weg, bestehend aus zwei konzentrischen Kreisen k und K mit dem gemeinsamen Mittelpunkt $\zeta = 0$ und zwei zur reellen Achse parallelen unendlich benachbarten Strecken. Im Inneren des Integrationsweges ist derjenige Zweig der Funktion $\frac{1}{\zeta^\alpha}$, welcher auf der oberen geraden Strecke reell ist, eindeutig. Somit ist unser Integral nach dem Residuumsatz gleich $\frac{2\pi i}{z^\alpha}$. Andrerseits bekommt man durch Grenzübergang, indem man den Radius von K nach Unendlich, denjenigen von k nach 0 konvergieren läßt, für unser Integral den Wert



$$(1 - e^{-2\pi i \alpha}) \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^\alpha (\xi - z)},$$

woraus zu ersehen ist, daß

$$f_1(z) = \frac{1}{i\pi}\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(x-z)} = \frac{2\,e^{2\pi i\alpha}}{e^{2\pi i\alpha}-1}\,\frac{1}{z^\alpha} - \frac{1}{i\pi}\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha(x-z)}$$

ist. Daraus aber folgt die Grenzbeziehung

$$\lim_{z\to 0} z^\alpha f(z) = \frac{2\,e^{2\pi i\alpha}}{e^{2\pi i\alpha}-1} \neq 0.$$

Wir betrachten weiter das Verhalten der Funktion

$$f_2(z) = \frac{1}{i\pi}\int_0^1 \frac{x^\beta\,dx}{x-z} - \frac{1}{i\pi\beta}, \quad 0<\beta<1$$

in der oberen Halbebene in der Umgebung der Stelle $z=0$. (Der Realteil von $f_2(z)$ ist gleich x^β im Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ und gleich 0 für die übrigen x.) Setzt man $x^\beta = x^{\beta-1}(x-z) + zx^{\beta-1}$, so wird

$$f_2(z) = \frac{1}{i\pi}\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\beta}} + \frac{z}{i\pi}\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\beta}(x-z)} - \frac{1}{i\pi\beta} = \frac{z}{i\pi}\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-\beta}(x-z)}.$$

Da $0<1-\beta<1$ ist, so ist das letzte Integral von dem eben betrachteten Typus. Daraus folgt, daß der $\lim\limits_{z\to 0} \frac{f_2(z)}{z^\beta}$ existiert und von 0 verschieden ist.

Wir betrachten schließlich die Funktion (2)

$$f(z) = \frac{1}{i\pi}\int_0^1 \frac{\chi(x)}{x^\alpha}\,\frac{dx}{x-z}.$$

Da $\chi(x)$ zweimal stetig differentiierbar ist, setzen wir $\chi(x) = \chi(0) + \chi'(0)\,x + \chi''(\vartheta x)\,\frac{x^2}{2}$, $(0<\vartheta<1)$. Es wird

$$(3)\quad f(z) = \frac{\chi(0)}{i\pi}\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(x-z)} + \frac{\chi'(0)}{i\pi}\int_0^1 \frac{x^{1-\alpha}\,dx}{x-z} + \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{x^{2-\alpha}\,\chi''(\vartheta x)\,dx}{x-z}.$$

Das Verhalten des ersten und zweiten Integrals auf der rechten Seite ist soeben festgestellt worden. Das dritte Integral stellt eine in der

oberen Halbebene analytische Funktion dar, deren Realteil auf der reellen Achse im Intervalle (0, 1) die Werte $\frac{x^{2-\alpha}\chi''(\vartheta x)}{2}$ annimmt und außerhalb dieses Intervalles, insbesondere für negative x verschwindet. Dieser Realteil ist eine an der Stelle $x = 0$ differentiierbare Funktion. Schreibt man nämlich für $x^{2-\alpha}\chi(x)$ den Ausdruck $\frac{\chi(x) - \chi(0) - x\chi'(0)}{x^{\alpha}}$, so sieht man sofort, daß dieser Ausdruck nach 0 konvergiert, wenn x durch positive Werte nach 0 strebt. Der rechtsseitige Differenzenquotient ist also an der Stelle $x = 0$ gleich $\frac{\chi(x) - \chi(0) - x\chi'(0)}{x^{1+\alpha}}$. Daraus ergibt sich, z. B. nach der l'Hôpitalschen Regel, für die rechtseitige Ableitung an der Stelle $x = 0$ der Wert

$$\lim_{x=0} \frac{\chi'(x) - \chi'(0)}{(1+\alpha)\ x^{\alpha}} = \lim_{x=0} \frac{\chi'(x) - \chi'(0)}{x} \ \frac{x^{1-\alpha}}{1+\alpha} = 0$$

in Uebereinstimmung mit dem Wert der linksseitigen Ableitung an derselben Stelle, w. z. b. w. Nach bekannten Sätzen bleibt also die durch das Integral

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^1 \frac{x^{2-\alpha}\chi''(x)\,dx}{x - z}$$

dargestellte Funktion bei der Annäherung an $z = 0$ beschränkt.

Zusammenfassend ersehen wir also aus der Formel (3), daß, wie behauptet wurde, der $\lim\limits_{z \to 0} z^{\alpha} f(z)$ existiert und von 0 verschieden ist.

Dieses Resultat läßt sich leicht verallgemeinern. Lassen sich z. B. die vorgegebenen Randwerte für kleine positive x in der Form $\frac{\chi_1(x)}{x^{\alpha_1}}$, für kleine negative x aber in der Gestalt $\frac{\chi_2(x)}{|x|^{\alpha_2}}$ schreiben, wobei $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$ ist und $\chi_1(x)$ und $\chi_2(x)$ denselben Voraussetzungen wie $\chi(x)$ genügen, so kann man durch eine naheliegende additive Zerlegung der Randwerte eine zugehörige analytische Funktion $F(z)$ bilden, für welche $\lim z^{\alpha} F(z) = 0$ existiert, wobei unter α die größere der beiden Zahlen α_1 und α_2 zu verstehen ist.

(Eingegangen den 27. August 1931)