

Ueber Riemannsche Flächen.

Autor(en): **Speiser, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **2 (1930)**

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3624>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ueber Riemannsche Flächen

Von A. SPEISER, Zürich

I. Ueber topologische Bäume

Es sei eine abzählbare Menge von gerichteten Strecken der Länge 1 gegeben. Man setze aus ihnen einen Baum in folgender Weise zusammen: Zunächst zeichnet man eine erste Strecke, die «erste Generation»; an ihren Endpunkt werden entweder eine oder zwei Strecken angeheftet (2. Generation), an deren Endpunkt, bzw. an die beiden Endpunkte werden wieder höchstens je zwei, mindestens je eine Strecke angeheftet (3. Generation) und in dieser Weise fährt man in infinitum fort. Das Gebilde, das so entsteht, nenne ich einen topologischen endlosen *Baum*. Zwei extreme Fälle lassen sich sofort angeben:

1. Der logarithmische Fall. Er entsteht dann, wenn man stets nur eine Strecke anheftet. Man erhält eine einzige Strecke ohne Verzweigungen, die ins Unendliche läuft.

2. Der modulare Fall. Er entsteht, wenn man stets zwei Strecken anheftet.

Nun gehen wir von irgend einer Strecke des Baumes aus und nehmen den ganzen *Ast*, der von ihr ausgeht, d. h. alle Strecken, welche im Lauf der Generationen von ihr abhängen. Dieser Ast hat selbst wieder die Eigenschaft ein Baum zu sein. Falls er zum logarithmischen Fall gehört, so nenne ich ihn einen *kahlen Ast*, eine Terminologie, die ich Herrn Zermelo verdanke.

Unter einer *Endfolge* verstehe ich eine zusammenhängende Folge von Strecken, welche mit der ersten Strecke beginnt, aus jeder Generation genau ein Exemplar enthält und in dieser Weise ins Unendliche verläuft. Im oben angegebenen logarithmischen Fall gibt es offenbar eine einzige Endfolge. Im zweiten, modularen Fall ist die Anzahl der Endfolgen von der Mächtigkeit des Kontinuums. Wir können sie nämlich in folgender Weise den Dualbrüchen zwischen 0 und 1 zuordnen: Für die erste Strecke beginnen wir den Bruch mit 0. Wenn nun die Endfolge aus der zweiten Generation die linke Strecke enthält, so schreiben wir im Dualbruch nach dem Komma eine 0, wenn er aber die rechte Strecke enthält, eine 1 hin. In dieser Weise fahren wir fort und schreiben an der n -ten Stelle nach dem Komma eine 0 oder eine 1 auf, je nachdem die Strecke, die am Endpunkt der n -ten Generation eingeschlagen wird,

die linke oder die rechte ist. Jede Endfolge ist auf diese Weise eindeutig einem Dualbruch zwischen 0 und 1 zugeordnet und unsere Behauptung ist bewiesen.

Es ist leicht, Bäume zu konstruieren, für welche die Anzahl der Endfolgen von abzählbarer Mächtigkeit ist, und ich will nun folgenden Satz beweisen:

Satz 1. Die Anzahl der Endfolgen eines Baumes ist stets entweder endlich oder abzählbar unendlich oder von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Beweis: Ich definiere eine Operation, die sich in drei Schritte zerlegt:

a) Weglassung der Knoten. Falls am Ende einer Strecke bloß *eine* Strecke der nächsten Generation angeheftet ist, so rechne ich die beiden Strecken bloß als eine, ich lasse also den *Knotenpunkt*, der zwischen diesen beiden Strecken besteht, weg. Dasselbe soll auch geschehen, wenn eine endliche Anzahl von Strecken in dieser Weise aufeinander folgen. Dagegen lasse ich die kahlen Aeste noch bestehen. Durch diese Operation wird die Zahl der Endfolgen nicht verändert.

b) Wegschneiden der kahlen Aeste. Dies geschieht so: Man durchgeht den Baum von der ersten Generation durch alle weiteren hindurch und schaut nach, ob bei einer Strecke ein kahler Ast beginnt. Falls dies der Fall ist, markiert man diese Strecke. Nachdem dies beendet ist, durchgeht man den Baum ein zweitesmal und schneidet die markierten Aeste ab. Hierdurch wird höchstens eine abzählbare Menge von Endfolgen weggenommen, denn die Anzahl der Strecken ist abzählbar, daher auch die Anzahl der kahlen Aeste.

c) Das Säubern des Baumes. Man beginnt wieder mit der ersten Strecke und untersucht, ob der Ast, der von einer Strecke abhängt, bloß noch endlich viele Strecken enthält. In diesem Falle schneidet man ihn weg mit allem was daran hängt. Hierdurch wird keine Endfolge weggenommen. Denn es sei S eine Strecke einer Endfolge vor der Säuberung, so wird S bei der Säuberung nicht weggeschnitten, weil ja unendlich viele Strecken von ihr abhängen. Daher wird keine Endfolge bei der Säuberung angetastet.

Nachdem alle drei Teile dieser Operation ausgeführt sind, entsteht wieder ein Baum. Er kann wieder kahle Aeste aufweisen, dann muß man diese Operation wiederholen. Dies kann offenbar ins Transfinite weitergehen. Aber kraft der transfiniten Ordinalzahlen kann man sich das Verfahren zu Ende geführt denken. Die zugehörige Ordinalzahl gehört aber höchstens der zweiten (abzählbaren) Zahlklasse an, da bei

jeder Operation unendlich viele Strecken weggeschnitten werden und ihre Gesamtzahl abzählbar ist.

Nun sind zwei Fälle möglich:

1. Nach der Durchführung aller Operationen bleibt nichts mehr übrig. Dann ist die Anzahl der Endfolgen im ursprünglichen Baum abzählbar unendlich oder endlich. Denn bei jeder der abzählbar unendlich vielen Operationen wird höchstens eine abzählbare Menge von Endfolgen genommen und außer diesen gibt es keine weiteren Endfolgen.

2. Es bleibt ein Baum nach der Durchführung aller Operationen übrig. Dieser hat aber keine logarithmischen Enden mehr. Man schaffe noch die Knoten weg, dann muß der Baum die modulare Gestalt erhalten und die Anzahl der Endfolgen auf ihm, daher auch auf dem ursprünglichen Baum ist von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Anderer Beweis. Er beruht auf folgendem Postulat:

Postulat: Bei dem vorgelegten Baum und allen seinen Aesten ist es möglich, die Frage zu entscheiden, ob er endlich viele Endfolgen besitzt, oder abzählbar unendlich viele, oder ob keiner dieser beiden Fälle eintritt.

Der Beweis wird nun so geführt. Man stellt zunächst fest, ob der ganze Baum endlich oder abzählbar unendlich viele Endfolgen besitzt, oder ob er mehr aufweist. Im letzteren Fall geht man zu den Strecken der zweiten Generation. Falls eine derselben einen Ast trägt, der höchstens abzählbar viele Endfolgen enthält, so schneidet man diese Strecke mit dem ganzen daran hängenden Ast weg. In dieser Weise verfährt man mit allen Strecken der späteren Generationen. Falls aber eine Strecke einen Ast trägt, der eine nicht-abzählbare Menge von Endfolgen aufweist, so wird sie nicht weggeschnitten.

Nachdem dies durchgeführt ist, bleibt ein Baum bestehen, dessen sämtliche Aeste zu dieser dritten Kategorie gehören. Man könnte zunächst denken, daß ein Ast, der ursprünglich zu dieser Kategorie gehörte, durch das Abschneiden späterer Aeste in die erste oder zweite Kategorie gelangt. Das ist aber nicht der Fall, denn es werden höchstens abzählbar unendlich viele Teiläste abgeschnitten und jeder derselben besitzt nur abzählbar viele Endfolgen. Daher gehen durch das Abschneiden der Teiläste nur abzählbar viele Endfolgen verloren. Wenn also der Ast, der an der Strecke S hängt, eine nicht-abzählbare Menge von Endfolgen zu Beginn aufwies, so wird auch nach dem Wegschneiden noch eine nicht-abzählbare Menge von Endfolgen bestehen bleiben. Offenbar ist der Baum den wir jetzt erhalten haben, derselbe wie der-

jenige im Endresultat des vorigen Beweises. Läßt man noch die Knotenpunkte weg, so erhält man den modularen Baum.

Für diesen Satz ist es ganz unwesentlich, daß man die Anzahl der an den Endpunkten anzuheftenden neuen Strecken auf 2 limitiert hat. Es genügt, daß an jeden Endpunkt eine endliche Zahl, aber mindestens eine Strecke angeheftet wird. Wenn man durch das Säuberungsverfahren schließlich zu einem Baum gelangt ist, der keine kahlen Aeste mehr aufweist, und auch noch die Knoten weggeschafft hat, so erhält man einen Baum, bei dem am Ende jeder Strecke mindestens zwei Zweige ausgehen. Daß man auch hier die Endfolgen mit den Punkten der Strecke von 0 bis 1 in eineindeutige Beziehung setzen kann, ist unmittelbar klar.

II. Ueber Riemannsche Flächen

Durch den Satz über topologische Bäume läßt sich das Problem, das ich in § 7 meiner Arbeit über Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen (diese Commentarii Bd. I, pg. 310) angebe, genau formulieren. Hier wird eine Riemannsche Fläche aus drei Sorten von Blättern aufgebaut. Die erste Sorte besteht aus der vollen Ebene, die von $+1$ bis $+\infty$ und von -1 bis $-\infty$ längs der reellen Axe aufgeschnitten ist. Die Sorte II besitzt nur den Einschnitt von $+1$ bis $+\infty$, die Sorte III nur denjenigen von -1 bis $-\infty$. Der Aufbau der Riemannschen Fläche läuft nun parallel mit dem Aufbau eines topologischen Baumes. Man beginne etwa mit einem Blatt von der Sorte I. Ihm entspricht die erste Strecke des Baumes. Nun heftet man an die vier Ufer je ein neues Blatt an. Dementsprechend heften wir an den Endpunkt der ersten Strecke vier neue Strecken an. Falls ein Blatt dieser zweiten Generation von der Sorte I ist, so besitzt es nach der Anheftung noch drei freie Ufer, an die man ebensoviele neue Blätter anzuheften hat. Entsprechend hat man an das Ende der zugeordneten Strecke drei neue Strecken (der dritten Generation) anzuheften. Wenn dagegen das Blatt von der Sorte II oder III war, so bleibt nur ein freies Ufer übrig, am Baum erhalten wir einen Knotenpunkt.

Der Satz des vorigen Paragraphen liefert uns jetzt die Aussage:

Satz 2. Eine Riemannsche Fläche von der angegebenen Art besitzt entweder endlich viele Endfolgen, oder abzählbar unendlich viele, oder die Zahl der Endfolgen ist von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Man kann auch in dualer Weise einen Baum konstruieren, indem man den einzelnen Blättern der Riemannschen Fläche Punkte zuordnet, und zwei Punkte durch eine Strecke verbindet, falls die zugehörigen Blätter aneinander geheftet sind. Die Strecken braucht man nicht zu richten und die erste Fläche erscheint dann nicht mehr als ausgezeichnet vor den übrigen. Von jedem Punkt aus geht eine gerade Anzahl von Strecken, die paarweise zusammengeordnet sind durch die Tatsache, daß je zwei Nachbarblätter an gegenüberliegenden Ufern eines Schnittes angeheftet sind.

Ich vermutete nun, daß die Riemannschen Flächen zu ganzen transzendenten Funktionen gehören, falls die Anzahl der Endfolgen endlich oder abzählbar unendlich ist, daß sie dagegen auf das Innere des Einheitskreises abbildbar sind, falls die Anzahl der Endfolgen die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt. Die Entscheidung darüber kann ich nicht bringen, dagegen möchte ich zeigen, daß sich für Stücke dieser Flächen in vielen Fällen entscheiden läßt, ob sie zum zweiten Fall führen.

Hierzu verwende ich ein Symmetrisierungsverfahren. Ich denke mir eine vorgelegte Riemannsche Fläche der angegebenen Art durch einen Schnitt, der einen singulären Punkt bei $+1$ oder -1 mit ∞ verbindet, längs der reellen Axe aufgeschnitten. Sie zerfällt dann in zwei Teile A und B . Die Schnittlinie möge von $+1$ bis ∞ laufen. Nun spiegele ich A längs seines Ufers und erhalte dadurch eine Fläche $\bar{A}$ mit demselben Ufer. Jetzt hefte ich A und $\bar{A}$ längs dieses Ufers zusammen und erhalte eine neue Riemannsche Fläche, die ich mit $A + \bar{A}$ bezeichne. Sie ist von derselben Art, wie die bisher betrachteten, unbegrenzt und einfach zusammenhängend. Dasselbe mache ich mit B und erhalte die Fläche $B + \bar{B}$.

Falls eine Riemannsche Fläche zu einer ganzen transzendenten Funktion gehört, so bezeichne ich sie als eine *Fläche der ersten Art*; falls sie auf den Einheitskreis abbildbar ist, nenne ich sie eine *Fläche der zweiten Art*. Ich beweise nun folgenden

Satz 3. Falls die Fläche $A + \bar{A}$ zur zweiten Art gehört, so gehört auch $A + B$ zur zweiten Art.

Beweis: Nach Voraussetzung läßt sich $A + \bar{A}$ auf den Einheitskreis einer Ebene, der z -Ebene, abbilden. Die Funktion, welche dies leistet, heiße kurz: *die Funktion* $A + \bar{A}$. Nun möge die Fläche $A + B$ durch die Funktion $A + B$ auf die z' -Ebene abgebildet sein (auf die punktierte Kugel). Dem Ufer, das die Grenze von A bildet und von 1 bis $+\infty$ läuft, entspricht im Einheitskreis der z -Ebene ein Kreisbogen,

der senkrecht zur Peripherie des Einheitskreises verläuft. Denn dieses Ufer ist in $A + \bar{A}$ eine Spiegelaxe; ihm muß auch im Bild eine Kurve entsprechen, die Spiegelung des Einheitskreises zuläßt, und das kann nur ein Orthogonalkreis sein. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß dieser Orthogonalkreis der reelle Durchmesser des Kreises ist. Die Funktion $A + \bar{A}$ bildet daher das Flächenstück A auf einen Halbkreis, etwa den oberen, ab. Dieses selbe Flächenstück A wird nun durch die Funktion $A + B$ auf ein Teilgebiet der s' -Ebene schlicht abgebildet. Das Komplementärgebiet enthält sicher einen Kreis, da es Bild von B ist. Man kann daher durch eine lineare Transformation erreichen, daß das Bildgebiet von A ganz im Endlichen liegt und daß speziell der wesentlich singuläre Punkt, der sich bisher im Unendlichen befand, in den Nullpunkt zu liegen kommt.

Wir haben nun zwei Bilder von A gewonnen. Das eine ist eine Halbkreisfläche, das andere ein beschränktes Gebiet mit einem singulären Punkt im Nullpunkt. Die Nachbarschaft dieses singulären Punktes entspricht der Nachbarschaft der halben Kreisperipherie, welche den Halbkreis begrenzt. Jedem Radius im Halbkreis entspricht ein Weg, der im Nullpunkte endet. Das ist aber nicht möglich, denn wenn eine beschränkte Funktion in einer Menge, deren Maß größer als Null ist, verschwindet, so ist sie identisch Null. Hiermit ist Satz 3 bewiesen.

Falls das Flächenstück A durch Symmetrisierung eine Fläche zweiter Art liefert, so ist auch jede andere Fläche, die man durch Ergänzung von A zu einer einfach zusammenhängenden unbegrenzten Fläche erhält, von der zweiten Art. Ueber die Singularitäten, die man bei der Ergänzung hinzufügt, braucht hierbei nichts vorausgesetzt zu werden.

A greift aber noch tiefer in das Wesen der Funktion $A + B$ ein. Sein Bildgebiet, das durch die Funktion $A + B$ im Einheitskreis entworfen wird, sei G . Durch die Funktion $A + \bar{A}$ wird A auf den oberen Halbkreis H abgebildet. Ich beweise nun den

Satz 4. Bei der konformen Abbildung, welche durch Vermittlung über A vom Halbkreis H auf das Gebiet G geschieht, entspricht der Peripherie des Halbkreises ein Stück der Kreisperipherie und die Abbildungsfunktion ist regulär über das Innere der beiden Kreisbögen fortsetzbar.

Beweis: Die genannte Abbildungsfunktion ist im Inneren des Halbkreises H regulär und beschränkt, da das Gebiet G im Inneren des Einheitskreises liegt. Man kann auf diese Funktion den Satz von Fatou anwenden, denn der Halbkreis läßt sich elementär auf den vollen Kreis abbilden. Ich ziehe vom Nullpunkt in H die Radien an die obere Hälfte

der Peripherie, dann nähert sich die Funktion auf jedem Radius einer bestimmten Grenze, abgesehen von einer Nullmenge. Nun gebe ich zwei Punktfolgen auf der Peripherie, von denen die erste, $A_1, A_2, \dots$ sich dem Punkt $+1$, die zweite $B_1, B_2, \dots$ dem Punkt -1 nähert. Die Punkte A sollen rechts von der imaginären Axe, die Punkte B links von ihr liegen. Ferner seien die Punkte so ausgewählt, daß auf den Radien OA und OB stets bestimmte Grenzwerte der Funktion liegen. Ich betrachte nun das Bild des Kreissektors OAB in G . Jedem der beiden Radien entspricht eine Jordankurve, die im Bild von O , das mit O' bezeichnet sei, beginnt und zu einem Peripheriepunkt, etwa A' und B' führt. Sicher ist der Bogen $A'B'$ nicht bloß ein Punkt, sonst würde dem Bogen AB der eine Punkt A' entsprechen gegen das vorher Bewiesene. Ferner schneiden sich die beiden Kurven $O'A'$ und $O'B'$ nirgends und sie sind regulär, außer in den Endpunkten. Wir erhalten so eine konforme Abbildung des Inneren des Kreissektors OAB auf das Innere des Gebietes $O'A'B'$, das von den beiden Jordankurven $O'A'$ und $O'B'$ sowie vom Kreisbogen $A'B'$ begrenzt ist. Nach dem Satz von Carathéodory entsprechen sich auch die Ränder nach der Stetigkeit und da die Radien in die Jordankurven übergehen, so entsprechen sich die beiden Peripheriestücke. Für A kann ich irgend einen Punkt der Reihe $A_1, A_2, \dots$ einsetzen, entsprechend auch für B . Die zugehörigen Bilder A' und B' nähern sich bestimmten Punkten auf der Peripherie, die ich mit X (dem Punkt $+1$ entsprechend) und Y (dem Punkt -1 entsprechend) bezeichne.

Nun kann man den Schwarzschen Satz in seiner allgemeinen Fassung anwenden und die Abbildung analytisch über die Kreise hinweg fortsetzen. Aus H wird die ganze obere Halbebene, aus G ein Gebiet, welches das Innere des Kreisbogens XY als Spiegelungskurve enthält. Die Funktion, welche H auf G abbildete, erweist sich jetzt als eine Funktion, welche in der ganzen Halbebene existiert, längs der Halbkreisperipherie von H , exklusive der Punkte $+1$ und -1 , regulär ist und diesen Halbkreis auf den Bogen XY abbildet, wobei nach der Stetigkeit den Grenzpunkten ± 1 die Punkte X und Y entsprechen. Hiermit ist der Satz 4 bewiesen.

Definition: Einen Weg auf der Fläche A , welcher bei der Abbildung durch die Funktion $A+B$ einer Kurve entspricht, die in einem bestimmten inneren Punkt des Bogens XY endet, möge ein Konvergenzweg heißen.

Mit Hilfe von Satz 4 läßt sich eine Invarianzeigenschaft dieser Konvergenzwege nachweisen.

Satz 5. Die Eigenschaft eines Weges, Konvergenzweg zu sein, ist von der Wahl von B unabhängig und daher eine innere Eigenschaft der Fläche A .

Beweis: Es sei g ein Weg auf A , dessen Bild in G (resp. in H) in einem bestimmten inneren Peripheriepunkt Z endet. Dann endet nach Satz 4 auch sein Bild in H (resp. in G) in einem inneren Punkt des Kreisbogens. Das gilt für jedes Gebiet G , das bei beliebiger Wahl der ergänzenden Fläche B entsteht, womit der Satz bewiesen ist.

Für die Grenzpunkte gilt der Satz nicht mehr in dieser Allgemeinheit. Zwar entspricht einer Linie in G , welche in einem der Punkte X oder Y endet, eine Linie in H , welche nach $+1$ oder -1 geht. Aber die Umkehrung steht nicht fest. Um auch hier noch einen Schritt weiterzukommen, ziehen wir wieder die Funktion heran, welche H auf G abbildet, und ergänzen sie durch Spiegelung an der halben Peripherie in H und am Bogen XY in G . Die erstere Halbebene sei mit H' bezeichnet, das Gebiet, das aus G und seinem Spiegelbild am Bogen XY besteht, sei G' . Wir können dieses letztere Gebiet als beschränkt annehmen, denn es läßt jedenfalls einen Kreis unbedeckt, der zum Bildgebiet von B bei der Funktion $A+B$ gehört. Durch eine lineare gebrochene Substitution kann man den Mittelpunkt dieses Kreises ins Unendliche bringen. Unsere Funktion ist nun regulär im Inneren der Halbebene H' . Auf der Grenze, nämlich der reellen Axe, liegen nur die beiden allenfalls singulären Stellen ± 1 , sonst ist die Funktion auch hier noch regulär. Wenn wir längs der Peripherie des Einheitskreises von oben her in den Punkt $+1$ oder -1 gehen, so nähert sich die Funktion in stetiger Weise den beiden Werten X und Y . Nach einem Satz von Lindelöf (vgl. Math. Enzyklopädie II, 3, 1 pg. 420) konvergiert die Funktion auf jeder Kurve nach den Punkten X bzw. Y , welche in die Punkte $+1$ oder -1 einmündet innerhalb eines Winkelraumes, dessen Schenkel in der oberen Halbebene verlaufen und nicht mit der reellen Axe zusammenfallen.

Wir wollen die Menge der Wege in A , deren Bilder in H nach einem der Punkte $+1$ oder -1 konvergieren, mit M bezeichnen. Die Teilmenge von M , bestehend aus denjenigen Wegen, deren Bilder innerhalb eines Winkels von der eben bezeichneten Art in $+1$ oder -1 münden, sei mit M' bezeichnet. Dann kann man das Resultat so aussprechen:

Satz 6. Die Wege der Menge M' werden durch die Funktion $A+B$ in Wege abgebildet, welche in den Grenzpunkten des Kreisbogens XY enden. Falls eine Kurve des Gebietes G in X oder Y endet, so entspricht ihr in A eine Kurve der Menge M .

Zu der Menge M gehört in A insbesondere seine Begrenzung, die Schnittlinie, welche A von B trennt und $+1$ mit $+\infty$ verbindet. Ihr entspricht in H der reelle Durchmesser zwischen -1 und $+1$. Ob ihr auch in G ein Weg entspricht, der in den beiden Punkten X und Y endet, oder ob der Häufungsbereich dieser Linie ganze Stücke der Kreisperipherie in Anspruch nimmt, ist bisher noch nicht entschieden. Ebenso bleibt es noch unentschieden, ob die Kurven der Fläche A , welche in die Windungspunkte bei -1 , $+1$ und ∞ hineinlaufen, Konvergenzwege sind oder nicht. Ist A ein Stück der modularen Fläche, d. h. sind auf allen Blättern von A die Punkte -1 und $+1$ Windungspunkte, so sind die Kurven, die in ihnen enden, sicher Konvergenzwege, denn $A + \bar{A}$ liefert die Modulfunktion und für sie gilt diese Behauptung. Aber es besteht immer noch die Möglichkeit, daß es Flächen A gibt, für welche die Wege, die in Windungspunkte münden, nicht Konvergenzwege sind. Wir wollen Flächen, bei denen die Kurven, die in Windungspunkte münden, zu den Konvergenzwegen gehören, *normale Flächen* nennen. Diese klären die Singularitäten, welche den Kreisbogen XY zu einer natürlichen Grenze machen, völlig auf und man kann sagen: der Bogen XY ist natürliche Grenze der zu $A + B$ inversen Funktion, weil auf ihm überall dicht transzendente Singularitäten dieser Funktion liegen.

Sollte es aber nicht normale Flächenstücke geben, dann wäre der Kreisbogen XY offenbar eine viel kompliziertere Singularität für die Umkehrfunktion von $A + B$.

Man kann eine Riemannsche Fläche von der hier betrachteten Art auch in mehrere Stücke zerlegen, indem man transzendente Verzweigungspunkte geradlinig verbindet und die Fläche längs dieser Wege aufschneidet. Betrachten wir den Fall einer Zerlegung in drei Stücke A , B , C . Die beiden äußeren sind von der vorhin betrachteten Art; das mittlere, B , dagegen hat zwei geradlinige Ufer. Auch bei ihm kann man ein Symmetrisierungsverfahren anwenden, indem man B an *beiden* Ufern spiegelt. Man erhält eine Fläche, welche wieder zwei Ufer aufweist, und kann mit der Spiegelung ins Unendliche fortfahren. Die Fläche, die man so erhält, ist wieder einfach zusammenhängend und unbegrenzt, man kann sie daher entweder auf die Ebene (punktierte Kugel) oder auf das Innere des Einheitskreises abbilden. Im ersten Fall werden die beiden Ufer auf zwei parallele Gerade, B daher auf einen Parallelstreifen abgebildet; im zweiten Fall werden die beiden Ufer auf zwei Kreisbogen abgebildet, welche zur Peripherie orthogonal stehen. Hier wird B entweder auf ein Kreisbogendreieck oder auf ein Kreisbogenviereck abgebildet,

denn die beiden Orthogonalkreise können sich berühren oder nicht. Stets ist mindestens ein Stück der Peripherie des Einheitskreises Grenze des Bildes von B und man kann hier dieselben Sätze wie vorher beweisen.

Falls wir ein Flächenstück mit drei oder mehr geradlinigen Begrenzungen durch Spiegelung erweitern, so kann nur noch der Grenzkreisfall auftreten. Dafür ist es dann möglich, daß das Bild des Stückes keine Bogen des Einheitskreises als Begrenzung hat, weil die Winkel eines Kreisbogenpolygons mit mehr als zwei Seiten sämtlich 0 sein können.

Nun wollen wir den Fall betrachten, daß $A + \bar{A}$ von der ersten Art ist und daher zu einer ganzen transzendenten Funktion gehört.

Das Gegenstück zu Satz 3 würde lauten: Falls $A + \bar{A}$ und $B + \bar{B}$ beide von der ersten Art sind, so ist auch $A + B$ von der ersten Art. Ich kann aber nur diesen Satz beweisen:

Satz 7. Falls $A + \bar{A}$ und $B + \bar{B}$ von erster Art, dagegen $A + B$ von zweiter Art ist, so besteht der Häufungsbereich der Bildkurve der Trennungslinie von A und B aus der ganzen Peripherie des Einheitskreises.

Beweis: Die Schnittlinie, welche $A + B$ in A und B trennt, ist nach Voraussetzung das Stück der reellen Axe zwischen $+1$ und $+\infty$ und diese beiden Endpunkte sind transzendente Windungspunkte der Fläche $A + B$. Das Bild, das die Funktion $A + B$ von dieser Schnittlinie entwirft, ist eine Kurve, welche innerhalb des Einheitskreises verläuft. Nun möge die Umgebung eines Stückes der Peripherie keinen Punkt dieser Bildkurve enthalten, dann kann ich auf diesem Peripheriestück zwei Punkte S und T angeben mit der Eigenschaft, daß das Kreissegment, das von der Sehne ST und dem Bogen ST begrenzt ist, keinen Punkt mit der Bildkurve gemeinsam hat. Dieses Segment ist daher Bild eines Teilgebietes von A oder eines Teilgebietes von B . Nun lassen sich aber sowohl A als B nach Voraussetzung auf eine Halbebene so abbilden, daß der einzige singuläre Punkt des Bildes im Punkte ∞ liegt. Daher würde auch unser Segment so abgebildet werden, daß dem ganzen Bogen ST nur ein Funktionswert nach der Stetigkeit entspricht, was nicht möglich ist.

(Eingegangen den 21. Oktober 1930)