

# Sur quelques configurations.

Autor(en): **Kollros, Louis**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Commentarii Mathematici Helvetici**

Band (Jahr): **2 (1930)**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-3617>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Sur quelques configurations

par LOUIS KOLLROS, Zurich

La comparaison de géométries de différentes dimensions permet de rapprocher des figures qui, au premier abord, paraissent n'avoir aucun lien commun.

Nous montrerons que la figure diagonale de l'hexaèdre complet de l'espace à 4 dimensions conduit très simplement aux 27 droites d'une surface du troisième ordre, à l'hexagramme de Pascal et à d'autres configurations plus générales.

## § 1. Le simplet et les configurations polyédrales

Le simplet d'un espace euclidien à  $n$  dimensions  $e_n$  est la figure formée par  $(n + 1)$  points indépendants et par les droites, les plans, ..., les  $e_{n-1}$  qui les joignent 2 à 2, 3 à 3, ...,  $(n - 1)$  à  $(n - 1)$ . Le simplet du plan est un triangle, celui de  $e_3$  est un tétraèdre.

Dans le plan, nous désignerons par le symbole

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right|$$

une configuration de  $a_{11}$  points et  $a_{22}$  droites telle que  $a_{12}$  droites passent par chaque point et que chaque droite contienne  $a_{21}$  points.

*Exemples:* Un triangle  $\left| \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{array} \right|$ , la configuration de Desargues  $\left| \begin{array}{cc} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{array} \right|$  formée de deux triangles perspectifs, du centre d'homologie et des trois points sur l'axe; un polygone complet à  $n$  sommets  $\left| \begin{array}{cc} n & n - 1 \\ 2 & (n)_2 \end{array} \right|$  ou à  $n$  côtés  $\left| \begin{array}{cc} (n)_2 & 2 \\ n - 1 & n \end{array} \right|$ , en désignant par  $(n)_2 = \frac{n(n-1)}{2}$  le nombre de combinaisons de  $n$  objets 2 à 2.

Dans l'espace à 3 dimensions, on représentera par le symbole

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

une configuration de  $a_{11}$  points,  $a_{22}$  droites et  $a_{33}$  plans telle que chaque point soit sur  $a_{12}$  droites et  $a_{13}$  plans; chaque droite est sur  $a_{23}$  plans et contient  $a_{21}$  points; dans chaque plan, il y a  $a_{31}$  points et  $a_{32}$  droites.

*Exemples:* Un polyèdre complet à  $n$  sommets ou à  $n$  faces

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & (n-1)_2 \\ 2 & (n)_2 & n-2 \\ 3 & 3 & (n)_3 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} (n)_3 & 3 & 3 \\ n-2 & (n)_2 & 2 \\ (n-1)_2 & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Si, dans le symbole d'une configuration de  $e_3$ , on supprime la troisième ligne et la troisième colonne, on obtient le symbole de la *projection* de la figure de l'espace sur un plan. Si, au contraire, on supprime la première ligne et la première colonne, on a le symbole de la *section plane* de la figure spatiale.

De même, en coupant par un  $e_3$  les arêtes, les plans et les solides de la figure formée par  $n$  points indépendants d'un  $e_4$ , on a une configuration dont le symbole est

$$\begin{vmatrix} (n)_2 & n-2 & (n-2)_2 \\ 3 & (n)_3 & n-3 \\ 6 & 4 & (n)_4 \end{vmatrix}.$$

Pour  $n=6$ , c'est la configuration des tétraèdres perspectifs, dont les 15 points sont 3 à 3 sur 20 droites situées elles-mêmes 4 à 4 dans 15 plans. On peut l'obtenir aussi en projetant le simplet de  $e_5$  sur un  $e_4$  et en coupant cette projection par un  $e_3$ .

Le symbole d'une configuration quelconque jouit de la propriété:  $a_{lm} a_{ll} = a_{ml} a_{mm}$ ; celui d'un simplet de  $e_n$  ne contient que des coefficients binomiaux différents de 1; ceux de l'exposant  $(n+1)$  figurent dans la diagonale principale; les autres (de 2 à  $n$ ) sont dans les lignes horizontales. Pour  $n=6$ , on a

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 \\ 2 & 21 & 5 & 10 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 35 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 4 & 35 & 3 & 3 \\ 5 & 10 & 10 & 5 & 21 & 2 \\ 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

On obtient la configuration  $\begin{vmatrix} 35 & 4 \\ 4 & 35 \end{vmatrix}$  en projetant celle des tétraèdres perspectifs sur un plan qui coupera en outre les droites et les plans de

la figure. Dans le carré pointillé, on a le symbole de la configuration des pentaèdres perspectifs de  $e_4$  que nous retrouverons à la fin de ce travail.

En général, si l'on projette un simplet de  $e_{n+2}$  sur un  $e_{n+1}$ , et si l'on coupe cette projection par un  $e_n$ , on obtient la configuration de 2 simplets perspectifs de  $e_n$ ; soient  $A_1 \dots A_{n+1}$  et  $A'_1 \dots A'_{n+1}$  leurs sommets; avec le centre et les  $(n+1)_2$  points sur l'espace axial, on a une configuration de  $(n+3)_2$  points. Chacun de ces points ( $A_1$  par ex.) peut être pris comme centre d'homologie; l'espace axial  $e_{n-1}$  correspondant est alors déterminé par  $A'_2 \dots A'_{n+1}$ .

Il existe une seule hyperquadrique  $q_{n-1}$  par rapport à laquelle chaque point de la configuration est le pôle de l'espace  $e_{n-1}$  correspondant. Pour  $n=2$ , le simplet de  $e_4$ , projeté sur un  $e_3$ , donne 5 points qui déterminent sur un plan une configuration  $\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}$  et une conique  $q_1$ ; toutes les  $\infty^4$  quadriques  $h_2$  passant par ces 5 points coupent le plan de  $q_1$  suivant les coniques  $h_1$  harmoniquement circonscrites à  $q_1$ . Généralement, on a le théorème de *Veronese* (Math. Ann. 19, p. 161): toutes les hyperquadriques  $h_n$  passant par  $(n+3)$  points d'un  $e_{n+1}$  coupent un  $e_n$  suivant des hyperquadriques  $h_{n-1}$  harmoniquement circonscrites à une hyperquadrique  $q_{n-1}$  de  $e_n$ .

## § 2. L'hexagramme de Pascal

Le théorème de *Pascal*, relatif à 6 points d'une conique, a été découvert en 1640; son corrélatif, le théorème de *Brianchon* est de 1806. *Steiner* a attiré l'attention des géomètres sur l'hexagone complet, en 1828 (Werke I, p. 450). Les travaux ultérieurs de *Plücker* (Crelle t. 5, p. 268), *Kirkman*, *Cayley* (Crelle, t. 41, p. 66), et *Salmon* ont été résumés et complétés par *Veronese* (Atti d. Accad. d. Lincei t. 1, 1877); le même tome des « Atti » contient un mémoire de *Cremona*, où les nombreuses propriétés de l'hexagramme s'obtiennent en projetant sur un plan 15 droites d'une surface du troisième ordre à point double, celui-ci étant le centre de projection. Mais, on arrive à une méthode plus élégante et plus générale en partant de la figure formée par 6 hyperplans de  $e_4$  ou de celle (corrélative) de 6 points de  $e_4$ , qui conduit alors à l'hexagramme complet de Brianchon.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> *Richmond*, Math. Ann. 53, p. 161.



En utilisant les symboles définis dans le § 1, on peut résumer de la façon suivante les résultats connus: Six points d'une conique joints 2 à 2 donnent 15 droites qui se coupent encore en 45 points  $I$ ; ceux-ci sont 3 à 3 sur 60 droites de Pascal  $p$ ; ces droites  $p$  se coupent 4 à 4 aux points  $I$  et forment donc avec ceux-ci la configuration  $\left| \begin{array}{cc} 45 & 4 \\ 3 & 60 \end{array} \right|$ .

Les droites  $p$  se coupent en outre 3 à 3 en 20 points  $S$  de Steiner, et aussi 3 à 3 en 60 points  $P$  de Kirkman. A chaque droite  $p$  correspond un point  $P$ . Ces 60 points  $P$  forment avec les 60 droites  $p$  une configuration  $\left| \begin{array}{cc} 60 & 3 \\ 3 & 60 \end{array} \right|$  qui, d'après Veronese, se décompose en 6 configurations  $\left| \begin{array}{cc} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{array} \right|$ . Les 20 points  $S$  sont 4 à 4 sur 15 droites  $l$  de Plücker; par chaque point  $S$  passent 3 droites  $l$ ; on a donc une configuration  $\left| \begin{array}{cc} 20 & 3 \\ 4 & 15 \end{array} \right|$ .

Quand 3 droites  $p$  se coupent en un point de Steiner  $S$ , les 3 points  $P$  correspondants sont sur une droite de Cayley  $s$ . Il y a 20 droites  $s$ ; chacune contient 3 points  $P$  et un point  $S$ . Enfin, les 20 droites de Cayley passent 4 à 4 par 15 points  $L$  de Salmon et forment une configuration  $\left| \begin{array}{cc} 15 & 4 \\ 3 & 20 \end{array} \right|$ . Les 35 points  $S$  et  $L$  et les 35 droites  $s$  et  $l$  donnent la configuration  $\left| \begin{array}{cc} 35 & 4 \\ 4 & 35 \end{array} \right|$ .

Pour préciser, désignons les six points de la conique par 1, 2, 3, 4, 5, 6. Par 1 et 2 passent 9 côtés; les six autres coupent le côté 12 en six points  $I$ ; il y a donc en tout  $\frac{6 \cdot 15}{2} = 45$  points  $I$ . Les trois points (12—45), (23—56), (34—61) sont sur une droite  $p$ . Si l'on permute cycliquement les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6, ou si l'on renverse leur ordre, on obtiendra la même droite  $p$ ; il y a donc  $\frac{6!}{12} = 60$  droites  $p$ .

Par le point (12—45) passent les 4 droites  $p$  qui correspondent aux 4 numérotations: 123456, 126453, 123546, 126543. Désignons par  $T$  un triangle qui contient sur ses côtés les 6 points 123456; ses sommets sont des points  $I$ . Il y a 15 triangles  $T$ , autant que de groupements possibles de 6 points en 3 paires. Chaque côté (12) appartient à 3  $T$ : 12 . 34 . 56, 12 . 35 . 46, 12 . 36 . 45. Deux  $T$  forment un couple, quand ils n'ont pas de côté commun: 12 . 34 . 56, 13 . 26 . 45. Trois  $T$  forment

un *terne* quand, 2 à 2, ils n'ont pas de côté commun: les deux  $T$  précédents et  $14 \cdot 25 \cdot 36$ .

Considérons un  $T$ :  $12 \cdot 34 \cdot 56$ ; il y a six  $T$  qui ont avec lui un côté commun; les huit autres forment des couples avec le premier. Avec ces huit  $T$ , on peut faire  $\frac{4 \cdot 8}{2} = 16$  couples, car chacun d'eux forme un couple avec 4 autres; le premier  $T$  intervient donc dans 16 ternes.

Ainsi, un  $T$  intervient dans huit couples; il y a donc  $\frac{8 \cdot 15}{2} = 60$  couples; un  $T$  intervient dans 16 ternes; il y a donc  $\frac{16 \cdot 15}{3} = 80$  ternes.

Envisageons un couple ( $12 \cdot 34 \cdot 56$ ,  $13 \cdot 25 \cdot 46$ ); avec les 9 autres côtés on peut faire un terne d'une seule manière. ( $14 \cdot 26 \cdot 35$ ,  $15 \cdot 36 \cdot 24$ ,  $16 \cdot 23 \cdot 45$ ). Les 5  $T$  ainsi obtenus donnent, 2 à 2, 10 couples et, 3 à 3, 10 ternes; nous appellerons leur ensemble une *quine*. Il y a 6 *quines*, puisqu'il y a 60 couples et que chaque quine a 10 couples.

Chaque  $T$  appartient à 2 quines, car chaque quine contient 5 des 15  $T$ ;  $\frac{6 \cdot 5}{15} = 2$ . Si l'on désigne les 6 quines par  $A, B, C, D, E, F$ , un triangle  $T$  pourra être représenté par les lettres des deux quines auxquelles il appartient. Deux  $T$  d'un couple appartiennent à une même quine; leurs symboles ont donc une lettre commune; à chaque couple  $AB \cdot BC$  correspond une seule droite de Pascal  $p$ ; nous la désignerons par  $AB \cdot BC$ . On prouve alors facilement que:

Les 3 droites  $AB \cdot BC$ ,  $BC \cdot CA$ ,  $CA \cdot AB$ , se coupent en un point  $ABC$ : un des 20 *points de Steiner*:  $S$ .

Les 4 points  $ABC$ ,  $ABD$ ,  $ABE$ ,  $ABF$  sont sur une droite: une des 15 *droites de Plücker*:  $l$ .

Les 3 droites  $AB \cdot AC$ ,  $AC \cdot AD$ ,  $AD \cdot AB$ , se coupent en un point  $A \cdot EF$ : un des 60 *points de Kirkman*:  $P$ .

Les 3 points  $A \cdot BC$ ,  $B \cdot CA$ ,  $C \cdot AB$  sont sur une droite  $abc$ : une des 20 *droites de Cayley*  $s$ .

Les 4 droites  $abc$ ,  $abd$ ,  $abe$ ,  $abf$  se coupent en un point: un des 15 *points de Salmon*:  $L$ .

Deux triangles  $T$  d'une quine  $AB$ ,  $AC$  déterminent une droite de Pascal  $p$ ; les 3 autres triangles:  $AD$ ,  $AE$ ,  $AF$  déterminent le point de Kirkman  $A \cdot BC$  correspondant à  $p$ .

La dualité, constatée par Hesse et Veronese, peut s'exprimer ainsi:

Sur chaque $p$ , il y a: 1 $S$ , 3 $P$	Par chaque $P$ , il y a: 1 $s$ , 3 $p$
Sur chaque $s$ , il y a: 1 $S$ , 3 $P$ , 3 $L$	Par chaque $S$ , il y a: 1 $s$ , 3 $p$ , 3 $l$
Sur chaque $l$ , il y a: 4 $S$ ,	Par chaque $L$ , il y a: 4 $s$ .

Malgré cette symétrie, la figure est encore bien enchevêtrée dans le plan. L'hexaèdre complet de l'espace à 4 dimensions (§ 5) conduira d'une façon intuitive, non seulement à ces résultats (ou plutôt aux corrélatifs), mais encore à d'autres plus généraux.

Comme d'ailleurs l'hexaèdre de  $e_4$  est intimement lié aux 27 droites d'une surface du troisième ordre, nous examinerons brièvement cette configuration bien connue dans le paragraphe suivant.

### § 3. Le double-six et les deux configurations de 27 droites

Désignons par 12345 cinq droites, gauches 2 à 2, ayant une transversale commune  $6'$ . Chaque groupe de 4 droites 1234 a alors une deuxième transversale  $5'$ , différente de  $6'$ ; les 5 droites  $1' 2' 3' 4' 5'$  que l'on obtient ainsi *coupent une même droite* 6.

Pour démontrer ce théorème du double-six (de *Schläfli*), il suffit de faire voir que la transversale  $t$  de  $1' 2' 3' 4'$ , différente de 5, coïncide avec celle  $t_1$  de  $1' 2' 3' 5'$ , différente de 4. Nous prouverons que  $t$  et  $t_1$  coupent la droite  $1'$  en son point d'intersection  $A$  avec le plan  $(23') (2' 3) (16')$  et la droite  $2'$  en son point d'intersection  $B$  avec le plan  $(31') (3' 1) (26')$ .

En effet, les 2 quadriques 235 et  $2' 3' 4'$  ont en commun les 2 génératrices  $4'$  et 5; donc le reste de l'intersection est dans un plan, auquel appartiennent les points  $(23')$   $(2' 3)$  et  $(16')$ , puisque 1 et  $6'$  sont respectivement des transversales de  $2' 3' 4'$  et de 235;  $1'$  (transversale de 235) et  $t$  (transversale de  $2' 3' 4'$ ) se coupent aussi dans ce plan.

En partant des 2 quadriques 234 et  $2' 3' 5'$ , on voit que  $t_1$  (transversale de  $2' 3' 5'$ ) passe par le même point  $A$ .

On démontre de même que le point  $B$  commun à la droite  $2'$  et au plan  $(31') (3' 1) (26')$  appartient à  $t$  et  $t_1$ . Donc  $t = t_1$ .

Les 12 droites d'un double-six forment une configuration

$$\left| \begin{array}{cc} 30 & 2 \\ 5 & 12 \end{array} \right|.$$

Nous savons que les 4 points  $(23')$ ,  $(2' 3)$ ,  $(16')$  et  $(1' 6)$  sont dans un plan; les 2 droites  $\overline{23} = (23') (2' 3)$  et  $\overline{16} = (16') (1' 6)$  se coupent donc

et il en est de même de deux quelconques des quinze droites  $\overline{12}, \dots, \overline{56}$  dont les symboles renferment 4 chiffres différents. Ces quinze droites se coupent donc 3 à 3 en quinze points et forment une configuration

$$\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$$

nous la désignerons par  $\overline{c}$ .

Ensemble, les 27 droites forment une configuration

$$\overline{s} = \begin{vmatrix} 45 & 3 \\ 5 & 27 \end{vmatrix}.$$

Les 3 droites de chacun des vingt groupes des types: 1,  $\overline{12}$ , 2' ou 1',  $\overline{12}$ , 2 et des quinze groupes du type  $\overline{12}$ ,  $\overline{34}$ ,  $\overline{56}$  se coupent en un point.

Chacune des 27 droites en coupe 10 autres. Il y a encore 35 autres

doubles-six: 20 du type  $\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \overline{56} & \overline{64} & \overline{45} \\ \overline{23} & \overline{31} & \overline{12} & 4' & 5' & 6' \end{array} \right)$

et 15 du type  $\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 1' & \overline{23} & \overline{24} & \overline{25} & \overline{26} \\ 2 & 2' & \overline{13} & \overline{14} & \overline{15} & \overline{16} \end{array} \right).$

*Schur* a démontré (Math. Ann. 18 p. 1) qu'il existe une quadrique par rapport à laquelle les six droites 123456 sont respectivement les polaires des droites 1' 2' 3' 4' 5' 6'. A la droite  $\overline{12}$  qui joint les deux points (12') et (1' 2) correspondra la droite 12 commune aux deux plans 12' et 1' 2. Les 15 droites 12, ..., 56 forment avec les 12 droites du double-six  $\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' \end{array} \right)$  une configuration  $s$  (corrélative de  $\overline{s}$ ) de 27 droites qui sont 3 à 3 dans 45 plans: c'est la figure déterminée par les 27 droites et les 45 plans tritangents de la surface générale du troisième ordre.

#### § 4. L'hexaèdre complet de $e_4$ et les 27 droites de $e_3$

L'hexaèdre de  $e_4$  est la figure formée par la projection sur  $e_4$  d'un simplet de  $e_5$ ; elle a six sommets 123456, quinze côtés (12), ....., vingt faces (123), ....., quinze solides (1234), ... et peut être représentée par le symbole:

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 10 & 10 \\ 2 & 15 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 20 & 3 \\ 4 & 6 & 4 & 15 \end{vmatrix}.$$

Les deux faces opposées (123) et (456) ont un point commun. L'arête (12) et le solide (3456) dont les symboles comprennent ensemble les six chiffres sont aussi *opposés*; ils se coupent en un *point diagonal* que nous désignerons par deux chiffres: 12. Il y a *quinze points diagonaux*

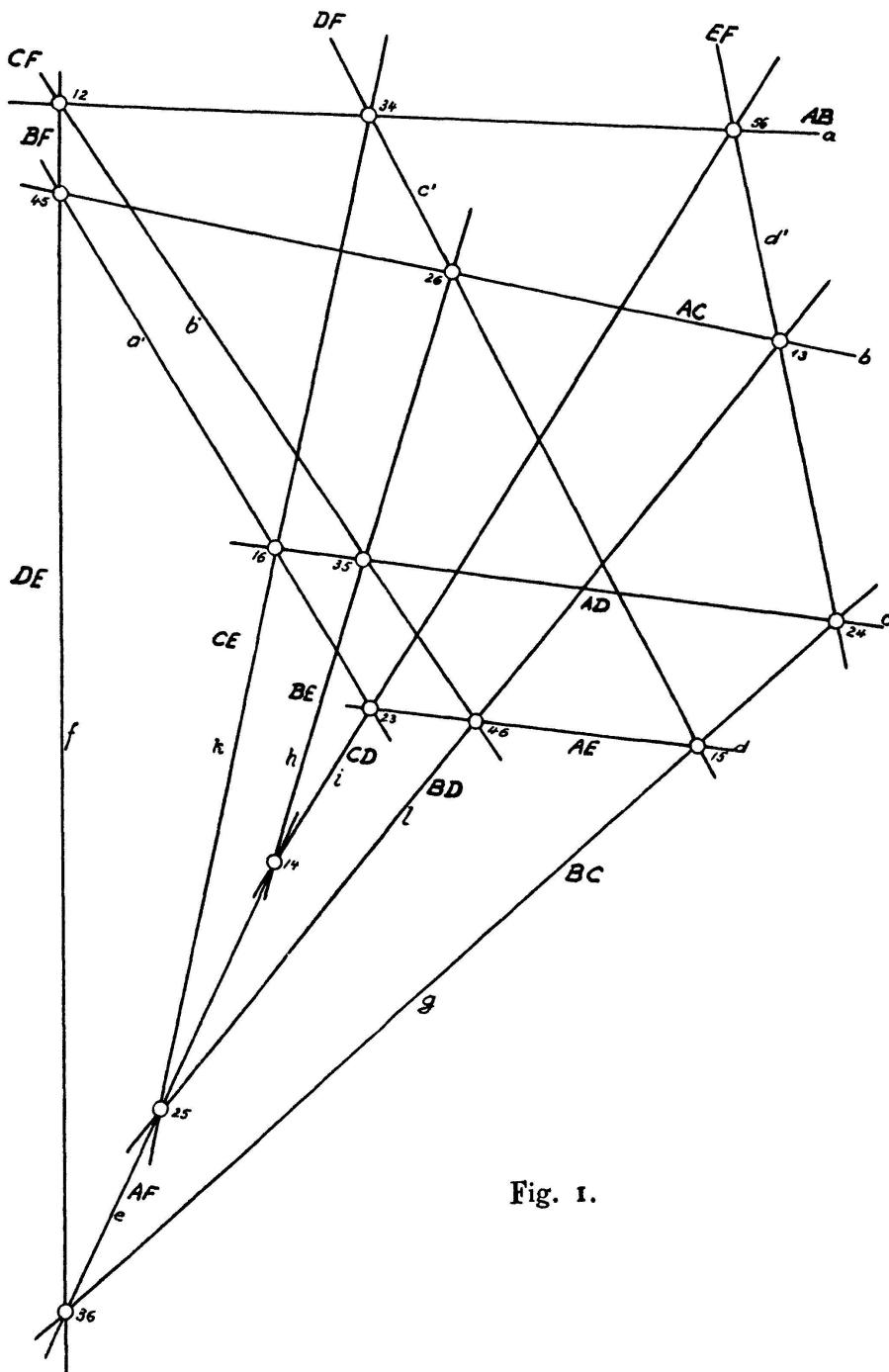


Fig. 1.

qui sont 3 à 3 sur quinze droites. En effet, les 3 points diagonaux 12, 34, 56, sont respectivement dans les 3 solides (3456), (5612), (1234) qui se coupent suivant une droite; nous l'appellerons une *transversale* de l'hexaèdre. Par un point diagonal 12, il passe 3 transversales 12, 34, 56; 12, 35, 46; 12, 36, 45. Il y a en tout 15 transversales autant que de groupements de six chiffres en 3 paires.

Le symbole de la configuration des quinze points diagonaux et des quinze transversales est  $\left| \begin{array}{cc} 15 & 3 \\ 3 & 15 \end{array} \right|$ ; nous l'appellerons la *figure diagonale* de l'hexaèdre (fig. 1). Sa projection sur un  $e_3$  est évidemment la configuration  $\bar{c}$  du paragraphe 3. Nous trouverons bientôt le double-six qui, avec  $\bar{c}$ , forme la configuration  $\bar{s}$  des 27 droites.

Montrons d'abord comment on peut arriver directement à la figure diagonale, indépendamment de l'hexaèdre. Soient  $a, b, c, d$  quatre droites quelconques de  $e_4$ ;  $b, c, d$  ont une seule transversale commune  $a'$ . Soient de même  $b', c', d'$  les transversales de  $cda, dab, abc$ . Les huit droites  $abcd, a'b'c'd'$  se coupent en douze points. On trouve facilement les 7 autres droites et les 3 autres points de la figure diagonale. En effet, le point  $ab'$ , qui est sur  $a$  et sur la transversale  $b'$  de  $cd$ , appartient aux deux solides  $ab$  et  $cd$ ; il en est de même des 3 points  $a'b, cd'$  et  $c'd$ . Les deux droites  $f = ab' - a'b$  et  $g = cd' - c'd$ , qui sont dans le plan commun aux deux solides  $ab$  et  $cd$ , se coupent en un point  $fg$ . De même, les deux paires de droites  $h = bc' - b'c$  et  $i = ad' - a'd$ ,  $k = ca' - c'a$  et  $l = bd' - b'd$  se coupent aux points  $hi$  et  $kl$ . De plus, les 3 points  $fg, hi, kl$  sont sur la droite  $e$ , commune aux 4 solides  $aa', bb', cc', dd'$ . En effet, le point  $fg$  est sur  $f = ab' - a'b$ , donc dans  $aa'$  et  $bb'$  et en outre sur  $g = cd' - c'd$ , donc dans  $cc'$  et  $dd'$ . Les deux autres points  $hi$  et  $kl$  sont aussi dans ces 4 solides, qui passent donc par la même droite.

Ainsi, à l'aide des 4 droites  $abcd$ , nous en avons déterminé une cinquième  $e$ , qui ne coupe pas les 4 premières. Ces 5 droites sont dites *associées*; quatre quelconques d'entre elles déterminent la cinquième. En partant de  $a'b'c'd'$ , on arrive à la même droite  $e$ ;  $a'b'c'd'e$  forment aussi un *quintuple* de droites associées. L'une quelconque des 15 droites est coupée par 6 d'entre elles: les huit autres forment deux groupes de quatre associées à la première. La configuration contient en tout  $\frac{15 \cdot 2}{5} = 6$  quintuples. Si l'on désigne chaque droite par deux lettres, comme l'indique la figure 1, les symboles des 5 droites appartenant à un même quintuple ont une lettre commune. On aura les

6 quintuples :  $A = abcde$ ,  $B = aa'ghl$ ,  $C = bb'ikg$ ,  $D = cc'lfi$ ,  $E = dd'hkf$ ,  $F = a'b'c'd'e$ . Chacune des 15 droites appartient à deux quintuples. Segre a démontré (Atti Acc. Torino 22, p. 791 ; Rend. circ. mat. Palermo 2, p. 45) que tous les  $\infty^2$  plans coupant 4 droites d'un quintuple rencontrent aussi la cinquième. Il y a six systèmes de plans correspondant aux six quintuples de droites. Par un point quelconque  $o$ , on peut mener deux plans de chaque système ; désignons ces 12 plans par  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$ ,  $\delta\delta'$ ,  $\varepsilon\varepsilon'$ ,  $\varphi\varphi'$  ; on prouve facilement (à l'aide des propriétés de la figure corrélative, dans  $e_4$ , des deux systèmes de génératrices d'une quadrique) que, si les plans  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \varphi$  d'une part et  $\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon', \varphi'$  d'autre part, ne se coupent qu'au point  $o$ , les paires de plans  $\alpha\beta' - \alpha'\beta, \dots, \varepsilon\varphi' - \varepsilon'\varphi$  se coupent suivant une droite passant par  $o$  et rencontrant respectivement les droites  $AB, \dots, EF$  ; sur la droite  $AF$ , par ex., il y a d'abord les 3 points par lesquels passent les 3 paires de droites  $(BC, DE), (BD, EC), (BE, CD)$  et de plus les deux points où se coupent les couples de plans  $\alpha\varphi'$  et  $\alpha'\varphi$ . Si l'on projette sur un  $e_3$  à partir de  $o$ , les traces des 12 plans forment le double-six qui, complété par la figure  $\bar{c}$ , donne la configuration  $\bar{s}$  des 27 droites. Si l'on désigne les traces par les mêmes lettres que les plans correspondants, on voit que la droite  $\alpha$  par ex. est coupée par les 5 droites  $\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\varphi'$  etc.

Si l'on veut arriver directement à la configuration  $s$  (corrélative de  $\bar{s}$ ) des 27 droites d'une surface du troisième ordre, il faut partir de 6 solides indépendants de  $e_4$  ; cet hexaèdre de solides a 15 plans transversaux que l'on peut grouper en 6 quintuples. Toute droite rencontrant 4 plans d'un quintuple coupe aussi le cinquième. On a donc six systèmes de  $\infty^2$  droites ; un  $e_3$  quelconque contient deux droites de chaque système ; les 12 droites ainsi obtenues forment un double-six. Les 15 autres droites sont les intersections de  $e_3$  avec les 15 plans transversaux.

*Remarque :* L'espace déterminé par les deux droites  $a$  et  $b$  contient encore les 4 autres droites  $c'd'fg$ , qui sont avec  $ab$  six génératrices d'une quadrique (fig. 1) ; il y a dix de ces espaces ; si on les coupe par un  $e_3$  ainsi que les 15 droites, on voit qu'il existe dans l'espace à 3 dimensions une configuration de 15 points qui sont 6 à 6 sur 10 coniques dont les plans passent 4 à 4 par les 15 points.

## § 5. L'hexaèdre de $e_4$ et l'hexagramme de $e_2$

Si l'on projette sur un plan une section spatiale de la configuration des 15 plans transversaux de l'hexaèdre de solides, la projection jouit

des mêmes propriétés que l'hexagramme de Pascal. Corrélativement, si l'on projette sur un  $e_3$  la figure diagonale de l'hexaèdre de points et que l'on coupe ensuite cette projection  $\bar{c}$  par un plan  $e_2$ , on a une configuration ayant toutes les propriétés de l'hexagramme de Brianchon.

Considérons, en effet, les 15 points de la configuration  $\bar{c}$  (fig. 1). Appelons droite de Brianchon toute droite de jonction de deux points dont les symboles ont un chiffre commun, par ex. 12—13. Il y a 60 droites de Brianchon  $p$ . Désignons par  $I$  tout plan joignant trois points dont les symboles ont cinq des six chiffres, par ex. 12 . 13 . 56; il y a 45 plans  $I$ . Chaque plan  $I$  contient 4 droites  $p$  (12—13, 12—24, 13—34, 24—34); chaque droite  $p$  est située dans 3 plans  $I$  (12 . 13 . 45, 12 . 13 . 56, 12 . 13 . 46).

On a donc dans le plan sécant  $e_2$  une configuration  $\left| \begin{array}{cc} 60 & 3 \\ 4 & 45 \end{array} \right|$ .

Un plan de Kirkman  $P$  passe par trois points dont les trois symboles ont un chiffre commun: 12 . 13 . 14. Il y a 60 plans  $P$  contenant chacun 3 droites  $p$  (12—13, 12—14, 13—14) et chaque droite  $p$  est dans 3 plans  $P$ .

Si l'on joint les cinq points 12, 13, 14, 15, 16 deux à deux par des droites  $p$  et 3 à 3 par des plans  $P$ , on a une quine (§ 2); il y a en tout 6 quines. La configuration  $\left| \begin{array}{cc} 60 & 3 \\ 3 & 60 \end{array} \right|$  des droites  $p$  et des plans  $P$  se décompose en 6 quines  $\left| \begin{array}{cc} 10 & 3 \\ 3 & 10 \end{array} \right|$ ; chacune correspond à l'un des 6 chiffres.

Les arêtes et les faces de l'hexaèdre sont respectivement les 15 droites de Plücker  $l$  et les 20 plans de Steiner  $S$ . Chaque plan  $S$  contient trois droites  $p$  (12-13, 12-23, 13-23) et trois droites  $l$ . Quatre plans  $S$  passent par chaque droite  $l$ . Chaque droite  $p$  (12-13) est située dans un plan  $S$  et dans 3 plans  $P$ .

Il reste à trouver les droites de Cayley  $s$  et les plans de Salmon  $L$ . Soit 123 le point d'intersection des 2 faces opposées (123) et (456); c'est le point commun aux droites joignant chaque sommet du triangle 1, 2, 3 au point diagonal du côté opposé (fig. 2). La polaire  $s$  du point 123 par rapport au triangle est une droite de Cayley; elle joint les trois points  $\overline{12}$ ,  $\overline{13}$  et  $\overline{23}$  respectivement conjugués harmoniques des points diagonaux 12, 13 et 23 par rapport aux deux sommets correspondants de l'hexaèdre.



Les 6 points harmoniques  $\overline{12}$ ,  $\overline{13}$ ,  $\overline{14}$ ,  $\overline{23}$ ,  $\overline{24}$ ,  $\overline{34}$  sont dans un plan de Salmon  $L$ ; ce sont les sommets d'un quadrilatère complet dont les côtés

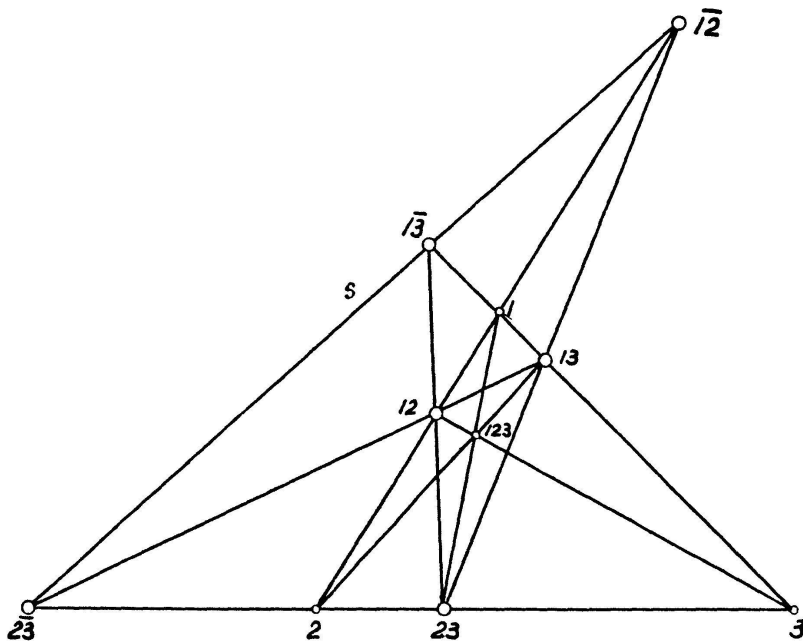


Fig. 2.

sont des droites  $s$ . Il y a 20 droites  $s = (\overline{12}, \overline{13})$  et 15 plans  $L = (\overline{12}, \overline{13}, \overline{14})$ . Dans tout plan  $S$  et dans tout plan  $P$  il n'y a qu'une droite  $s$ . Dans chaque plan  $L$ , il y a 4 droites  $s$ . Par chaque droite  $s = (\overline{12}, \overline{13})$ , il passe un seul plan  $S = (123)$ , mais trois plans  $L (\overline{12}, \overline{13}, \overline{14}), (\overline{12}, \overline{13}, \overline{15}), (\overline{12}, \overline{13}, \overline{16})$  et trois plans  $P (14, 24, 34), (15, 25, 35), (16, 26, 36)$ .

On retrouve donc immédiatement, dans le plan sécant  $e_2$ , une configuration jouissant de toutes les propriétés de l'hexagramme de Brianchon.

On voit, de plus, que ces propriétés appartiennent encore à d'autres groupes de 15 points ou de 15 droites que ceux qui dépendent de 6 tangentes ou de 6 points d'une conique; par ex. à 15 des 28 tangentes doubles d'une courbe plane du quatrième degré, car on sait (théorème de Geiser) que 27 de ces tangentes sont les projections des 27 droites d'une surface du troisième ordre à partir d'un de ses points  $o$ , la 28<sup>ième</sup> étant la trace du plan tangent en  $o$  sur le plan de projection.

*Remarque:* Les 6 sommets de l'hexaèdre et les 15 points harmoniques  $\overline{12}, \dots$  forment la configuration de deux pentaèdres perspectifs de  $e_4$  (§ 1); on l'obtient en projetant le simplet de  $e_6$  sur un  $e_5$  et en coupant cette projection par un  $e_4$ . D'après le théorème de Veronese,

les hyperquadriques  $h_4$  passant par les 7 points de  $e_5$  coupent  $e_4$  suivant des hyperquadriques  $h_3$  harmoniquement circonscrites à une hyperquadrique  $q_3$  de  $e_4$ . La dualité exprimée par les notations précédentes n'est autre chose qu'une polarité relative à cette quadrique  $q_3$ . Ainsi le point  $\overline{12}$  est le pôle du solide (3456); le sommet 1 est le pôle du solide contenant les 10 points harmoniques des 10 arêtes joignant les 5 points 23456. La droite  $s = \overline{12}, \overline{13}, \overline{23}$  est la polaire du plan  $S = (456)$ . L'arête  $l$ , joignant les sommets 5 et 6, est la polaire du plan  $L = \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}$ . La droite  $p = 15, 16, \overline{56}$  est la polaire du plan  $P = \overline{23}, \overline{34}, \overline{24}, 12, 13, 14$ . La transversale  $12. 34. 56.$  est la polaire du plan  $\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}$ . Les 15 points harmoniques forment l'intersection complète des 6 solides polaires des sommets 123456 de l'hexaèdre.

(Reçu le 20 juin 1930)