Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 89 (2014)

Artikel: Le système d'Euler de Kato en famille (I)
Autor: Wang, Shanwen
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515687

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 89 (2014), 819–865
DOI 10.4171/CMH/335

Commentarii Mathematici Helvetici
© Swiss Mathematical Society

Le système d'Euler de Kato en famille (I)

Shanwen Wang

Résumé. Ce texte est le premier article d'une série d'articles sur une généralisation de système d'Euler de Kato. Il est consacré à la construction d'une famille de systèmes d'Euler de Kato et à la construction d'une famille de lois de réciprocité sur l'espace des poids $\mathscr{W}$, qui interpolent les objets classiques.

Abstract. This article is the first article of a serie of articles on the generalization of Kato's Euler system. The main subject of this article is to construct a family of Kato's Euler systems and a family of Kato's explicit reciprocity laws over the weight space $\mathscr{W}$, which interpolate the corresponding classical objects.

Classification mathématique par sujets (2010). 11F75, 11F12.

Mots-clefs. Forme modulaire p-adique, système d'Euler, loi de réciprocité explicite.

Table des matières

1 Introduction . . . 820
  1.1 Notations . . . 820
  1.2 Le système d'Euler de Kato . . . 821
  1.3 Une famille de systèmes d'Euler de Kato sur l'espace des poids . . . 822
  1.4 La distribution d'Eisenstein . . . 823
  1.5 La loi de réciprocité explicite de Kato en famille . . . 823
2 Famille de systèmes d'Euler de Kato sur l'espace $\mathscr{W}$ . . . 826
  2.1 Groupe rigide analytique p-adique et caractère universel . . . 826
  2.2 Famille de représentations de Banach sur $\mathscr{W}$ et ses tordues . . . 827
  2.3 Famille de systèmes d'Euler de Kato sur l'espace des poids . . . 833
3 Une famille de distributions d'Eisenstein . . . 836
  3.1 Séries d'Eisenstein–Kronecker et la distribution $z_{\mathrm{Eis},c,d}(k,j)$ . . . 836
  3.2 Famille p-adique de séries d'Eisenstein . . . 840
4 La loi de réciprocité explicite de Kato en famille . . . 844
  4.1 Préliminaire . . . 844
  4.2 L'application exponentielle duale de Kato en famille . . . 850
  4.3 Application à la famille de systèmes d'Euler de Kato . . . 857
Références . . . 864

1. Introduction

1.1. Notations. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, et on fixe, pour tout nombre premier p, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$, ainsi qu'un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Si $N \in \mathbb{N}$, on note ζ_N la racine N-ième de l'unité $e^{2i\pi/N} \in \overline{\mathbb{Q}}$, et on note $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}$, réunion des $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, pour $N \geq 1$, ainsi que $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$ l'extension cyclotomique de $\mathbb{Q}_p$, réunion de $\mathbb{Q}_p(\zeta_N)$, pour $N \geq 1$.

Objets adéliques. Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers de $\mathbb{Z}$ et $\widehat{\mathbb{Z}}$ le complété profini de $\mathbb{Z}$, alors $\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$. Soit $\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ l'anneau des adèles finis de $\mathbb{Q}$. Si $x \in \mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$, on note x_p (resp. $x^{]p[}$) la composante de x en p (resp. en dehors de p). Notons $\widehat{\mathbb{Z}}^{]p[} = \prod_{l\neq p} \mathbb{Z}_l$. On a donc $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_p \times \widehat{\mathbb{Z}}^{]p[}$. Cela induit les décompositions suivantes : pour tout $d \geq 1$,

$$\mathbf{M}_d(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}) = \mathbf{M}_d(\mathbb{Q}_p) \times \mathbf{M}_d(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}^{]p[})$$

et

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}) = \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}^{]p[}).$$

On définit les sous-ensembles suivants de $\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ et de $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$:

$$\widehat{\mathbb{Z}}^{(p)} = \mathbb{Z}_p^* \times \widehat{\mathbb{Z}}^{]p[} \text{ et } \mathbf{M}_2(\widehat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathbf{M}_2(\widehat{\mathbb{Z}}^{]p[}),$$
$$(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \mathbb{Z}_p^* \times (\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}^{]p[}) \text{ et } \mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^{(p)} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \times \mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}^{]p[}).$$

Formes modulaires. Soient A un sous-anneau de $\mathbb{C}$ et Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note $\mathcal{M}_k(\Gamma, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires de poids k pour Γ. On note aussi $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ le sous-A-module de $\mathcal{M}_k(\Gamma, \mathbb{C})$ des formes modulaires dont le q-développement est à coefficients dans A. On pose $\mathcal{M}(\Gamma, A) = \oplus_{k=0}^{+\infty} \mathcal{M}_k(\Gamma, A)$, et on note $\mathcal{M}_k(A)$ (resp. $\mathcal{M}(A)$) la réunion des $\mathcal{M}_k(\Gamma, A)$ (resp. des $\mathcal{M}(\Gamma, A)$), où Γ décrit tous les sous-groupes d'indice fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On peut munir l'algèbre $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ d'une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+ = \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) | \det \gamma > 0\}$ de la façon suivante :

$$f * \gamma = (\det \gamma)^{1-k} f_{|_k} \gamma, \quad \text{pour } f \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C}) \text{ et } \gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+, \tag{1}$$

où $f_{|_k} \gamma$ est l'action modulaire usuelle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+$.

On pose :

$$\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(A) = \bigcup_{\substack{\Gamma \text{ sous-groupe} \\ \text{de congruence}}} \mathcal{M}_k(\Gamma, A) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(A) = \bigcup_k \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(A).$$

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ et soit $\overline{K}$ la clôture algébrique de K. On note Π_K le groupe des automorphismes de K-algèbres graduées de $\mathcal{M}(\overline{K})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), K)$;

c'est un groupe profini. On note $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}(\bar{\mathbb{Q}})$ engendré par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$. Plus généralement, si $S \subset \mathcal{P}$ est fini, on note $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(S)}$ le sous-groupe de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ engendré par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}^{(S)})_+$, où $\mathbb{Z}^{(S)}$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ obtenu en inversant tous les nombres premiers qui n'appartiennent pas à S. Si $f \in \mathcal{M}(\bar{K})$, le groupe de galois $\mathcal{G}_K$ agit sur les coefficients du q-développement de f ; ceci nous fournit une section de $\Pi_K \to \mathcal{G}_K$, notée par ι_K.

Le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est le groupe $\mathrm{SL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$, le complété profini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par rapport aux sous-groupes de congruence. D'autre part, soit $f \in \mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, le groupe $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agit sur les coefficients du q-développement de f à travers son quotient $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}/\mathbb{Q})$ qui est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ par le caractère cyclotomique. On note H le groupe des automorphismes de $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ sur $\mathcal{M}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Q})$. La sous-algèbre $\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est stable par $\Pi_{\mathbb{Q}}$ qui agit à travers H. Le groupe H est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ et on a le diagramme commutatif de groupes suivant (cf. par exemple [14], théorème 2.2) :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \Pi_{\bar{\mathbb{Q}}} \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_{\mathbb{Q}} \arrow[r, shift left] \arrow[d] & \mathcal{G}_{\mathbb{Q}} \arrow[l, dotted, shift left, "\iota_{\mathbb{Q}}"] \arrow[r] \arrow[d, "\chi_{\mathrm{cycl}}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{SL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \arrow[r] & \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) \arrow[r, shift left, "\det"] & \widehat{\mathbb{Z}}^* \arrow[l, dotted, shift left, "\iota"] \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

où la section $\iota_{\mathbb{Q}}$ de $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ dans $\Pi_{\mathbb{Q}}$ décrite plus haut envoie $u \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ sur la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$.

1.2. Le système d'Euler de Kato. En bref, un système d'Euler est une collection de classes de cohomologie vérifiant une relation de distribution. La construction du système d'Euler de Kato dans [10], [4] ou [14] est comme suit :

À partir des unités de Siegel, on construit une distribution algébrique $z_{\mathbf{Siegel}}$ sur $(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^2 - (0,0)$ à valeurs dans $\mathbb{Q} \otimes (\mathcal{M}(\bar{\mathbb{Q}})[\frac{1}{\Delta}])^*$, où $\Delta = q \prod_{n \geq 1}(1-q^n)^{24}$ est la forme modulaire de poids 12. La distribution $z_{\mathbf{Siegel}}$ est invariante sous l'action du groupe $\Pi'_{\mathbb{Q}}$. La théorie de Kummer p-adique nous fournit un élément

$$z_{\mathbf{Siegel}}^{(p)} \in \mathrm{H}^1(\Pi'_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}((\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^2 - (0,0), \mathbb{Q}_p(1))).$$

Par cup-produit et restriction à $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)} \subset \Pi'_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^{(p)} \subset ((\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^2 - (0,0))^2$, on obtient une distribution algébrique :

$$z_{\mathbf{Kato}} \in \mathrm{H}^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{Q}_p(2))).$$

En modifiant $z_{\mathbf{Kato}}$ par un opérateur $(c^2 - \langle c, 1\rangle)(d^2 - \langle 1, d\rangle)$ (cf. §2.3.2 dans [14]) qui fait disparaître les dénominateurs, on obtient une distribution algébrique à valeurs

dans $\mathbb{Z}_p(2)$ (que l'on peut donc voir comme une mesure, notée par $z_{\mathbf{Kato},c,d}$), et une torsion à la Soulé nous fournit enfin un élément

$$z_{\mathbf{Kato},c,d}(k,j) \in \mathrm{H}^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}, V_{k,j})),$$

où $V_{k,j} = \mathrm{Sym}^{k-2} V_p \otimes \mathbb{Q}_p(2-j)$, où V_p est la représentation standard de dimension 2 de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$.

1.3. Une famille de systèmes d'Euler de Kato sur l'espace des poids. Dans la suite, on désigne par $\mathbb{I}_0(p)$ le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$

$$\left\{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \mid \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \bmod p\right\}.$$

On note $\mathbf{M}_2^{(p)} = \mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{]p[} \times \mathbb{I}_0(p)$.

On note $\mathscr{W}$ l'espace rigide analytique associé à l'algèbre d'Iwasawa $\mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^*]]$: c'est l'*espace des poids* et on dispose d'une inclusion de $\mathbb{Z} \subset \mathscr{W}$ en envoyant k sur le caractère algébrique $(z \mapsto z^{k-2})$ sur $\mathbb{Z}_p^*$. Dans §2.2, on introduit la notion de *caractère universel* (cf. définition 2.1) pour l'espace des poids. On construit une famille de représentations de Banach $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathbf{univ}}}$ de $\mathbb{I}_0(p)$ sur l'espace $\mathscr{W}$, où l'indice $\rho_j^{\mathbf{univ}}$ désigne la torsion par un 1-cocycle $\rho_j^{\mathbf{univ}}$ associé au caractère universel $\kappa^{\mathbf{univ}}$ de l'espace des poids et au caractère $\det^{-j}$ avec $j \geq 1$, qui admet une section globale ν_j interpolant les vecteurs de plus haut poids dans $V_{k,j+2}$ via une application de spécialisation $\mathbb{I}_0(p)$-équivariante $\mathbf{Sp}_{k,j}$.

On note $\widetilde{\Gamma}_0(p)$ l'image inverse de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})^{]p[} \times \mathbb{I}_0(p)$ dans $\Pi_{\mathbb{Q}}$ via l'application $\Pi_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$. Si V est un $\mathbb{Z}$-module, on note $\mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V)$ le $\mathbb{Z}$-module des mesures sur $\mathbf{M}_2^{(p)}$ à valeurs dans V. En appliquant la technique de "torsion à la Soulé" à l'élément $z_{\mathbf{Kato},c,d}$ et à la famille de représentations $(\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathbf{univ}}}, \nu_j)$ munie d'un vecteur universel de plus haut poids ν_j, on construit une famille d'éléments de Kato sur l'espace des poids

$$z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu_j) \in \mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathbf{univ}}}(2))).$$

Comme $\mathbf{Sp}_{k,j} : \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathbf{univ}}} \to V_{k,j+2}$ est $\mathbb{I}_0(p)$-équivariante, on en déduit un morphisme de $\mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathbf{univ}}}(2)))$ dans $\mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V_{k,j}))$, qui sera encore noté par $\mathbf{Sp}_{k,j}$. Notre premier résultat est que $z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu_j)$ interpole les $z_{\mathbf{Kato},c,d}(k,j)$.

Théorème 1.1 (théorème 2.19). *Si $1 \leq j \in \mathbb{N}$, alors pour tout entier $k \geq 1+j$, on a*

$$\mathbf{Sp}_{k,j}(z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu_j)) = z_{\mathbf{Kato},c,d}(k,j).$$

Remarque 1.2. D'autres éléments de Kato en famille ont été construits par Fukaya [9] (via la K-théorie) et par Delbourgo [7] (via les symboles modulaires). Par contre, notre construction consiste à reprendre la construction de Kato [10] et de Colmez [4] pour réaliser la déformation.

1.4. La distribution d'Eisenstein. Les séries d'Eisenstein–Kronecker satisfont des relations de distribution (cf. lemme 3.2). Cela permet, si $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$, de construire deux distributions algébriques $z_{\mathbf{Eis},d}(k)$ et $z'_{\mathbf{Eis},c}(k)$ sur $(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^2$ à valeurs dans $\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}})$ (cf. proposition 3.9), invariantes sous l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$ à multiplication près par une puissance de déterminant.

Soient $k \geq 2$ et $1 \leq j \leq k-1$ deux entiers. On définit

$$z_{\mathbf{Eis},c,d}(k, j) = \frac{1}{(j-1)!} z'_{\mathbf{Eis},c}(k-j) \otimes z_{\mathbf{Eis},d}(j) \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}), \mathcal{M}_k(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})),$$

en utilisant le fait que le produit de deux formes modulaires de poids i et j est une forme modulaire de poids $i+j$ et en identifiant $(\mathbb{Q}\times\widehat{\mathbb{Z}})^2 \times (\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^2$ avec $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})$.

On peut, si j est fixé, interpoler ces distributions par une distribution analytique sur l'espace des poids. On dira qu'une série formelle $F(q) = \sum_{n\in\mathbb{Q}_+} A_n q^n \in \cup_{M\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}(\mathscr{W})[[q_M]]$ est une famille p-adique de formes modulaires sur l'espace des poids $\mathscr{W}$, si pour presque tout $k \in \mathbb{N} \subset \mathscr{W}$, l'évaluation $\mathbf{Ev}_k(F(q))$ de $F(q)$ en point k soit le q-développement d'une forme modulaire classique de poids k. Dans § 3.2, si $c \in \mathbb{Z}_p^*$ et si $j \geq 1$, pour chaque $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, on construit une famille p-adique de séries d'Eisenstein $F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j)$ sur l'espace des poids, qui interpole les séries d'Eisenstein–Kronecker $F_{c,\alpha,\beta}^{(k-j)}$ en k (cf. lemme 3.13).

On note $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{O}(\mathscr{W}))$ le $\overline{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{O}(\mathscr{W})$-module des familles de formes modulaires p-adiques sur $\mathscr{W}$. De la construction de ces familles $F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j)$ et de la relation de distribution entre les $F_{c,\alpha,\beta}^{(k-j)}$, on déduit une relation de distribution pour ces familles $F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j)$, qui se traduit en une distribution algébrique $z'_{\mathbf{Eis},\mathbf{c}}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j)$ (cf. théorème 3.15). Ceci nous permet de construire une distribution (cf. § 3.2.3)

$$z_{\mathbf{Eis},c,d}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j) \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{O}(\mathscr{W}))),$$

pour $1 \leq j \in \mathbb{Z}$, qui interpole les distributions d'Eisenstein $z_{\mathbf{Eis},c,d}(k, j)$ en k.

1.5. La loi de réciprocité explicite de Kato en famille. Soit $\mathfrak{K}^+ = \mathbb{Q}_p\{\frac{q}{p}\}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q) \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$; c'est un anneau principal complet pour la valuation $v_{p,\mathfrak{K}}$ définie par la formule :

$$v_{p,\mathfrak{K}}(f) = \inf_{n\in\mathbb{N}} v_p(a_n), \quad \text{si } f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \left(\tfrac{q}{p}\right)^n \in \mathfrak{K}^+.$$

On note $\mathfrak{K}$ le complété du corps des fractions de l'anneau $\mathfrak{K}^+$ pour la valuation $v_{p,\mathfrak{K}}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ une clôture algébrique de $\mathfrak{K}$, ainsi que $\mathfrak{K}_\infty \subset \overline{\mathfrak{K}}$ la sous-extension algébrique de $\mathfrak{K}$ en rajoutant les ζ_M et les racines M-ièmes $q^{\frac{1}{M}}$ de q, pour tout $M \geq 1$. On note $\overline{\mathfrak{K}}^+$ (resp. $\mathfrak{K}_\infty^+$) la clôture intégrale de $\mathfrak{K}^+$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$ (resp. $\mathfrak{K}_\infty$).

On note $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ le groupe de Galois de $\overline{\mathfrak{K}}$ sur $\mathfrak{K}$, $P_{\mathbb{Q}_p}$ le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K}$, et $P_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cycl}}$ le groupe de Galois de $\mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K}$. L'application qui à une forme modulaire associe son q-développement, nous fournit une inclusion de $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty^+$ équivariante sous l'action de $P_{\mathbb{Q}_p}$. On en déduit ainsi un morphisme $P_{\mathbb{Q}_p} \to \Pi_{\mathbb{Q}}$, qui induit un morphisme $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}} \to \Pi_{\mathbb{Q}}$ et un morphisme "de localisation" $\mathrm{H}^i(\Pi_{\mathbb{Q}}, W) \to \mathrm{H}^i(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}, W)$ pour tout $\Pi_{\mathbb{Q}}$-module W et tout $i \in \mathbb{N}$.

La loi de réciprocité explicite de Kato consiste à relier l'élément $z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j)$, qui vit dans la cohomologie du groupe $\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}$, à une distribution construite à partir du produit de deux séries d'Eisenstein (le produit scalaire de Petersson d'une forme primitive avec un tel produit fait apparaître les valeurs spéciales de la fonction L de f, et c'est cela qui permettrait de construire la fonction L p-adique). Ceci se fait en plusieurs étapes :

• On commence par "localiser" notre classe de cohomologie à $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$ et par étendre les coefficients de $V_{k,j}$ à $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V_{k,j}$, où $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\overline{\mathfrak{K}}^+)$ est un anneau de Fontaine.

• On constate que l'image de $z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j)$ sous l'application "de localisation"

$$\mathrm{H}^2(\Pi_{\mathbb{Q}}^{(p)}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}, V_{k,j})) \to \mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V_{k,j}))$$

est l'inflation d'un 2-cocycle sur $P_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{cycl}}$ à valeurs dans $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V_{k,j})$. Les méthodes de descente presque étale de Tate [12] et Sen [11], revisitées par Faltings [8] (cf. aussi Andreatta-Iovita [1]) permettraient de montrer que c'est toujours le cas, mais une preuve directe pour l'élément de Kato est donnée dans [14], $\tilde{5}.2$.

• On construit une application exponentielle duale (cf. [14], §5.1) :

$$\begin{aligned}\exp^*_{\mathbf{Kato}} \colon \mathrm{H}^2(P_{\mathbb{Q}_p}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V_{k,j}))\\ \to \mathrm{H}^0(P_{\mathbb{Q}_p}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathcal{K}_\infty^+)),\end{aligned}$$

où $\mathcal{K}_\infty^+$ est la réunion des $\mathcal{K}_M^+$ pour tout $M \geq 1$ avec $\mathcal{K}_M^+$ le complété q-adique de la clôture intégrale $\mathfrak{K}_M^+$ de $\mathfrak{K}^+$ dans $\mathfrak{K}_M = \mathfrak{K}[\zeta_M, q_M]$; et on calcule l'image de $z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j)$.

La définition de l'application $\exp^*_{\mathbf{Kato}}$ et le calcul de l'image de $z_{\mathbf{Kato},c,d}(k, j)$ reposent sur la méthode de Tate–Sen–Colmez et sur une description explicite (cf. [14], proposition 4.10) de la cohomologie de $P_{\mathfrak{K}_M} = \mathrm{Gal}(\mathfrak{K}_{Mp^\infty}/\mathfrak{K}_M)$ avec $M \geq 1$ tel que $v_p(M) = m \geq v_p(2p)$ et $\mathfrak{K}_{Mp^\infty} = \cup_{n\geq 1}\mathfrak{K}_{Mp^n}$.

Le groupe $P_{\mathfrak{K}_M}$ est un groupe analytique p-adique de rang 2, isomorphe à

$$\mathrm{P}_m = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) : a = 1,\ c = 0,\ b \in p^m\mathbb{Z}_p,\ d \in 1 + p^m\mathbb{Z}_p\right\}.$$

On note $(u,v) \in (p^m\mathbb{Z}_p)^2$ l'élément $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix}\right)$ de P_m. Soit V une représentation *analytique* (cf. définition 4.4) de P_m, on dispose des dérivations $\partial_{m,i} : V \to V$, $i = 1,2$, définis par

$$\partial_{m,i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\gamma_i^{p^n} - 1}{p^n}, \quad \text{où} \quad \gamma_1 = (p^m, 0), \gamma_2 = (0, p^m).$$

La proposition suivante est une version entière de proposition 4.10 dans [14].

Proposition 1.3 (proposition 4.5). *Soit V une représentation analytique de P_m munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T stable sous l'action de P_m. Alors*

(1) *tout élément de $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, T)$ est représentable par un 2-cocycle analytique à p^{2m}-torsion près ;*

(2) *on a $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, T) \cong (T/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m))$, et l'image d'un 2-cocycle analytique*

$$((u,v),(x,y)) \to c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l\geq 2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l,$$

avec $p^{(i+j+k+l)m} c_{i,j,k,l} \in T$, par cet isomorphisme, est celle de

$$\delta^{(2)}(c_{(u,v),(x,y)}) = p^{2m}(c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})$$

à p^{2m}-torsion près.

En utilisant la proposition ci-dessus, on construit une application exponentielle duale en famille (cf. § 4.2) $\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}$ de

$$\mathrm{H}^2(P_{\mathbb{Q}_p}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathcal{R}^+_{Mp^\infty}) \widehat{\otimes} \mathbf{D}_{0,\rho^{\mathrm{univ}}_{j-2}}(\mathcal{W})))$$

dans $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathcal{K}^+_\infty \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\mathcal{W}))$. On calcule l'image de $z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu_j)$ sous l'application exponentielle duale $\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}$ et obtient finalement notre résultat principal, qui montre que l'application $\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}$ est une application exponentielle duale en famille :

Théorème 1.4. *Si $j \geq 1$ et si $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$, alors pour tout entier $k \geq j+1$, on a :*

(1) $\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}(z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu_j)) = z_{\mathbf{Eis},c,d}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j)$;

(2) $\mathbf{Ev}_k \circ \exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}(z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu_j)) = \exp^*_{\mathbf{Kato}} \circ \boldsymbol{Sp}_{k,j}(z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu_j))$.

Remarque 1.5. Dans [9], Fukaya a construit une fonction L p-adique en deux variables sur une famille de formes modulaires ordinaires en appliquant sa K_2-série de Coleman à son élément universel de Kato. Par ailleurs, Panchishkin [13] a donné une construction de la fonction L p-adique en deux variables sur une famille de formes modulaires non-ordinaires sans utiliser le système d'Euler de Kato. Récemment, Bellaïche [2] a construit une fonction L p-adique en deux variables sur la courbe de Hecke ("eigencurve") en utilisant la théorie de symboles surconvergents. Les résultats de cet article peuvent aider à construire une fonction L p-adique en deux variables sur la courbe de Hecke en utilisant le système d'Euler de Kato, ceci est le sujet de [15].

Remerciements. Cet article est une continuation de ma thèse sous la direction de P. Colmez. Je voudrais lui exprimer ma profonde gratitude pour sa générosité, sa disponibilité et aussi pour le temps qui m'a accordé. Je tiens également à remercier A. Iovita pour sa suggestion de travailler avec l'espace des distributions pour construire la famille de représentations de Banach. Une partie de cet article est faite pendant mon séjour à Lausanne pendant Janvier–Juin 2011, je remercie sincèrement P. Michel et la chaire de TAN de EPFL pour leur hospitalité.

2. Famille de systèmes d'Euler de Kato sur l'espace $\mathscr{W}$

2.1. Groupe rigide analytique p-adique et caractère universel. Soit G un groupe abélien discret ou un pro-p groupe abélien, topologiquement de type fini. La $\mathbb{Z}_p$-algèbre de groupe $\mathbb{Z}_p[G]$ (resp. la $\mathbb{Z}_p$-algèbre de groupe complété $\mathbb{Z}_p[[G]]$ si G est un pro-p-groupe), est naturellement une algèbre de Hopf (resp. une algèbre de Hopf complète), dont la structure de Hopf est induite par la structure de groupe de G. Alors on peut lui associer un groupe rigide analytique $\mathscr{X}$ sur $\mathbb{Q}_p$. Les $\mathbb{C}_p$-points de $\mathscr{X}$ sont l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(G, \mathbb{C}_p^*)$, des caractères continus sur G à valeurs dans $\mathbb{C}_p$.

Définition 2.1. Soit G un groupe ci-dessus et soit $\mathscr{X}$ le groupe rigide analytique associé. L'inclusion canonique $G \to \mathbb{Z}_p[G] \to \mathcal{O}(\mathscr{X})$ induit un caractère $\kappa^{\mathbf{univ}}$ de G dans $\mathcal{O}(\mathscr{X})^*$. On l'appelle le *caractère universel* du groupe rigide analytique $\mathscr{X}$.

Soit U un ouvert affinoïde de $\mathscr{X}$. Si $\kappa \in U(\mathbb{C}_p)$ est un caractère continu sur G à valeurs dans $\mathbb{C}_p^*$, on définit une application d'évaluation en point κ

$$\mathbf{Ev}_\kappa \colon \mathcal{O}(U) \to \mathbb{C}_p.$$

Par définition, on a le lemme suivant :

Lemme 2.2. *Si $\kappa \in \mathscr{X}(\mathbb{C}_p)$ est un caractère continu sur G à valeurs dans $\mathbb{C}_p^*$, on a alors*

$$\kappa = \mathbf{Ev}_\kappa \circ \kappa^{\mathbf{univ}}.$$

Exemple 2.3. On définit l'espace rigide analytique associé à l'algèbre $\mathbb{Z}_p[[T]]$ en utilisant le schéma formel affine (cf. [6], §7).

On note $\mathrm{Spf}\, \mathbb{Z}_p[[T]]$ le schéma formel. On note $A_n = \mathbb{Z}_p[[T]][\frac{T^n}{p}]$ le sous-anneau de $\mathbb{Z}_p[[T]] \otimes \mathbb{Q}_p$ et B_n le complété de A_n pour la topologie (p, T)-adique. On constate que B_n est aussi le complété p-adique de A_n :

$$B_n = \left\{ \textstyle\sum_{m=0}^{+\infty} a_m \left(\frac{T^n}{p}\right)^m : a_m \in \mathbb{Z}_p[[T]] \text{ tel que } \lim_m v_p(a_m) = +\infty \right\}.$$

Enfin, on note $C_n = B_n \otimes \mathbb{Q}_p$. Ceci nous donne un système projectif $\{C_n\}$ muni de morphismes de transition $C_{n+1} \to C_n$ induits par les inclusions $A_{n+1} \subset A_n$. Les C_n

sont des $\mathbb{Q}_p$-algèbres affinoïdes et le morphisme de transition identifie $\mathrm{Spm}(C_{n+1})$ comme un sous-domain affinoïde de $\mathrm{Spm}(C_n)$. En fait, C_n est l'anneau des fonctions analytiques sur le disque $v_p(T) \geq \frac{1}{n}$.

On définit l'espace rigide analytique $(\mathscr{W}_0, \mathcal{O})$ associé au schéma formel $\mathrm{Spf}\ \mathbb{Z}_p[[T]]$ comme la réunion croissante admissible des affinoïdes $\mathrm{Spm}(C_n)$; l'algèbre des sections globales $\mathcal{O}(\mathscr{W}_0)$ s'identifie à la limite projective $\varprojlim_n C_n$, qui est $\mathcal{R}^+$ l'anneau des fonctions analytiques sur le disque ouvert $v_p(T) > 0$.

On note $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\mathbb{Z}_p^*]]$ l'algèbre d'Iwasawa, qui est un anneau semi-local régulier, noethérien, de dimension de Krull 2. L'espace rigide analytique $\mathscr{W}$ sur $\mathbb{Q}_p$, qui lui est associé est appelé l'*espace des poids*. Les $\mathbb{C}_p$-points de $\mathscr{W}$ est l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Lambda, \mathbb{C}_p)$, des caractères continus sur $\mathbb{Z}_p^*$ à valeurs dans $\mathbb{C}_p^*$.

On note ω le caractère de Teichmüller. On a une décomposition $\mathbb{Z}_p^* \cong \mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$ donnée par la formule $z \mapsto (\omega(z), \langle z \rangle)$, qui induit la décomposition $\mathscr{W} = \mathrm{Hom}(\mu_{p-1}, \mathbb{C}_p^*) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Gamma, \mathbb{C}_p^*)$, où $\Gamma = (1 + p\mathbb{Z}_p)$. L'espace $\mathscr{W}$ admet d'un recouvrement admissible $\{W_n\}_{n\geq 1}$, où $W_n = \mathrm{Hom}(\mu_{p-1}, \mathbb{C}_p^*) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(1 + p^n\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p^*)$. En fixant un générateur $\gamma \in \Gamma$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\Gamma, \mathbb{C}_p^*) \cong \{t \in \mathbb{C}_p, v_p(t-1) > 0\},$$

en envoyant un caractère continu κ sur $\kappa(\gamma)$. En fixant un générateur (ζ, γ) de $\mu_{p-1} \times (1 + p\mathbb{Z}_p)$, le caractère universel $\kappa^{\mathbf{univ}}$ de $\mathscr{W}$ est donné par la formule $z \mapsto X_1^{\mathrm{ord}_\zeta \omega(z)} T_1^{\log_\gamma \langle z \rangle}$, où on remplace les variables ζ et γ par X_1 et T_1 respectivement. Comme $\log_\gamma \langle z \rangle = \frac{\log \langle z \rangle}{\log \gamma} \in \mathbb{Z}_p$, $T^{\log_\gamma \langle z \rangle} \in \mathbb{Z}_p[[T-1]]$.

Définition 2.4. Soit $\mathscr{X}$ un $\mathbb{Q}_p$-espace rigide.

(1) Un sous-ensemble $Z \subset \mathscr{X}$ est dit Zariski-dense si pour tout sous-ensemble analytique $U \subset \mathscr{X}$ tel que $Z \subset U$, alors $U = \mathscr{X}$.

(2) Soit $Z \subset \mathscr{X}$ un sous-ensemble Zariski-dense, tel que pour tout $z \in Z$ et tout voisinage ouvert affinoïde V de z dans $\mathscr{X}$, $V \cap Z$ est Zariski-dense dans chaque composante irréductible de V contenant z, on dira alors que Z est très Zariski-dense dans $\mathscr{X}$.

Un exemple important est que l'ensemble $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$) est très Zariski-dense dans l'espace des poids $\mathscr{W}$.

2.2. Famille de représentations de Banach sur $\mathscr{W}$ et ses tordues. Soit K un sous-corps complet de $\mathbb{C}_p$ et soit $(A, |\cdot|_A)$ une K-algèbre de Banach.

Définition 2.5. Soit M un A-module ; une norme sur M est une application $|\cdot| : M \to \mathbb{R}_+$ telle que

(1) $|m| = 0$ si et seulement si $m = 0$;

(2) $|m+n| \leq \max\{|m|, |n|\}$, si $m, n \in M$;

(3) $|am| \leq |a|_A |m|$ si $a \in A$ et $m \in M$.

On dit qu'un A-module M muni d'une norme est de Banach si M est complet pour cette norme.

Exemple 2.6. (1) Soit I un ensemble. On note $\mathcal{C}_A^b(I)$ l'ensemble des familles bornées $x = (x_i)_{i\in I}$ d'éléments de A. On munit $\mathcal{C}_A^b(I)$ de la norme $|x| = \sup_{i\in I} |x_i|$, ce qui en fait un A-module de Banach. On note $\mathcal{C}_A^0(I)$ le sous A-module de $\mathcal{C}_A^b(I)$ des suites $x = (x_i)_{i\in I}$ d'éléments de A tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies (ce que nous écrivons $x_i \to 0$ pour $i \to \infty$). C'est un A-module de Banach comme sous-A-module fermé d'un A-module de Banach. Si $A = K$ est de valuation discrète et si $|M| = |K|$, tout K-espace de Banach est de la forme $\mathcal{C}_K^0(I)$.

(2) Soient $(M, |\cdot|_M)$, $(N, |\cdot|_N)$ deux A-modules de Banach. On note $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ le A-module des morphismes continus de A-modules. On le munit de la norme suivante

$$|f| = \sup_{0\neq m\in M} \frac{|f(m)|_N}{|m|_M}, \quad \text{si } f \in \mathrm{Hom}_A(M, N),$$

ce qui en fait un A-module de Banach. En particulier, si $N = A$, $\check{M} = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ est le A-module de Banach dual de M.

(3) Soit X un espace topologique et soit M un A-module de Banach. On note $\mathcal{C}^0(X, M)$ le A-module des fonctions continues sur X à valeurs dans M muni de la topologie compact-ouvert (i.e. convergent uniformément sur tout sous-ensemble compact de X). Soit $\Gamma \subset X$ un sous-ensemble compact et soit V un sous A-module ouvert de M ; on note $U_{\Gamma,V}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}^0(X, M)$ des fonctions continues à support dans Γ et à valeurs dans V. Ceci fournit une base d'ouverts si Γ décrit les sous-ensembles compact de X et V décrit les sous-ensembles ouverts de M. Si X est compact, le A-module topologique $\mathcal{C}^0(X, M)$ est un A-module de Banach, qui est isomorphe au A-module de Banach $\mathcal{C}^0(X, K) \hat{\otimes}_K M$.

Définition 2.7. Soit M un A-module de Banach.

(1) Une base de Banach de M est une famille bornée $(e_i)_{i\in I}$ de M telle que tout élément x de M peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une série convergente $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$, où a_i sont des éléments de A tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies.

(2) Une base orthonormale de M est une base de Banach $(e_i)_{i\in I}$ de M telle que l'application $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i e_i$, de $\mathcal{C}_A^0(I)$ dans M, est une isométrie.

On dit que M est orthonormalisable si M admet une base orthonormale.

Exemple 2.8. (1) Si $i \in \mathbb{N}$, on note $\ell(i)$ le plus petit entier n vérifiant $p^n > i$. On a donc

$$\ell(0) = 0 \quad \text{et} \quad \ell(i) = \left[\frac{\log i}{\log p}\right] + 1, \quad \text{si } i \geq 1.$$

Si $r \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, A)$ le A-module des *fonctions de classe* $\mathcal{C}^r$ à valeurs dans A (c.f.[5] I.5). Comme $\mathbb{Z}_p$ est compact, on a un isomorphisme de A-modules $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, A) \cong \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, K) \widehat{\otimes}_K A$. Par ailleurs, le K-espace vectoriel $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, K)$ est un K-espace de Banach muni d'une base orthonormale $\{p^{r\ell(n)}\binom{z}{n}; n \geq 0\}$. Ceci implique que $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, A)$ est orthonormalisable. En particulier, si $r = 0$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, A)$ est le A-module des fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans A.

(2) Si $h \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A)$ l'espace des fonctions $\varphi\colon \mathbb{Z}_p \to A$ dont la restriction de φ à $a + p^h\mathbb{Z}_p$ est la restriction d'une fonction A-analytique sur le disque fermé $\{x \in \mathbb{C}_p; v_p(x - a) \geq h\}$, quel que soit $a \in \mathbb{Z}_p$; c'est aussi un A-module de Banach orthonormalisable et on a $\mathrm{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A) \cong \mathrm{LA}_h(\mathbb{Z}_p, K) \widehat{\otimes}_K A$. On a une inclusion de A-modules $\mathrm{LA}_h(\mathbb{Z}_p, A) \subset \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, A)$ pour tout $r \geq 0$ et $h \in \mathbb{N}$.

(3) Soit M un A-module de Banach orthonormalisable et soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une base orthonormale de M. On a un isomorphisme de A-modules :

$$\check{M} \cong \mathrm{Hom}_A(\mathcal{C}^0_A(I), A) \cong \mathrm{Hom}_K(\mathcal{C}^0_K(I), A).$$

On note $M^\vee$ l'image inverse de $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{C}^0_K(I), K)\widehat{\otimes}_K A$ dans $\check{M}$ sous l'isomorphisme ci-dessus, qui en fait un sous-A-module de Banach. De plus, $M^\vee$ est orthonormalisable.

Définition 2.9. Soit G un groupe topologique. Une A-représentation de Banach de G est un A-module de Banach orthonormalisable muni d'une action A-linéaire continue de G.

Exemple 2.10. (1) Soit V_0 une K-représentation de Banach de G (i.e. un K-espace de Banach muni d'une action K-linéaire continue de G). On étend l'action de G sur V_0 par A-linéarité en une action sur le A-module de Banach $V = V_0 \widehat{\otimes}_K A$, ce qui est une A-représentation de Banach de G.

(2) Soit V une A-représentation de Banach de G à droite. On suppose que V est munie d'une structure d'anneau. On note V^* le groupe des unités de V. Soit $\eta\colon G \to V^*$ un 1-cocycle (i.e. une fonction continue sur G à valeurs dans V telle que $\eta(h_1h_2) = \eta(h_1) * h_2\eta(h_2)$). On note $V(\eta)$ la A-représentation de Banach V tordue par le 1-cocycle η.

(3) Soit V une A-représentation de Banach de G à gauche. Sa A-duale $\check{V} = \mathrm{Hom}_A(V, A)$ est munie de l'action de G à droite donnée par la formule

$$f * \gamma(v) = f(\gamma v), \quad \text{si } \gamma \in G,\ f \in \check{V},\ v \in V.$$

Le sous-A-module $V^\vee$ (cf. exemple 2.8 (3)) de $\check{V}$ est stable sous cette action, et donc une A-représentation de Banach de G à droite.

Définition 2.11. Soit G un groupe topologique et soit $\mathscr{X}$ un espace rigide. Une famille $\mathscr{F}$ de représentations de Banach de G sur $\mathscr{X}$ est la donnée d'un faisceau sur $\mathscr{X}$ tel que

(1) pour tout ouvert affinoïde $V \subset \mathscr{X}$, $\mathscr{F}(V)$ soit une $\mathcal{O}(V)$-représentation de Banach de G ;

(2) si $V' \subset V$ sont des ouverts affinoïdes de $\mathscr{X}$, l'application canonique

$$\mathscr{F}(V) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(V)} \mathcal{O}(V') \to \mathscr{F}(V')$$

soit un isomorphisme de $\mathcal{O}(V')$-représentations de Banach de G.

Soit $\mathbb{I}_0(p) = \{\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) | \gamma \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \bmod p\}$ le sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$; c'est un groupe p-adique. Rappelons que $V_{k,j+2} = \mathrm{Sym}^{k-2} V_p \otimes \mathbb{Q}_p(-j)$, où $V_p = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_2$ est la représentation standard à droite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ donnée par la formule : $e_1 * \gamma = ae_1 + be_2, e_2 * \gamma = ce_1 + de_2$, si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, est une représentation algébrique de $\mathbb{I}_0(p)$ muni du vecteur $e_1^{k-2} t^{-j}$ de plus haut poids k pour le sous-groupe de Borel inférieur. Dans le reste de ce paragraphe, si $1 \leq j \in \mathbb{N}$, on construira une famille $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}$ de représentations de Banach de $\mathbb{I}_0(p)$ sur l'espace des poids $\mathscr{W}$, qui est une interpolation p-adique en poids des représentations algébriques $V_{k,j+2}$ de $\mathbb{I}_0(p)$ (Il y a une autre interpolation en utilisant l'espace des fonctions analytiques par Chenevier [3]). La construction se découpe en trois étapes :

• On définit une action modulaire de $\mathbb{I}_0(p)$ sur $\mathbb{Z}_p$ par la formule $z * \gamma = \frac{b+dz}{a+cz}$ si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{I}_0(p)$, et une action continue de $\mathbb{I}_0(p)$ sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ à gauche par la formule : $\gamma f(z) = f(z * \gamma)$, si $\gamma \in \mathbb{I}_0(p)$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$. Ceci permet de lui associer un faisceau constant de représentations de Banach $\mathcal{C}^0_{\mathscr{W}}$ de $\mathbb{I}_0(p)$ sur $\mathscr{W}$ défini par : si U un ouvert affinoïde de $\mathscr{W}$, on pose $\mathcal{C}^0_{\mathscr{W}}(U) = \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}(U))$. Son anneau des sections globales est la limite projective $\varprojlim_n \mathcal{C}^0(W_n) \cong \varprojlim_n \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p) \hat{\otimes} \mathcal{O}(W_n)$.

• On note $\mathcal{C}^0_{\mathscr{W}}(\mathscr{W})^*$ le groupe des unités de l'anneau $\mathcal{C}^0_{\mathscr{W}}(\mathscr{W})$ des sections globales de $\mathcal{C}^0_{\mathscr{W}}$. Soit $\rho\colon \mathbb{I}_0(p) \to \mathcal{C}^0_{\mathscr{W}}(\mathscr{W})^*$ un 1-cocycle de $\mathbb{I}_0(p)$ (i.e. $\rho(\gamma_1\gamma_2) = (\gamma_1\rho(\gamma_2))\rho(\gamma_1)$). On note $\mathcal{C}^{0,\rho}_{\mathscr{W}}$ la famille de représentations de Banach $\mathcal{C}^0_{\mathscr{W}}$ tordue par le 1-cocycle ρ, c'est-à-dire, si $U \subset \mathscr{W}$ est un ouvert affinoïde, $\gamma \in \mathbb{I}_0(p)$, $f \in \mathcal{C}^0_{\mathscr{W}}(U)$ et $f^\rho \in \mathcal{C}^{0,\rho}_{\mathscr{W}}(U)$ correspondant à f, on a $\gamma f^\rho = \rho(\gamma)(\gamma f)^\rho$. Alors $\mathcal{C}^{0,\rho}_{\mathscr{W}}$ est encore une famille de représentations de Banach de $\mathbb{I}_0(p)$ sur l'espace des poids. En particulier, on peut tordre $\mathcal{C}^0_{\mathscr{W}}$ par un caractère de $\mathbb{I}_0(p)$ vu comme un 1-cocycle.

Si $a \in \mathbb{Z}_p^*$ et si $c \in p\mathbb{Z}_p$, on définit une fonction sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathscr{W})$

$$f_{a,c}(z) = \kappa^{\mathbf{univ}}(a + cz).$$

Lemme 2.12. *La fonction $f_{a,c}(z)$ appartient à $\mathcal{C}^0_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})$. De plus, elle est une unité de l'anneau $\mathcal{C}^0_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})$.*

Démonstration. On a un isomorphisme $\mathcal{O}(W_n) \cong \mathbb{Z}_p[\mu_{p-1}] \otimes C_n$, où C_n est le sous-anneau de $\mathbb{Q}_p[[T_1-1]]$ consistant des fonctions analytiques sur le disque $v_p(T_1-1) \geq \frac{1}{n}$ et μ_{p-1} est un groupe cyclique d'ordre $p-1$ engendré par $\zeta = \zeta_{p-1}$. On remplace la variable ζ par X_1. Dans la suite, on identifie $\mathcal{O}(\mathcal{W}_n)$ avec $\mathbb{Z}_p[\mu_{p-1}] \otimes C_n$. La fonction $f_{a,c}$ s'écrit sous la forme $X_1^{\mathrm{ord}_\zeta \omega(a+cz)} T_1^{\log_\gamma(\langle a+cz\rangle)}$.

Comme $v_p(T_1-1) \geq \frac{1}{n}$, la fonction $\sum \binom{z}{k}(T_1-1)^k$ est dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}(W_n))$. On en déduit que la série

$$T_1^{\log_\gamma(\langle a+cz\rangle)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \binom{\log_\gamma(\langle a+cz\rangle)}{k}(T_1-1)^k$$

est dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}(W_n))$ pour tout n et donc appartient à $\mathcal{C}^0_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})$.

Comme $\kappa^{\mathbf{univ}}$ est un caractère sur $\mathbb{Z}_p^*$, la fonction $\kappa^{\mathbf{univ}}((a+cz)^{-1}) \in \mathcal{C}^0_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})$ est l'inverse de $f_{a,c}(z)$. □

Si $1 \leq j \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $\rho_j^{\mathbf{univ}}$ sur $\mathbb{I}_0(p)$ à valeurs dans $\mathcal{C}^0_{\mathcal{W}}(\mathcal{W})^*$ par la formule :

$$g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \rho_j^{\mathbf{univ}}(g) = f_{a,c}(z)(\det g)^{-j}, \quad \text{si } g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{I}_0(p).$$

Si $g_1 = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{smallmatrix}\right)$ et $g_2 = \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{smallmatrix}\right)$, on a

$$\rho_j^{\mathbf{univ}}(g_1g_2) = f_{a_1a_2+b_1c_2, c_1a_2+d_1c_2}(z)\det(g_1g_1)^{-j} = (g_1\rho_j^{\mathbf{univ}}(g_2))\rho_j^{\mathbf{univ}}(g_1);$$

ceci implique que $\rho_j^{\mathbf{univ}}$ est un 1-cocycle.

Si $k \in \mathbb{N}$, l'application d'évaluation $\mathbf{Ev}_k$ induit un 1-cocycle algébrique $\rho_{k,j}$ sur $\mathbb{I}_0(p)$ à valeurs dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ donné par la formule :

$$\rho_{k,j}(g) = \mathbf{Ev}_k(\rho_j^{\mathbf{univ}}(g)) = (a+cz)^{k-2}(\det g)^{-j}.$$

On note $\mathcal{C}^0_{k,j}$ la $\mathbb{Q}_p$-représentation de Banach $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ tordue par le 1-cocycle $\rho_{k,j}$ et $\mathcal{C}^{0,\rho_j^{\mathbf{univ}}}_{\mathcal{W}}$ la famille de représentations de Banach $\mathcal{C}^0_{\mathcal{W}}$ tordue par le 1-cocycle $\rho_j^{\mathbf{univ}}$ de $\mathbb{I}_0(p)$. Alors, l'application d'évaluation $\mathbf{Ev}_k$ induit une application d'évaluation de $\mathcal{C}^{0,\rho_j^{\mathbf{univ}}}_{\mathcal{W}}$ dans $\mathcal{C}^0_{k,j}$, notée par $\mathbf{Ev}_{k,j}$. Un calcul direct montre le lemme suivant :

Lemme 2.13. *L'application $\mathbf{Ev}_{k,j} : \mathcal{C}^{0,\rho_j^{\mathbf{univ}}}_{\mathcal{W}} \to \mathcal{C}^0_{k,j}$ est $\mathbb{I}_0(p)$-équivariante.*

• On définit une famille duale $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}$ de $\mathcal{C}_{\mathscr{W}}^{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}$ de représentations de Banach sur $\mathscr{W}$: si $U \subset \mathscr{W}$ est un ouvert affinoïde, $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U)$ est défini par $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U) = (\mathcal{C}_{\mathscr{W}}^{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U))^\vee$.

On note l'accouplement $\mathcal{O}(U)$-linéaire $\mathbb{I}_0(p)$-équivariant

$$\langle , \rangle \colon \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U) \times \mathcal{C}_{\mathscr{W}}^{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U) \to \mathcal{O}(U)$$

par l'intégration $\int_{\mathbb{Z}_p}$:

$$\langle \mu * \gamma, f \rangle = \int_{\mathbb{Z}_p} f(\mu * \gamma) = \int_{\mathbb{Z}_p} (\gamma f)\mu,$$

si $f \in \mathcal{C}_{\mathscr{W}}^{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U), \gamma \in \mathbb{I}_0(p)$ et $\mu \in \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U)$.

On note $\mathbf{D}_{0,k,j}$ la représentation $\mathbb{Q}_p$-duale de $\mathbb{I}_0(p)$ de $\mathcal{C}_{k,j}^0$. Remarquons qu'on a une inclusion de $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, \mathcal{O}(U))$. Si $k \in \mathbb{Z}$ appartient à U, alors l'application $\mathbf{Ev}_{k,j}$ induit une application, notée encore par $\mathbf{Ev}_{k,j}$,

$$\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U) \to \mathbf{D}_{0,k,j}; \int_{\mathbb{Z}_p} f\,\mathbf{Ev}_{k,j}(\mu) = \mathbf{Ev}_k\Big(\int_{\mathbb{Z}_p} f\mu\Big)$$

pour $f \in \mathcal{C}_{k,j}^0, \mu \in \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U)$.

Lemme 2.14. *L'application* $\mathbf{Ev}_{k,j} : \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U) \to \mathbf{D}_{0,k,j}$ *est* $\mathbb{I}_0(p)$*-équivariante.*

Démonstration. Si $f \in \mathcal{C}_{k,j}^0, \mu \in \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U)$ et $g \in \mathbb{I}_0(p)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} f\,\mathbf{Ev}_{k,j}(\mu * g) &= \mathbf{Ev}_k\Big(\int_{\mathbb{Z}_p} f(\mu * g)\Big) = \mathbf{Ev}_k\Big(\int_{\mathbb{Z}_p} (gf)\mu\Big)\\ &= \int_{\mathbb{Z}_p} (gf)\mathbf{Ev}_{k,j}(\mu) = \int_{\mathbb{Z}_p} f[\mathbf{Ev}_{k,j}(\mu) * g]. \qquad \square\end{aligned}$$

Le faisceau $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}$ nous donne une interpolation des représentations algébriques $V_{k,j+2}$ de $\mathbb{I}_0(p)$ pour $k \in \mathbb{N}$ au sens suivant : la fonction $f : \mathbb{Z}_p \to V_{k,j+2}$, donnée par

$$z \mapsto f(z) = (e_1 + ze_2)^{k-2}t^{-j},$$

est une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $V_{k,j+2}$. On définit une application linéaire continue $\pi_{k,j} : \mathbf{D}_{0,k,j} \to V_{k,j+2}$ par l'intégration : $\mu \mapsto \int_{\mathbb{Z}_p} f(z)\mu$.

Lemme 2.15. *L'application* $\pi_{k,j}$ *est* $\mathbb{I}_0(p)$*-équivariante.*

Démonstration. Ce lemme se démontre par le calcul suivant : si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{I}_0(p)$, alors $\rho_{k,j}(\gamma) = (a + cz)^{k-2}(\det \gamma)^{-j}$ et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_p} (e_1 + ze_2)^{k-2} t^{-j} (\mu * \gamma) &= \sum_{l=0}^{k-2} \Big(\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{k-2}{l} z^l (\mu * \gamma) \Big) e_1^{k-2-l} e_2^l t^{-j} \\
&= \sum_{l=0}^{k-2} \Big(\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{k-2}{l} (z * \gamma)^l \rho_{k,j}(\gamma) \mu \Big) e_1^{k-2-l} e_2^l t^{-j} \\
&= \int_{\mathbb{Z}_p} (ae_1 + be_2 + z(ce_1 + de_2))^{k-2} (\det(\gamma) t)^{-j} \mu \\
&= \Big(\int_{\mathbb{Z}_p} (e_1 + ze_2)^{k-2} t^{-j} \mu \Big) * \gamma. \qquad \square
\end{aligned}$$

Si U est un ouvert affinoïde de $\mathscr{W}$ et si $k \in \mathbb{Z}$ appartient à U, on définit une application de spécialisation $\mathbf{Sp}_{k,j} : \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U) \to \mathbf{D}_{0,k,j} \to V_{k,j+2}$ en composant l'application d'évaluation $\mathbf{Ev}_{k,j}$ et l'application $\pi_{k,j}$, qui est $\mathbb{I}_0(p)$-équivariante par les lemmes 2.14 et 2.15.

Remarque 2.16. La masse de Dirac δ_0 en 0 fournit une section globale ν_j de $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(\mathscr{W})$ qui interpole le vecteur de plus haut poids $e_1^{k-2} t^{-j}$ dans $V_{k,j+2}$; en effet, $\int_{\mathbb{Z}_p} (e_1 + ze_2)^{k-2} t^{-j} \delta_0 = e_1^{k-2} t^{-j}$, ce qui se traduit par la formule $\mathbf{Sp}_{k,j}(\nu_j) = e_1^{k-2} t^{-j}$.

2.3. Famille de systèmes d'Euler de Kato sur l'espace des poids

2.3.1. Torsion à la Soulé. Soit G un groupe localement profini, agissant continûment à droite sur un espace topologique localement profini X. Soit V une A-représentation de Banach de G à droite, où A est une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach. On note $\mathcal{C}^0(X, V)$ le A-module des fonctions continues sur X à valeurs dans V et $\mathfrak{D}_0(X, V)$ le A-module des mesures sur X à valeurs dans V. On munit $\mathcal{C}^0(X, V)$ et $\mathfrak{D}_0(X, V)$ d'actions de G à droite comme suit : si $g \in G$, $x \in X$, $\phi(x) \in \mathcal{C}^0(X, V)$, et $\mu \in \mathfrak{D}_0(X, V)$, alors

$$\phi * g(x) = \phi(x * g^{-1}) * g \quad \text{et} \quad \int_X \phi(x)(\mu * g) = \Big(\int_X (\phi * g^{-1}) \mu \Big) * g.$$

Soit $\mu \in \mathfrak{D}_0(X, \mathbb{Z}_p)$ et soit M un $\mathbb{Q}_p$-espace de Banach muni d'un base de Banach $E = \{e_i\}_{i \in I}$. On a une inclusion de $\mathfrak{D}_0(X, \mathbb{Z}_p) \subset \mathfrak{D}_0(X, M)$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(X, M)$; l'intégration $\int_X f(x)\mu$ est définie comme suit : on décompose $f = \sum_{i \in I} f_i e_i$ sous la base de Banach E de M avec $f_i \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{Q}_p)$ et l'intégration $\int_X f(x)\mu$ est donné par la formule $\int_X f(x)\mu = \sum_{i \in I} e_i \int_X f_i(x)\mu$.

Proposition 2.17. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(X,V)^G$. La multiplication d'une mesure $\mu \in \mathfrak{D}_0(X,\mathbb{Z}_p)$ par la fonction f induit un morphisme G-équivariant à droite de $\mathfrak{D}_0(X,\mathbb{Z}_p)$ dans $\mathfrak{D}_0(X,V)$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que c'est G-équivariant. Soit $\{e_i\}_{i\in I}$ une $\mathbb{Q}_p$-base de Banach de V. On décompose $f(x)$ sous la forme $\sum_{i\in I} f_i(x)e_i$ avec $f_i(x) \in \mathcal{C}^0(X,\mathbb{Q}_p)$. Soit ϕ une fonction continue sur X à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$. Si on considère $\mu * g \in \mathfrak{D}_0(X,\mathbb{Z}_p)$, alors l'intégration $\int_X \phi(x)(f(x)\otimes \mu * g)$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}\int_X \phi(x)(f\otimes(\mu * g)) &= \sum_{i\in I} e_i \int_X \phi(x*g) f_i(x*g)\mu \\ &= \int_X \phi(x*g) f(x*g)\mu.\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'intégration $\int_X \phi(x)(f\otimes\mu) * g$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\int_X \phi(x)(f\otimes\mu) * g &= \Big(\int_X \phi(x*g)(f(x)\otimes\mu)\Big) * g \\ &= \int_X \phi(x*g)((f(x)*g)\otimes\mu).\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{C}^0(X,V)^G$, on a $f(x*g) = f(x)*g$. Ceci permet de conclure. □

2.3.2. Application au système d'Euler de Kato. On note $\widehat{\Gamma}_0(p) = \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})^{]p[} \times \mathbb{I}_0(p)$ et $\widetilde{\Gamma}_0(p)$ l'image inverse de $\widehat{\Gamma}_0(p)$ dans $\Pi_{\mathbb{Q}}$. On note $\mathbf{M}_2^{(p)} = \mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{]p[}\times \mathbb{I}_0(p)$. Si $x \in \mathbf{M}_2^{(p)}$, on note x_p sa composante à la place p.

Rappelons que l'on a construit une section globale $\nu_j \in \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(\mathscr{W})$ qui interpole les vecteurs de plus haut poids $e_1^{k-2}t^{-j}$ de représentations algébriques $V_{k,j+2}$ de $\mathbb{I}_0(p)$. Pour tout ouvert affinoïde U de $\mathscr{W}$, la fonction $x \mapsto \nu_j * x_p$ est une fonction continue sur $\mathbf{M}_2^{(p)}$ à valeurs dans $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U)$ invariante sous l'action de $\widetilde{\Gamma}_0(p)$. De manière explicite, si $x_p = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{I}_0(p)$, on a $\nu_j * x_p = \rho_j^{\mathrm{univ}}(x_p)\delta_{\frac{b}{a}}$, où $\delta_{\frac{b}{a}}$ est la masse de Dirac en $\frac{b}{a}$. Elle interpole la fonction continue $x \mapsto (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p$ sur $\mathbf{M}_2^{(p)}$ à valeurs dans $V_{k,j+2}$ via l'application de spécialisation.

Considérons la multiplication d'une mesure $\mu \in \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)},\mathbb{Z}_p(2))$ par la fonction $x \mapsto \nu_j * x_p$ (resp. $x \mapsto (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p$). Ceci nous donne une mesure $(\nu_j * x_p)\otimes\mu$ (resp. $(e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p \otimes \mu$) sur $\mathbf{M}_2^{(p)}$ à valeurs dans $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U)(2)$ (resp. $V_{k,j+2}$).

Les fonctions $x \mapsto \nu_j * x_p$ et $x \mapsto (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p$ satisfont la condition "invariante sous l'action de $\widetilde{\Gamma}_0(p)$" par construction ; on déduit le corollaire ci-dessous de la proposition 2.17.

Corollaire 2.18. *La multiplication d'une mesure* $\mu \in \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$ *par la fonction* $x \mapsto (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p$ *(resp.* $x \mapsto \nu_j * x_p$*) induit un morphisme* $\widetilde{\Gamma}_0(p)$*-équivariant à droite de* $\mathbb{Z}_p$*-modules de* $\mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$ *dans* $\mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V_{k,j})$ *(resp.* $\mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(\mathscr{W})(2))$*).*

D'après Kato [10] et Colmez [4] (voir aussi [14]), on dispose d'une mesure $z_{\mathbf{Kato},c,d}$ construite à partir des unités de Siegel et appartenant à $\mathrm{H}^2(\Pi_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2)))$. L'application de restriction de $\Pi_{\mathbb{Q}}$ à $\widetilde{\Gamma}_0(p)$ et l'application de restriction de $\mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$ dans $\mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))$ nous fournissent une application

$$\mathrm{H}^2(\Pi_{\mathbb{Q}}, \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))) \to \mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))).$$

On note l'image de $z_{\mathbf{Kato},c,d}$ sous cette application de la même manière. D'après le corollaire 2.18, quel que soit $U \subset \mathscr{W}$ ouvert affinoïde, la multiplication par la fonction $x \mapsto \nu_j * x_p$ (resp. $x \mapsto (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p$) induit un morphisme naturel :

$$\mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))) \to \mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U)(2)))$$
$$(\text{resp. } \mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbb{Z}_p(2))) \to \mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V_{k,j}))).$$

On définit,

$$z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu_j) = (\nu_j * x_p) \otimes z_{\mathbf{Kato},c,d} \in \mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U)(2)))$$
$$(\text{resp.} z_{\mathbf{Kato},c,d}(k,j) = (e_1^{k-2}t^{-j}) * x_p \otimes z_{\mathbf{Kato},c,d} \in \mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V_{k,j}))),$$

où $\widetilde{\Gamma}_0(p)$ agit sur $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U)(2)$ à travers son quotient $\mathbb{I}_0(p)$. Comme l'application de spécialisation $\mathbf{Sp}_{k,j} : \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U) \to V_{k,j+2}$ est $\widetilde{\Gamma}_0(p)$-équivariante, pour tout ouvert $U \subset \mathscr{W}$, elle induit une application de spécialisation

$$\mathbf{Sp}_{k,j} : \mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, \mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(U)(2))) \to \mathrm{H}^2(\widetilde{\Gamma}_0(p), \mathfrak{D}_0(\mathbf{M}_2^{(p)}, V_{k,j})).$$

On déduit le théorème suivant de la construction de ν_j (cf. remarque 2.16) et du corollaire 2.18 :

Théorème 2.19. *Si* $1 \leq j \in \mathbb{N}$*, alors pour tout entier* $k \geq j+1$*, on a*

$$\mathbf{Sp}_{k,j}(z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu_j)) = z_{\mathbf{Kato},c,d}(k,j).$$

3. Une famille de distributions d'Eisenstein

3.1. Séries d'Eisenstein–Kronecker et la distribution $z_{\mathrm{Eis},c,d}(k,j)$

3.1.1. Séries d'Eisenstein–Kronecker. Les résultats dans ce paragraphe peuvent se trouver dans le livre de Weil [16], voir aussi [4], [14].

Définition 3.1. Si $(\tau,z)\in\mathcal{H}\times\mathbb{C}$, on pose $q=e^{2i\pi\tau}$ et $q_z=e^{2i\pi z}$. On introduit l'opérateur $\partial_z:=\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial z}=q_z\frac{\partial}{\partial q_z}$. On pose aussi $e(a)=e^{2i\pi a}$. Si $k\in\mathbb{N}$, $\tau\in\mathcal{H}$, et $z,u\in\mathbb{C}$, la série d'Eisenstein–Kronecker est

$$\mathrm{H}_k(s,\tau,z,u)=\frac{\Gamma(s)}{(-2i\pi)^k}\Big(\frac{\tau-\bar\tau}{2i\pi}\Big)^{s-k}\sideset{}{'}\sum_{\omega\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau}\frac{\overline{\omega+z}^k}{|\omega+z|^{2s}}e\Big(\frac{\omega\bar u-u\bar\omega}{\tau-\bar\tau}\Big),$$

qui converge pour $\mathrm{Re}(s)>1+\frac{k}{2}$, et possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec des pôles simples en $s=1$ (si $k=0$ et $u\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$) et $s=0$ (si $k=0$ et $z\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$). Dans la formule ci-dessus $\sideset{}{'}\sum$ signifie (si $z\in\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$) que l'on supprime le terme correspondant à $\omega=-z$. De plus, elle vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\mathrm{H}_k(s,\tau,z,u)=e\Big(\frac{z\bar u-u\bar z}{\tau-\bar\tau}\Big)\mathrm{H}_k(k+1-s,\tau,u,z).$$

Si $k\geq 1$, on définit les fonctions suivantes :

$$E_k(\tau,z)=\mathrm{H}_k(k,\tau,z,0),\ F_k(\tau,z)=\mathrm{H}_k(k,\tau,0,z).$$

Les fonctions $E_k(\tau,z)$ et $F_k(\tau,z)$ sont périodiques en z de période $\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}$. De plus, on a :

$$E_{k+1}(\tau,z)=\partial_z E_k(\tau,z)\ \text{si}\ k\in\mathbb{N}\quad\text{et}\quad E_0(\tau,z)=\log|\theta(\tau,z)|\ \text{si}\ z\notin\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau,$$

où $\theta(\tau,z)$ est donnée par le produit infini :

$$\theta(\tau,z)=q^{1/12}(q_z^{1/2}-q_z^{-1/2})\prod_{n\geq 1}((1-q^nq_z)(1-q^nq_z^{-1})).$$

On note $\Delta=(\partial_z\theta(\tau,z)|_{z=0})^{12}=q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$ la forme modulaire de poids 12.

Soient $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ et $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ qui a pour image (α,β) dans $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$. Si $k=2$ et $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$, ou si $k\geq 1$ et $k\neq 2$, on définit :

$$E^{(k)}_{\alpha,\beta}=E_k(\tau,a\tau+b)\quad\text{et}\quad F^{(k)}_{\alpha,\beta}=F_k(\tau,a\tau+b).$$

La série $H_2(s,\tau,0,0)$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > 2$, mais pas pour $s = 2$; si $k = 2$ et $(\alpha,\beta) = (0,0)$, on définit

$$E_{0,0}^{(2)} = F_{0,0}^{(2)} := \lim_{s\to 2} H_2(s,\tau,0,0).$$

Lemme 3.2. *Les fonctions $E_{\alpha,\beta}^{(k)}$, $F_{\alpha,\beta}^{(k)}$ satisfont les relations de distribution suivantes, quel que soit l'entier $f \geq 1$:*

$$\sum_{f\alpha'=\alpha, f\beta'=\beta} E_{\alpha',\beta'}^{(k)} = f^k E_{\alpha,\beta}^{(k)} \quad \textit{et} \quad \sum_{f\alpha'=\alpha, f\beta'=\beta} F_{\alpha',\beta'}^{(k)} = f^{2-k} F_{\alpha,\beta}^{(k)}, \tag{2}$$

$$\sum_{f\beta'=\beta} E_{\alpha,\beta'}^{(k)}\left(\frac{\tau}{f}\right) = f^k E_{\alpha,\beta}^{(k)} \quad \textit{et} \quad \sum_{f\beta'=\beta} F_{\alpha,\beta'}^{(k)}\left(\frac{\tau}{f}\right) = f F_{\alpha,\beta}^{(k)}. \tag{3}$$

Proposition 3.3. (1) $E_{0,0}^{(2)} = F_{0,0}^{(2)} = \frac{-1}{24} E_2^*$, *où*

$$E_2^* = \frac{6}{i\pi(\tau-\bar{\tau})} + 1 - 24\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_1(n) q^n$$

est la série d'Eisenstein non holomorphe de poids 2 *habituelle.*

(2) *Si $N\alpha = N\beta = 0$, alors*

(a) $\widetilde{E}_{\alpha,\beta}^{(2)} = E_{\alpha,\beta}^{(2)} - E_{0,0}^{(2)} \in \mathcal{M}_2(\Gamma_N, \mathbb{Q}(\zeta_N))$ *et* $E_{\alpha,\beta}^{(k)} \in \mathcal{M}_k(\Gamma_N, \mathbb{Q}(\zeta_N))$ *si* $k \geq 1$ *et* $k \neq 2$.

(b) $F_{\alpha,\beta}^{(k)} \in \mathcal{M}_k(\Gamma_N, \mathbb{Q}(\zeta_N))$ *si* $k \geq 1, k \neq 2$ *ou si* $k = 2, (\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

Proposition 3.4. *Si* $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}), k \geq 1$ *et* $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, *on a :*

$$E_{\alpha,\beta}^{(k)} * \gamma = E_{a\alpha+c\beta, b\alpha+d\beta}^{(k)} \quad \textit{et} \quad F_{\alpha,\beta}^{(k)} * \gamma = F_{a\alpha+c\beta, b\alpha+d\beta}^{(k)}.$$

Définition 3.5. Soit A un anneau. Une série de Dirichlet formelle à coefficients dans A est une série de la forme $\sum_{n\in\frac{1}{N}\mathbb{N}} a_n n^{-s}$, où $N \in \mathbb{N}$ et (a_n) désigne une suite d'éléments dans A. On note $\mathbf{Dir}(A)$ le A-module des séries de Dirichlet formelles dont les coefficients sont dans A.

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On définit les séries de Dirichlet formelles $\zeta(\alpha,s)$ et $\zeta^*(\alpha,s)$, appartenant à $\mathbf{Dir}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$, par les formules :

$$\zeta(\alpha,s) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Q}_+^* \\ n=\alpha \bmod \mathbb{Z}}} n^{-s} \quad \text{et} \quad \zeta^*(\alpha,s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2i\pi\alpha n} n^{-s}.$$

Remarque 3.6. Les séries de Dirichlet $\zeta(\alpha, s)$ et $\zeta^*(\alpha, s)$ convergent pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et elles se prolongent analytiquement sur le plan complexe en fonctions méromorphes avec au plus un pôle simple en $s = 1$. Ces prolongements définissent la fonction zêta de Hurwitz $\zeta(\alpha, s)$ et la fonction L de Dirichlet $\zeta^*(\alpha, s)$ respectivement.

La proposition suivante décrit le q-développement d'une série d'Eisenstein (cf. [10]).

Proposition 3.7. (i) *Si $k \geq 1, k \neq 2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors le q-développement $\sum_{n\in\mathbb{Q}_+} a_n q^n$ de $E^{(k)}_{\alpha,\beta}$ est donné par*

$$\sum_{n\in\mathbb{Q}_+^*} \frac{a_n}{n^s} = \zeta(\alpha, s)\zeta^*(\beta, s-k+1) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s)\zeta^*(-\beta, s-k+1).$$

De plus, on a :

Soit $k \neq 1$. $a_0 = 0$ (resp. $a_0 = \zeta^*(\beta, 1-k)$) si $\alpha \neq 0$ (resp. $\alpha = 0$).
Soit $k = 1$. On a $a_0 = \zeta(\alpha, 0)$ (resp. $a_0 = \frac{1}{2}(\zeta^*(\beta, 0) - \zeta^*(-\beta, 0))$) si $\alpha \neq 0$ (resp. $\alpha = 0$).

(ii) *Si $k \geq 1$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (si $k = 2$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$), alors le q-développement $\sum_{n\in\mathbb{Q}_+} a_n q^n$ de $F^{(k)}_{\alpha,\beta}$ est donné par*

$$\sum_{n\in\mathbb{Q}_+^*} \frac{a_n}{n^s} = \zeta(\alpha, s-k+1)\zeta^*(\beta, s) + (-1)^k \zeta(-\alpha, s-k+1)\zeta^*(-\beta, s).$$

De plus,

$a_0 = \zeta(\alpha, 1-k)$, la valeur spéciale de la fonction zêta de Hurwitz, si $k \neq 1$;
$a_0 = \zeta(\alpha, 0)$ (resp. $a_0 = \frac{1}{2}(\zeta^*(\beta, 0) - \zeta^*(-\beta, 0))$) si $\alpha \neq 0$ (resp. $\alpha = 0$) et si $k = 1$.

3.1.2. Les distributions $z_{\mathrm{Eis}}(k, j)$ et $z_{\mathrm{Eis},c,d}(k, j)$. Dans ce paragraphe, on rappelle la construction des distributions d'Eisenstein $z_{\mathrm{Eis}}(k, j)$ et $z_{\mathrm{Eis},\mathbf{c},\mathbf{d}}(k, j)$ construites à partir d'un produit de deux séries d'Eisenstein dans [4] et [14].

Soient $X = (\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^2$, $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$ et $V = \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}})$. Alors X est un espace topologique localement profini et G est un groupe localement profini agissant continûment à droite sur X par la multiplication de matrices.

L'action à droite de G sur V, notée par $*$, provient de l'action de $\Pi'_{\mathbb{Q}}$ sur V, et l'action de $\Pi_{\mathbb{Q}}$ se factorise à travers son quotient $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$. Comme tout $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$ peut s'écrire sous la forme $\gamma = g_1\left(\begin{smallmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right)g_2$ avec $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$, $r_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ et e un entier ≥ 1, il suffit de donner respectivement les formules pour $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ ou $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{smallmatrix}\right)$ ou $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right)$:

(1) Comme $\left(\begin{smallmatrix} r_0 & 0 \\ 0 & r_0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{smallmatrix}\right)$ apparaissent dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_+$, ses actions sont données par la formule (1) dans §1.1.

(2) Si $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$, en utilisant la décomposition $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}}) = \cup_{d \in \widehat{\mathbb{Z}}^*} \mathrm{SL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$, on décompose l'action de γ en deux parties. Comme on est en poids k, l'action de $\mathrm{SL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ est l'action $|_k$. L'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ est via un relèvement σ_d dans $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}}$ agissant sur les coefficients du q-développement. Dans le cas des séries d'Eisenstein, la proposition 3.4 explicite les formules.

On a le théorème suivant, qui traduit les relations de distribution pour les séries d'Eisenstein en terme de distributions (cf. [14], théorème 2.12) :

Théorème 3.8. *Si $k \geq 1$, il existe une distribution algébrique $z_{\mathbf{Eis}}(k)$ (resp. $z'_{\mathbf{Eis}}(k)$) $\in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}((\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^2, \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}))$ vérifiant : quels que soient $r \in \mathbb{Q}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, on a*

$$\int_{(a+r\widehat{\mathbb{Z}})\times(b+r\widehat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Eis}}(k) = r^{-k} E^{(k)}_{r^{-1}a, r^{-1}b}$$

$$(\textit{resp.} \int_{(a+r\widehat{\mathbb{Z}})\times(b+r\widehat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Eis}}(k) = r^{-k} \widetilde{E}^{(k)}_{r^{-1}a, r^{-1}b} \ \ \textit{si } k = 2),$$

$$\int_{(a+r\widehat{\mathbb{Z}})\times(b+r\widehat{\mathbb{Z}})} z'_{\mathbf{Eis}}(k) = r^{k-2} F^{(k)}_{r^{-1}a, r^{-1}b}.$$

De plus, si $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$, alors

$$z_{\mathbf{Eis}}(k) * \gamma = z_{\mathbf{Eis}}(k) \quad \textit{et} \quad z'_{\mathbf{Eis}}(k) * \gamma = |\det \gamma|^{1-k} z'_{\mathbf{Eis}}(k).$$

On peut identifier $(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^2 \times (\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^2$ avec $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$ via $((a, b), (c, d)) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. En utilisant le fait que le produit de deux formes modulaires de poids i et j est une forme modulaire de poids $i + j$, on définit pour $k \geq 2$ et $1 \leq j \leq k - 1$,

$$z_{\mathbf{Eis}}(k, j) = \frac{1}{(j-1)!} z'_{\mathbf{Eis}}(k - j) \otimes z_{\mathbf{Eis}}(j) \in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}), \mathcal{M}_k(\overline{\mathbb{Q}})).$$

La distribution $z_{\mathbf{Eis},c,d}(k, j)$ dans [14] est construite à partir de combinaisons linéaires de séries d'Eisenstein. On rappelle sa construction ci-dessous.

Soit $\langle\langle \cdot \rangle\rangle : \mathbb{Z}_p^* \to \widehat{\mathbb{Z}}^*$ l'inclusion naturelle en envoyant x sur

$$\langle\langle x \rangle\rangle = (1, \ldots, x, 1, \ldots),$$

où x est à la place p. Considérons l'inclusion de $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ dans $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ en envoyant d sur $\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$. D'après la proposition 3.4, cela définit une action de $d \in \widehat{\mathbb{Z}}^*$ sur les séries d'Eisenstein par les formules : si $k \geq 1$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$, on a

$$d \cdot E^k_{\alpha,\beta} = E^{(k)}_{d\alpha, d\beta} = E^{(k)}_{\alpha,\beta} * \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \quad \text{et} \quad d \cdot F^{(k)}_{\alpha,\beta} = F^{(k)}_{d\alpha, d\beta} = F^{(k)}_{\alpha,\beta} * \left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right), \quad (4)$$

où l'action de $*$ est celle de $\mathrm{GL}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ sur les séries d'Eisenstein.

Considérons l'injection de $\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\overline{\mathbb{Q}})$ dans $\mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On peut définir une variante de séries d'Eisenstein à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ comme ci-dessous : si $c \in \mathbb{Z}_p^*$, on pose

$$\begin{aligned} E_{c,\alpha,\beta}^{(k)} &= \begin{cases} c^2 E_{\alpha,\beta}^{(k)} - c^k E_{\langle\langle c\rangle\rangle\alpha,\langle\langle c\rangle\rangle\beta}^{(k)} & \text{si } k \geq 1 \text{ et } k \neq 2, \\ c^2 \widetilde{E}_{\alpha,\beta}^{(2)} - c^2 \widetilde{E}_{\langle\langle c\rangle\rangle\alpha,\langle\langle c\rangle\rangle\beta}^{(2)} & \text{si } k = 2; \end{cases} \\ F_{c,\alpha,\beta}^{(k)} &= c^2 F_{\alpha,\beta}^{(k)} - c^{2-k} F_{\langle\langle c\rangle\rangle\alpha,\langle\langle c\rangle\rangle\beta}^{(k)} \quad \begin{array}{l} \text{si } k \geq 1 \text{ et } k \neq 2, \\ \text{ou si } (\alpha,\beta) \neq (0,0) \text{ et } k = 2. \end{array} \end{aligned} \tag{5}$$

Elles sont des combinaisons linéaires de séries d'Eisenstein.

Proposition 3.9 ([14], proposition 2.14). *Soit $c \in \mathbb{Z}_p^*$. Si $k \geq 1$, il existe une distribution algébrique $z_{\mathbf{Eis},c}(k)$ (resp. $z'_{\mathbf{Eis},c}$) $\in \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}((\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^2, \mathcal{M}_k^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}))$ vérifiant : quel que soient $r \in \mathbb{Q}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, on a*

$$\int_{(a+r\widehat{\mathbb{Z}})\times(b+r\widehat{\mathbb{Z}})} z_{\mathbf{Eis},c}(k) = r^{-k} E_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}^{(k)}$$

$$\left(\textit{resp.} \int_{(a+r\widehat{\mathbb{Z}})\times(b+r\widehat{\mathbb{Z}})} z'_{\mathbf{Eis},c}(k) = r^{k-2} F_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}^{(k)}.\right)$$

De plus, si $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$, alors on a

$$z_{\mathbf{Eis},c}(k) * \gamma = z_{\mathbf{Eis},c}(k) \quad \textit{et} \quad z'_{\mathbf{Eis},c} * \gamma = |\det \gamma|^{1-k} z'_{\mathbf{Eis},c}(k).$$

Soient $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$. Si $k \geq 2$ et $1 \leq j \leq k-1$, on définit une distribution $z_{\mathbf{Eis},c,d}(k,j)$ appartient à $\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}), \mathcal{M}_k(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{cycl}}))$ par la formule :

$$z_{\mathbf{Eis},c,d}(k,j) = \frac{1}{(j-1)!} z'_{\mathbf{Eis},c}(k-j) \otimes z_{\mathbf{Eis},d}(j).$$

Si $\gamma \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$, on a $z_{\mathbf{Eis},c,d}(k,j)_{|_k}\gamma = |\det \gamma|^{j-1} z_{\mathbf{Eis},c,d}(k,j)$.

3.2. Famille p-adique de séries d'Eisenstein

3.2.1. La fonction zêta p-adique. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$; on note $\{\alpha\}$ le plus petit nombre rationnel positif tel que $\{\alpha\} \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}$, et on note $\mathrm{ord}_p(\alpha)$ (resp. $\mathrm{ord}\,\alpha$) l'ordre de α dans le groupe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ (resp. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$).

Dans la suite, on suppose que $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ vérifie $\mathrm{ord}_p(\alpha) \geq p$. Si $x \in \mathbb{Z}_p$, on note $\mathrm{ord}(\alpha)(\{\alpha\} + x)$ par x_α, qui appartient à $\mathbb{Z}_p^*$.

Si $c \in \mathbb{Z}_p^*$, on note μ_c la mesure sur $\mathbb{Z}_p$ dont la transformée d'Amice $\mathcal{A}_{\mu_c}$ est donnée par $\frac{c^2}{T} - \frac{c}{(1+T)^{c^{-1}}-1}$. Par ailleurs, le caractère universel de l'espace des

poids $\kappa^{\mathbf{univ}} : \mathbb{Z}_p^* \to \mathcal{O}(\mathcal{W})$ est une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p^*$ à valeurs dans $\mathcal{O}(\mathcal{W})$. Si $1 \leq j \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction zêta p-adique de Hurwitz comme la fonction holomorphe sur $\mathcal{W}$

$$\zeta_{p,c}(\kappa^{\mathbf{univ}}, \alpha, j) = -\int_{\mathbb{Z}_p} \kappa^{\mathbf{univ}}(x_\alpha)\langle x_\alpha\rangle^{1-j}\mu_c.$$

Lemme 3.10. *Si j, k sont deux entiers ≥ 1, alors on a*

$$\mathbf{Ev}_{k+j}(\zeta_{p,c}(\kappa^{\mathbf{univ}}, \alpha, j)) = \mathrm{ord}(\alpha)^{k-1}\omega(0_\alpha)^{j-1}(c^2\zeta(\alpha, 1-k) - c^{2-k}\zeta(\langle\langle c\rangle\rangle\alpha, 1-k)).$$

Démonstration. De la définition, on a bien

$$\mathbf{Ev}_{k+j}(\zeta_{p,c}(\kappa^{\mathbf{univ}}, \alpha, j)) = -\omega(0_\alpha)^{j-1}\int_{\mathbb{Z}_p} x_\alpha^{k-1}\mu_c.$$

On se ramène à vérifier que $\int_{\mathbb{Z}_p} x_\alpha^k \mu_c = -\,\mathrm{ord}(\alpha)^k(c^2\zeta(\alpha, -k) - c^{1-k}\zeta(\langle\langle c\rangle\rangle\alpha, -k))$.

On utilise la transformée d'Amice $\mathcal{A}_{\mu_c}$ de μ_c pour calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{Z}_p} x_\alpha^k \mu_c$. On suppose que $c^{-1} \in \mathbb{N}$. Si on pose $T = e^t - 1$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} x_\alpha^k \mu_c(x) &= \mathrm{ord}(\alpha)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k\left(\int_{\mathbb{Z}_p} e^{(\{\alpha\}+x)t}\mu_c\right)|_{t=0}\\ &= \mathrm{ord}(\alpha)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k\left(\int_{\mathbb{Z}_p} (T+1)^{(\{\alpha\}+x)}\mu_c\right)|_{t=0}\\ &= \mathrm{ord}(\alpha)^k\left(\frac{d}{dt}\right)^k((T+1)^{\{\alpha\}}\mathcal{A}_{\mu_c})|_{t=0}.\end{aligned}$$

On note f_α la fonction $t \mapsto (\frac{c^2}{e^t-1} - \frac{c}{e^{c^{-1}t}-1}) \cdot e^{\{\alpha\}t}$, qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t^n f_\alpha(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, on a

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k((T+1)^{\{\alpha\}}\mathcal{A}_{\mu_c})|_{t=0} = f_\alpha^{(k)}(0) = (-1)^k L(f_\alpha(t), -k),$$

où $L(f_\alpha(t), s)$ est définie par la formule $\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty} f_\alpha(t)t^{s-1}dt$.

D'autre part, on a $\zeta(\{\alpha\}, s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(1-\{\alpha\})t}}{e^t-1}t^{s-1}dt$. Ceci implique que

$$L(f_\alpha(t), s) = c^2\zeta(1-\{\alpha\}, s) - c^{s+1}\zeta(1-c\{\alpha\}, s).$$

On en déduit une égalité algébrique

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p} x_\alpha^k\mu_c &= \mathrm{ord}(\alpha)^k(-1)^k(c^2\zeta(1-\{\alpha\}, -k) - c^{1-k}\zeta(1-c\{\alpha\}, -k))\\ &= -\,\mathrm{ord}(\alpha)^k(c^2\zeta(\{\alpha\}, -k) - c^{1-k}\zeta(c\{\alpha\}, -k)),\end{aligned}$$

où la dernière égalité se déduit du fait que $\zeta(\{\alpha\}, -k) = (-1)^k \zeta(1 - \{\alpha\}, -k)$. Si $c \in \mathbb{Z}_p^*$, on choisit une suite (c_n) d'éléments de $\mathbb{N}$ qui converge vers c (resp. $\langle\langle c \rangle\rangle$) dans $\mathbb{Z}_p^*$ (resp. $\widehat{\mathbb{Z}}$), de telle sorte que la suite $(c_n\{\alpha\})$ tend vers $\{\langle\langle c \rangle\rangle \alpha\}$. Ceci permet de conclure. □

3.2.2. Une famille p-adique de formes modulaires. Si $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, on définit la série de Dirichlet formelle $\zeta(\alpha, \kappa^{\mathbf{univ}}, j, s)$ appartenant à $\mathbf{Dir}(\mathcal{O}(\mathscr{W}))$ par la formule :

$$\zeta(\alpha, \kappa^{\mathbf{univ}}, j, s) = \sum_{n \in \mathbb{Q}_+^*, n \equiv \alpha[\mathbb{Z}]} n^{-s} (n \operatorname{ord}(\alpha))^{1-j} \kappa^{\mathbf{univ}}(n \operatorname{ord}(\alpha)).$$

Par définition, on a $\mathbf{Ev}_{k+j}(\zeta(\alpha, \kappa^{\mathbf{univ}}, j, s)) = \operatorname{ord}(\alpha)^{k-1} \zeta(\alpha, s - k + 1)$.

Si $1 \leq j \in \mathbb{N}$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ avec $\operatorname{ord}_p \alpha \geq p$, on pose $\widetilde{F}_{\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j) = \sum_{m \in \mathbb{Q}_+^*} a_m q^m$ dont sa série de Dirichlet formelle associée est

$$\zeta(\alpha, \kappa^{\mathbf{univ}}, j, s)\zeta^*(\beta, s) + \kappa^{\mathbf{univ}}(-1)(-1)^{2-j} \zeta(-\alpha, \kappa^{\mathbf{univ}}, j, s)\zeta^*(-\beta, s). \tag{6}$$

Si $c \in \mathbb{Z}_p^*$, on définit deux séries formelles appartenant à $\cup_{M \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(\mathscr{W})[[q_M]]$:

$$\widetilde{F}_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j) = c^2 \widetilde{F}_{\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j) - \kappa^{\mathbf{univ}}(c^{-1}) c^j \widetilde{F}_{\langle\langle c \rangle\rangle \alpha, \langle\langle c \rangle\rangle \beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j) \tag{7}$$

et

$$F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j) = \omega(0_\alpha)^{1-j} \cdot \zeta_{p,c}(\kappa^{\mathbf{univ}}, \alpha, j) + \widetilde{F}_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j). \tag{8}$$

Définition 3.11. Une famille p-adique de formes modulaires sur l'espace des poids $\mathscr{W}$ est la donnée d'une série formelle $F(q) = \sum_{n \in \mathbb{Q}_+} A_n q^n \in \cup_{M \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(\mathscr{W})[[q_M]]$ telle que pour presque tout point $k \in \mathbb{N} \subset \mathscr{W}$, $\mathbf{Ev}_k(F(q))$ est le q-développement d'une forme modulaire classique.

Remarque 3.12. Soit F une famille p-adique de formes modulaires sur l'espace des poids. Si Z est un sous-ensemble très Zariski-dense (cf. définition 2.4) de $\mathscr{W}$, tel que $\mathbf{Ev}_k(F) = 0$ pour tout $k \in Z$, alors $F = 0$.

Lemme 3.13. *Si k, j sont deux entiers ≥ 1, on a*

$$\mathbf{Ev}_{k+j}(F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j)) = (\operatorname{ord} \alpha)^{k-1} (c^2 F_{\alpha,\beta}^{(k)} - c^{2-k} F_{\langle\langle c \rangle\rangle \alpha, \langle\langle c \rangle\rangle \beta}^{(k)}).$$

Par conséquent, la série formelle $F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j)$ est une famille de formes modulaires sur l'espace des poids.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition de $F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j)$ et de la proposition 3.7. □

Lemme 3.14. *Soit* $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2$ *tel que* $\mathrm{ord}_p\,\alpha\geq p$, *la famille* $F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)$ *satisfait les relations de distribution suivantes, quel que soit l'entier* $f\geq 1$ *:*

$$\begin{aligned}\sum_{f\alpha'=\alpha;f\beta'=\beta}F_{c,\alpha',\beta'}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)&=fF_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}},j),\\ \sum_{f\beta'=\beta}F_{c,\alpha,\beta'}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)(q^{\frac{1}{f}})&=fF_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)(q).\end{aligned}\tag{9}$$

Démonstration. On donne une démonstration pour la première relation et la deuxième se démontre de la même façon. Si $f\alpha'=\alpha$ et $f\alpha''=\alpha$, on a $\mathrm{ord}(\alpha')=\mathrm{ord}(\alpha'')=\mathrm{ord}(\alpha)f$. En utilisant le lemme 3.2 et le lemma 3.13, on déduit la relation de distribution pour $\mathbf{Ev}_k(F_{\alpha,\beta,c}(\kappa^{\mathbf{univ}},j))$ pour tout $k>2+j$:

$$\begin{aligned}\mathbf{Ev}_k\Big(\sum_{f\alpha'=\alpha;f\beta'=\beta}F_{c,\alpha',\beta'}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)\Big)&=\sum_{f\alpha'=\alpha;f\beta'=\beta}(\mathrm{ord}(\alpha)f)^{k-j-1}F^{(k-j)}_{c,\alpha',\beta'}\\&=(\mathrm{ord}(\alpha)f)^{k-j-1}f^{2-k+j}F^{(k-j)}_{c,\alpha,\beta}\\&=f\,\mathbf{Ev}_k(F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)).\end{aligned}$$

On conclut le lemme par le remarque 3.12. □

On définit une action de $\widehat{\Gamma}_0(p)$ sur $F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)$ par la formule :

$$F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)*\gamma=F_{c,a_0\alpha+c_0\beta,b_0\alpha+d_0\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}},j),\quad\text{si }\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a_0&b_0\\c_0&d_0\end{smallmatrix}\right)\in\widehat{\Gamma}_0(p),$$

qui commute avec l'application d'évaluation $\mathbf{Ev}_k$.

3.2.3. La distribution $z_{\mathbf{Eis},c,d}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)$. Dans ce paragraphe, on construit une famille de distributions d'Eisenstein qui interpole en poids k la restriction de la distribution d'Eisenstein $z_{\mathbf{Eis},\mathbf{c},\mathbf{d}}(k,j)$ sur $\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}$ à $\mathbf{M}_2^{(p)}$, où $\mathbf{M}_2^{(p)}=\mathbf{M}_2(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{]p[}\times\mathbb{I}_0(p)$.

La relation de distribution (cf. lemme 3.14) pour $F_{c,\alpha,\beta}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)$ se traduit en terme de distribution :

Théorème 3.15. *Si* $1\leq j\in\mathbb{N}$, *il existe une distribution algébrique*

$$z'_{\mathbf{Eis},c}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)\in\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}((\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^{(p)}\times(\mathbb{Q}\otimes\widehat{\mathbb{Z}}),\mathcal{M}^{\mathrm{cong}}(\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}\otimes\mathcal{O}(\mathscr{W})))$$

vérifiant : soient $0\neq r\in\mathbb{Q}^*$ *et* $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ *tels que* $a\in\mathbb{Z}_p^*$ *et* $v_p(r)\geq 1$, *on a*

$$\begin{aligned}&\int_{(a+r\widehat{\mathbb{Z}})\times(b+r\widehat{\mathbb{Z}})}z'_{\mathbf{Eis},c}(\kappa^{\mathbf{univ}}-j)\\&\qquad=r^{-j}\,\mathrm{ord}(r^{-1}a)^{j-1}\kappa^{\mathbf{univ}}\Big(\frac{r}{\mathrm{ord}(r^{-1}a)}\Big)F_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}(\kappa^{\mathbf{univ}},j).\end{aligned}$$

De plus, si $\gamma\in\widehat{\Gamma}_0(p)$, *on a* $z'_{\mathbf{Eis},c}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)*\gamma=z'_{\mathbf{Eis},c}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)$.

En utilisant le fait que le produit d'une forme modulaire classique et d'une famille p-adique de formes modulaires est encore une famille p-adique de formes modulaires, on définit

$$z_{\mathbf{Eis},c,d}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)=\frac{1}{(j-1)!}z'_{\mathbf{Eis},c}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)\otimes z_{\mathbf{Eis},d}(j)\in\mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2^{(p)},\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}}\otimes\mathcal{O}(\mathscr{W}))).$$

D'après les constructions dans théorème 3.9 et théorème 3.15, la distribution $z_{\mathbf{Eis},c,d}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)$ possède la propriété suivante :

Proposition 3.16. *Si $k\geq 2$ et si $1\leq j\leq k-1$, on a*

$$\mathbf{Ev}_k(z_{\mathbf{Eis},c,d}(\kappa^{\mathbf{univ}},j))=z_{\mathbf{Eis},c,d}(k,j).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\mathbf{Ev}_k(z'_{\mathbf{Eis},c}(\kappa^{\mathbf{univ}},j))=z'_{\mathbf{Eis},c}(k-j).$$

Si $0\neq r\in\mathbb{Q}^*$ et $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ tels que $a\in\mathbb{Z}_p^*$ et $v_p(r)\geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{Ev}_k(&\int_{(a+r\widehat{\mathbb{Z}})\times(b+r\widehat{\mathbb{Z}})}z'_{\mathbf{Eis},c}(\kappa^{\mathbf{univ}},j))\\&=(\mathrm{ord}\,r^{-1}a)^{j+1-k}r^{k-2-j}\mathbf{Ev}_k(F_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)).\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\mathrm{ord}\,\frac{\langle\langle c\rangle\rangle a}{r}=\prod_l\mathrm{ord}_l\,\frac{\langle\langle c\rangle\rangle a}{r}=\mathrm{ord}\,\frac{a}{r}$ et donc

$$\mathbf{Ev}_k(F_{c,r^{-1}a,r^{-1}b}(\kappa^{\mathbf{univ}},j))=(\mathrm{ord}\,\frac{a}{r})^{k-j-1}F^{(k-j)}_{c,\frac{a}{r},\frac{b}{r}}.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}\mathbf{Ev}_k(\int_{(a+r\widehat{\mathbb{Z}})\times(b+r\widehat{\mathbb{Z}})}z'_{\mathbf{Eis},c}(\kappa^{\mathbf{univ}},j))&=r^{k-j-2}F^{(k-j)}_{c,\frac{a}{r},\frac{b}{r}}\\&=\int_{(a+r\widehat{\mathbb{Z}})\times(b+r\widehat{\mathbb{Z}})}z'_{\mathbf{Eis},c}(k-j).\end{aligned}$$ □

4. La loi de réciprocité explicite de Kato en famille

4.1. Préliminaire. Dans les deux premiers paragraphes, on rappelle la méthode de Tate-Sen-Colmez utilisée dans [14]. Ensuite, on établit une version entière de la description explicite de la cohomologie des représentations analytiques du groupe $P_{\mathfrak{R}_M}$ dans §4.1.3.

4.1.1. L'anneau $\mathfrak{K}^+$. Soit $\mathfrak{K}^+ = \mathbb{Q}_p\{\frac{q}{p}\}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q) \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$; c'est un anneau principal complet pour la valuation $v_{p,\mathfrak{K}}$ définie par la formule :

$$v_{p,\mathfrak{K}}(f) = \inf_{n\in\mathbb{N}} v_p(a_n), \quad \text{si } f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\left(\tfrac{q}{p}\right)^n \in \mathfrak{K}^+.$$

Dans la suite, on notera v_p au lieu de $v_{p,\mathfrak{K}}$[1]. On note $\mathfrak{K}$ le complété du corps des fractions de l'anneau $\mathfrak{K}^+$ pour la valuation v_p. Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathfrak{K}}$ de $\mathfrak{K}$. Comme $\mathfrak{K}$ est un corps complet pour la valuation v_p, on peut prolonger v_p sur $\mathfrak{K}$ à $\overline{\mathfrak{K}}$. On note le groupe de Galois de $\overline{\mathfrak{K}}$ sur $\mathfrak{K}$ par $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}}$.

Soit $M \geq 1$ un entier. On note q_M (resp. ζ_M) une racine M-ième $q^{1/M}$ (resp. $\exp(\frac{2i\pi}{M})$) de q (resp. 1). On note $F_M = \mathbb{Q}_p[\zeta_M]$. Soit $\mathfrak{K}_M = \mathfrak{K}[q_M, \zeta_M]$; c'est une extension galoisienne de $\mathfrak{K}$. Soit $\mathfrak{F}_M = \mathfrak{K}[\zeta_M]$ la sous-extension galoisienne de $\mathfrak{K}_M$ sur $\mathfrak{K}$; la clôture intégrale $\mathfrak{F}_M^+$ de $\mathfrak{K}^+$ dans $\mathfrak{F}_M$ est $\mathfrak{K}^+[\zeta_M]$, qui est l'anneau des fonctions analytiques sur la boule $v_p(q) \geq 1$ à coefficients dans F_M. Alors, $\mathfrak{K}_M$ est une extension de Kummer de $\mathfrak{F}_M$ de groupe de Galois cyclique d'ordre M, dont un générateur σ_M est défini par son action sur q_M :

$$\sigma_M q_M = \zeta_M q_M.$$

On note $\mathfrak{K}_\infty$ (resp. $\mathfrak{F}_\infty$, F_∞) la réunion des $\mathfrak{K}_M$ (resp. $\mathfrak{F}_M$, F_M) pour tout $M \geq 1$. On note $P_{\mathbb{Q}_p}$ (resp. $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$) le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}_\infty$ sur $\mathfrak{K}$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}_p\mathfrak{K}$). Le groupe $P_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ est un groupe profini qui est isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}$. De plus, on a une suite exacte :

$$0 \to P_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \to P_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p} \to 0,$$

et le groupe $P_{\mathbb{Q}_p}$ préserve l'algèbre des formes modulaires $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{Q}})$, ce qui permet de définir une application de localisation $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}} \to P_{\mathbb{Q}_p} \to \Pi_{\mathbb{Q}}$.

Fixons M un entier ≥ 1. On note $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ (resp. $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}$, F_{Mp^∞}) la réunion des $\mathfrak{K}_{Mp^n}$ (resp. $\mathfrak{F}_{Mp^n}$, F_{Mp^∞}) pour tout $n \geq 1$. On note $P_{\mathfrak{K}_M}$ le groupe de Galois de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ sur $\mathfrak{K}_M$. On note $U_{\mathfrak{K}_M}$ le groupe de Galois de $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}$ sur $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}$, qui est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}_p$, et on note $\Gamma_{\mathfrak{K}_M}$ le groupe de Galois de $\mathfrak{F}_{Mp^\infty}$ sur $\mathfrak{K}_M$, qui est isomorphe au groupe $\mathrm{Gal}(F_{Mp^\infty}/F_M)$. On a donc une suite exacte :

$$0 \to U_{\mathfrak{K}_M} \to P_{\mathfrak{K}_M} \to \Gamma_{\mathfrak{K}_M} \to 0.$$

Soit $\overline{\mathfrak{K}}^+$ la clôture intégrale de $\mathfrak{K}^+$ dans $\overline{\mathfrak{K}}$. On a une inclusion $\overline{\mathbb{Q}}_p \subset \overline{\mathfrak{K}}^+$. On note $\mathfrak{K}_M^+$ la clôture intégrale de $\mathfrak{K}^+$ dans $\mathfrak{K}_M$, qui est aussi la clôture intégrale de $\mathfrak{F}_M^+$ dans $\mathfrak{K}_M$.

[1] La restriction de la valuation $v_{p,\mathfrak{K}}$ à $\mathbb{Q}_p$ coïncide avec la valuation p-adique v_p sur $\mathbb{Q}_p$.

4.1.2. L'anneau $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour $\mathfrak{K}^+$ et ses sous-anneaux. Soit L un anneau de caractéristique 0 muni d'une valuation v_p telle que $v_p(p) = 1$. On note $\mathcal{O}_L = \{x \in L, v_p(x) \geq 0\}$ l'anneau des entiers de L. On note $\mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$ le complété de $\mathcal{O}_L$ pour la valuation v_p. On pose $\mathbb{C}(L) = \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}[\frac{1}{p}]$.

Définition 4.1. Soit $A_n = \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L$ pour tout $n \geq 1$; alors le système $\{A_n\}$ muni de morphismes de transition $A_n \to A_{n-1}$ définis par l'application de Frobenius absolu $x_n \mapsto x_n^p$ forme un système projectif. On note $\mathbb{R}(L)$ sa limite projective

$$\varprojlim A_n = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathcal{O}_L/p\mathcal{O}_L \text{ et } x_{n+1}^p = x_n, \text{ si } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}(L)$, soit $\hat{x}_n$ un relèvement de x_n dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$. La suite $(\hat{x}_{n+k}^{p^k})$, converge quand k tend vers l'infini. On note $x^{(n)}$ sa limite, qui ne dépend pas du choix des relèvements $\hat{x}_n$. On obtient ainsi une bijection : $\mathbb{R}(L) \to \{(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} | x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}, \text{pour tout } n\}$. Si $x = (x^{(i)}), y = y^{(i)}$ sont deux éléments de $\mathbb{R}(L)$, alors leur somme $x + y$ et leur produit xy sont donnés par :

$$(x+y)^{(i)} = \lim_{j\to\infty} (x^{(i+j)} + y^{(i+j)})^{p^j} \quad \text{et} \quad (xy)^{(i)} = x^{(i)}y^{(i)}.$$

L'anneau $\mathbb{R}(L)$ est un anneau parfait de caractéristique p (i.e. le morphisme $x \mapsto x^p$ est bijectif). On note $\mathbb{A}_{\inf}(L)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathbb{R}(L)$. Alors $\mathbb{A}_{\inf}(L)$ est un anneau p-adique (i.e. un anneau séparé et complet pour la topologie p-adique), d'anneau résiduel parfait de caractéristique p. Si $x \in \mathbb{R}(L)$, on note $[x] = (x, 0, 0, \dots) \in \mathbb{A}_{\inf}(L)$ son représentant de Teichmüller. Alors tout élément a de $\mathbb{A}_{\inf}(L)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{\infty} p^k[x_k]$ avec une suite $(x_k) \in (\mathbb{R}(L))^{\mathbb{N}}$.

On définit un morphisme d'anneaux $\theta : \mathbb{A}_{\inf}(L) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}(L)}$ par la formule

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k] \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} p^k x_k^{(0)}.$$

On note $\mathbb{B}_{\inf}(L) = \mathbb{A}_{\inf}(L)[\frac{1}{p}]$, et on étend θ en un morphisme

$$\mathbb{B}_{\inf}(L) \to \mathbb{C}(L).$$

On note $\mathbb{B}_m(L) = \mathbb{B}_{\inf}(L)/(\mathrm{Ker}\theta)^m$. On fait de $\mathbb{B}_m(L)$ un anneau de Banach en prenant l'image de $\mathbb{A}_{\inf}(L)$ comme anneau d'entiers.

On définit $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(L) := \varprojlim \mathbb{B}_m(L)$ comme le complété $\mathrm{Ker}(\theta)$-adique de $\mathbb{B}_{\inf}(L)$; on le munit de la topologie de la limite projective, ce qui en fait un anneau de Fréchet. Donc θ s'étend en un morphisme continu d'anneaux topologiques

$$\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(L) \to \mathbb{C}(L).$$

On peut munir $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(L)$ d'une filtration de la façon suivante : pour $i \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{Fil}^i\, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(L)$ la i-ième puissance de l'idéal $\mathrm{Ker}\theta$ de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(L)$.

L'anneau $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(L)$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(L)$, et si $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, on pose

$$U_{m,k} = p^m \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(L) + (\mathrm{Ker}\theta)^{k+1} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(L),$$

alors les $U_{m,k}$ forment une base de voisinages de 0 dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(L)$.

Pour simplifier la notation, on note $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ (resp. $\mathbb{B}_{\mathrm{inf}}$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$) l'anneau $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\bar{\mathcal{R}}^+)$ (resp. $\mathbb{B}_{\mathrm{inf}}(\bar{\mathcal{R}}^+)$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\bar{\mathcal{R}}^+)$).

Soit $\tilde{q}$ (resp. $\tilde{q}_M$ si $M \geq 1$ est un entier) le représentant de Teichmüller dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ de $(q, q_p, \dots, q_{p^n}, \dots)$ (resp. $(q_M, \dots, q_{Mp^n}, \dots)$). Si $M|N$, on a $\tilde{q}_N^{N/M} = \tilde{q}_M$.

On définit une application continue $\iota_{\mathrm{dR}} : \bar{\mathcal{R}}^+ \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ par $f(q) \mapsto f(\tilde{q})$; ce qui permet d'identifier $\bar{\mathcal{R}}^+$ à un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\bar{\mathcal{R}}^+)$. Mais il faut faire attention au fait que $\iota_{\mathrm{dR}}(\bar{\mathcal{R}}^+)$ n'est pas stable par $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ car $\tilde{q}\sigma = \tilde{q}\tilde{\zeta}^{c_q(\sigma)}$ si $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathcal{R}}$, où c_q est le 1-cocycle à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ associé à q par la théorie de Kummer.

Posons $\tilde{\bar{\mathcal{R}}}^+ = \iota_{\mathrm{dR}}(\bar{\mathcal{R}}^+)[[t]]$. Si $M \geq 1$ est un entier, on note $\tilde{\bar{\mathcal{R}}}_M^+$ l'anneau $\tilde{\bar{\mathcal{R}}}^+[\tilde{q}_M, \tilde{\zeta}_M]$. On peut étendre l'application ι_{dR} en un morphisme continu de $\bar{\mathcal{R}}^+$-modules $\iota_{\mathrm{dR}} : \bar{\mathcal{R}}_M^+ \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\bar{\mathcal{R}}^+)$ en envoyant ζ_M et q_M sur $\tilde{\zeta}_M$ et $\tilde{q}_M$ respectivement. Alors, on a $\tilde{\bar{\mathcal{R}}}_M^+ = \iota_{\mathrm{dR}}(\bar{\mathcal{R}}_M^+)[[t]]$. On pose $\tilde{\bar{\mathcal{R}}}_{Mp^\infty}^+ = \bigcup_n \tilde{\bar{\mathcal{R}}}^+[\tilde{\zeta}_{Mp^n}, \tilde{q}_{Mp^n}]$.

On définit une application $\iota_{\mathrm{dR}}(\bar{\mathcal{R}})^+$-linéaire $\mathbf{R}_M : \tilde{\bar{\mathcal{R}}}_{Mp^\infty}^+ \to \tilde{\bar{\mathcal{R}}}_M^+$ par la formule suivante :

$$\mathbf{R}_M : \tilde{\bar{\mathcal{R}}}_{Mp^\infty}^+ \to \tilde{\bar{\mathcal{R}}}_M^+, \quad \tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b \mapsto \begin{cases} \tilde{\zeta}_{Mp^n}^a \tilde{q}_{Mp^n}^b & \text{si } p^n|a \text{ et } p^n|b; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 4.2. *Si M est un entier ≥ 1, alors*

(1) $\mathrm{H}^0(\mathcal{G}_{\mathcal{R}_{Mp^\infty}}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+) = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\bar{\mathcal{R}}_{Mp^\infty}^+)$,

(2) *$\tilde{\bar{\mathcal{R}}}_{Mp^\infty}^+$ est dense dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\bar{\mathcal{R}}_{Mp^\infty}^+)$,*

(3) *Si $v_p(M) \geq v_p(2p)$, alors $\mathbf{R}_M$ s'étend par continuité en une application $\bar{\mathcal{R}}^+$-linéaire $\mathbf{R}_M : \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\bar{\mathcal{R}}_{Mp^\infty}^+) \to \tilde{\bar{\mathcal{R}}}_M^+$ qui commute à l'action de $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$.*

Soit A une $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Banach et on note A^+ l'anneau des entiers de A.

Proposition 4.3. *Si $v_p(M) \geq v_p(2p)$, si V est une A-représentation de Banach de $P_{\mathcal{R}_M}$ possédant une A^+-représentation T telle que $P_{\mathcal{R}_M}$ agisse trivialement sur $T/2pT$, et si $i \in \mathbb{N}$, alors $\mathbf{R}_M$ induit un isomorphisme :*

$$\mathbf{R}_M : \mathrm{H}^i(P_{\mathcal{R}_M}, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\bar{\mathcal{R}}_{Mp^\infty}^+) \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} V) \cong \mathrm{H}^i(P_{\mathcal{R}_M}, \tilde{\bar{\mathcal{R}}}_M^+ \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}_p} V).$$

Démonstration. La démonstration est standard et le lecteur intéressé pourra consulter [14], section 3. □

4.1.3. La cohomologie des représentations du groupe $P_{\mathfrak{K}_M}$. Soit $M \geq 1$ tel que $v_p(M) = m \geq v_p(2p)$. Le groupe de Galois $P_{\mathfrak{K}_M}$ de l'extension $\mathfrak{K}_{Mp^\infty}/\mathfrak{K}_M$ est un groupe analytique p-adique compact de rang 2, isomorphe à

$$\mathrm{P}_m = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) : a = 1,\ c = 0,\ b \in p^m\mathbb{Z}_p,\ d \in 1 + p^m\mathbb{Z}_p\right\},$$

et si $u, v \in p^m\mathbb{Z}_p$, on note $\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & e^v \end{smallmatrix}\right)$ de P_m. La loi de groupe s'écrit sous la forme

$$(u_1, v_1)(u_2, v_2) = (e^{v_2}u_1 + u_2, v_1, v_2).$$

Soient U_m et Γ_m les sous-groupes de P_m topologiquement engendrés par $(p^m, 0)$ et $(0, p^m)$ respectivement. Ces deux sous-groupes sont isomorphes à $\mathbb{Z}_p$. De plus, U_m est distingué dans P_m et on a $\mathrm{P}_m/U_m = \Gamma_m$. Comme U_m et Γ_m n'ont pas de H^2, la suite spectrale de Hochschild–Serre nous fournit, si V est une $\mathbb{Q}_p$-représentation de dimension finie de P_m, un isomorphisme

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V) \cong \mathrm{H}^1(\Gamma_m, \mathrm{H}^1(U_m, V)) \cong V/((p^m, 0) - 1, (0, p^m) - e^{p^m}).$$

Soit $\gamma \in \mathrm{P}_m$; l'image de la fonction analytique $\alpha_\gamma : \mathbb{Z}_p \to \mathrm{P}_m, \alpha_\gamma(x) = \gamma^x$ est un *sous-groupe à un paramètre*. On dira que l'action de P_m sur une $\mathbb{Q}_p$-représentation de dimension finie V est analytique si pour tout $\gamma \in \mathrm{P}_m$ et $v \in V$, la fonction $x \mapsto \gamma^x v = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{x}{n}(\gamma - 1)^n v$ est une fonction analytique sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans V.

Soit V une $\mathbb{Q}_p$-représentation de P_m. Si l'action de P_m sur V est analytique, pour tout $\gamma \in \mathrm{P}_m$, on peut définir une dérivation $\partial_\gamma : V \to V$ par rapport à α_γ par la formule :

$$\partial_\gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x * \gamma^{p^n} - x}{p^n}.$$

En particulier, on note $\partial_{m,i}$, $i = 1, 2$, les dérivations par rapport à $(p^m, 0)$ et $(0, p^m)$ respectivement.

Définition 4.4. On dira qu'une $\mathbb{Q}_p$-représentation de dimension finie V de P_m est analytique si l'action de P_m est analytique sur V.

On a le résultat très utile :

Proposition 4.5. *Soit V une représentation analytique de P_m munie d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T stable sous l'action de P_m. Alors, ,*

(i) *tout élément de $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, T)$ est représentable par un 2-cocycle analytique à un élément de p^{2m}-torsion près ;*

(ii) *on a $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, T) \cong T/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m)$, et l'image d'un 2-cocycle analytique*

$$((u, v), (x, y)) \to c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l\geq 2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l,$$

avec $p^{(i+j+k+l)m}c_{i,j,k,l} \in T$, *par cet isomorphisme, est celle de*

$$\delta^{(2)}(c_{(u,v),(x,y)}) = p^{2m}(c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})$$

à un élément de p^{2m}*-torsion près.*

Démonstration. On dispose des opérateurs $\partial_i : V \to V$, $i = 1, 2$, définis par $x * (u, v) = x + u\partial_1 x + v\partial_2 x + O((u, v)^2)$. Ces opérateurs ont des propriété de dérivations : si $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2$, où V_1, V_2 sont des représentations analytiques de P_m, et si $i = 1, 2$, on a

$$\partial_i(x_1 \otimes x_2) = (\partial_i x_1) \otimes x_2 + x_1 \otimes \partial_i x_2.$$

On a les relations suivantes $\partial_1 = p^{-m}\partial_{u_m}$, $\partial_2 = p^{-m}\partial_{\gamma_m}$.

La proposition 4.10 dans [14] dit que si V est une représentation analytique de P_m, alors

(i) tout élément de $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V)$ est représentable par un 2-cocycle analytique ;

(ii) on a un isomorphisme $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, V) \cong V/(\partial_1, \partial_2 - 1)$, et l'image d'un 2-cocycle analytique,

$$((u, v), (x, y)) \to c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l \geq 2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l,$$

sous cet isomorphisme est aussi celle de $\tilde{\delta}^{(2)}(c_{(u,v),(x,y)}) = c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0}$ dans $V/(\partial_1, \partial_2 - 1)$.

Comme ∂_1 et $\partial_2 - 1$ introduissent des dominateurs, ils ne préservent pas T. Par contre, $\partial_{m,1}$ et $\partial_{m,2} - p^m$ le préservent. La démonstration de la proposition 4.10 dans [14] s'adapte à une démonstration du théorème ci-dessus. Pour faciliter la lecture, on donne l'idée de la démonstration ; les détails du calcul se trouvent dans [14].

(1) Le groupe P_m est de dimension cohomologique ≤ 2. En utilisant la suite spectrale de Hochschild–Serre, on déduit de la suite exacte $1 \to U_m \to \mathrm{P}_m \to \Gamma_m \to 1$:

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, T) \cong \mathrm{H}^1(\Gamma_m, \mathrm{H}^1(U_m, T)) \cong T/(u_m - 1, \gamma_m - e^{p^m}).$$

Par ailleurs, l'application surjective naturelle

$$\phi : T/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m) \to T/(u_m - 1, \gamma_m - e^{p^m})$$

est un isomorphisme. On en déduit l'isomorphisme $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, T) \cong T/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m)$. Par cet isomorphisme, il suffit de montrer le point (*i i*) du théorème et de montrer que l'application

$$\delta^{(2)} : \{\text{2-cocycles analytiques}\} \to T$$

induit une surjection $\mathrm{H}^{\mathrm{an},2}(\mathrm{P}_m, T) \to T/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m)$ à un élément de p^{2m}-torsion près.

(2) Le calcul délicat dans §4.1 de [14], qui montre que l'application

$$\tilde{\delta}^{(2)}\colon \{\text{2-cocycles analytiques à valeurs dans } V\} \to V$$

induit une surjection $\mathrm{H}^{\mathrm{an},2}(\mathrm{P}_m, V) \to V/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m)$, s'adapte à notre cas en constatant que l'image d'un 2-cocycle analytique à valeurs dans T sous l'application $\tilde{\delta}^{(2)}$ est dans $p^{-2m}T$ (cf. [14], lemme 4.14). Plus précisément, si $c_{(u,v),(x,y)} = \sum_{i+j+k+l\geq 2} c_{i,j,k,l} u^i v^j x^k y^l$ est un 2-cocycle analytique sur P_m à valeurs dans T, on construit un 2-cobord formel $d(b_{(x,y)})$ tel que $c_{(u,v),(x,y)} - (c_{1,0,0,1} - c_{0,1,1,0})uy = db$. Notons que $b_{(x,y)}$ ne converge pas sur P_m, mais il converge si on le restreint à $\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}$. Par ailleurs, on a la suite exacte d'inflation-restriction,

$$0 \to \mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m/\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}, T^{\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}}) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m, T) \to \mathrm{H}^2(\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}, T),$$

où $\mathrm{H}^2(\mathrm{P}_m/\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}, T^{\mathrm{P}_{m+v_p(2p)}})$ est un groupe de p^{2m}-torsion. Ceci permet de prouver le théorème. □

4.2. L'application exponentielle duale de Kato en famille

4.2.1. La structure entière de la représentation $\mathbf{D}_{1,j,\mathscr{W}}$ de $\mathbf{P}_m$. Soient L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}_L$ son anneau des entiers. À un élément $\mu \in \mathbf{D}_0(\mathbb{Z}_p, L)$, on associe une série formelle :

$$\mathcal{A}_\mu(T) = \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^z \mu,$$

appelée *transformée d'Amice* de μ. On a le lemme suivant :

Lemme 4.6. *L'application $\mu \mapsto \mathcal{A}_\mu$ est une isométrie d'espaces de Banach de $\mathbf{D}_0(\mathbb{Z}_p, L)$ sur $\mathcal{E}_L^+ = \mathcal{O}_L[[T]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.*

La transformée d'Amice induit un isomorphisme de familles de représentations de Banach de $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(\mathscr{W})$ sur $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^+ \hat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W})$.

Lemme 4.7. *Soient $u, v \in p^m\mathbb{Z}_p$. Si μ est une mesure sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$, l'action de $(u,v) \in \mathrm{P}_m$ sur $\mathcal{A}_\mu(T)$ induite par celle sur $\mathbf{D}_{0,\rho_j^{\mathrm{univ}}}(\mathscr{W})$ est donne par la formule suivante :*

$$\mathcal{A}_\mu(T) * (u,v) = e^{-vj}(1+T)^u \mathcal{A}_\mu((1+T)^{e^v} - 1). \tag{10}$$

L'anneau $\mathcal{R}_{1,L}^+$ des fonctions analytiques sur le disque $v_p(T) \geq 1$, noté par C_1 dans l'exemple 2.3, est un L-Banach pour la valuation $v_{\mathcal{R}_1}$ définie par la formule

$$v_{\mathcal{R}_1}(f) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (v_p(b_n) + n), \quad \text{si } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n \in \mathcal{R}_{1,L}^+.$$

On note $\mathcal{R}_{1,L}^{++}$ son anneau des entiers pour la valuation $v_{\mathcal{R}_1}$.

On note $\mathbf{D}_1$ le faisceau de modules de Banach sur l'espace des poids défini par : $\mathbf{D}_1(\mathscr{W}_n) = \mathcal{R}_{1,\mathbb{Q}_p}^{+} \widehat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$ pour tout entier $n \geq 1$. Comme le $\mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$-module $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{+} \widehat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$ est dense dans $\mathbf{D}_1(\mathscr{W}_n)$, l'action de P_m sur $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}_p}^{+} \widehat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$ s'étend en une action continue sur $\mathbf{D}_1(\mathscr{W}_n)$. Ceci nous fournit un faisceau de représentations de Banach sur $\mathscr{W}$, noté par $\mathbf{D}_{1,j}$. On note $\mathbf{D}_{1,j}^{+}(\mathscr{W}_n) = \mathcal{R}_{1,\mathbb{Q}_p}^{++} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)^{+}$ le sous-$\mathcal{O}(\mathscr{W}_n)^{+}$-module de Banach de $\mathbf{D}_{1,j}(\mathscr{W}_n)$, qui est la structure entière de la $\mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$-représentation de Banach $\mathbf{D}_{1,j}(\mathscr{W}_n)$ de P_m.

Lemme 4.8. *L'action de* P_m *sur* $\mathbf{D}_{1,j}(\mathscr{W}_n)$ *est analytique pour tout* n.

Démonstration. Comme le groupe P_m est un groupe analytique compact de rang 2 engendré par $u_m = (p^m, 0)$ et $\gamma_m = (p^m, 0)$, il suffit de montrer que, pour tout $f(T) \in \mathbf{D}_{1,j}(\mathscr{W}_n)$, la fonction $x \mapsto f(T) * u_m^x$ (resp. $x \mapsto f(T) * \gamma_m^x$) est une fonction analytique sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans $\mathbf{D}_{1,j}(\mathscr{W}_n)$.

Comme $\gamma^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{x}{n}(\gamma-1)^n$ pour $\gamma \in \mathrm{P}_m$, on se ramène à estimer la valuation $\frac{(\gamma-1)T^i}{T^i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $\gamma = u_m, \gamma_m$ respectivement. En effet, de la formule (10), on déduit que pour $i \in \mathbb{N}$ et $\gamma = u_m$ ou γ_m, la valuation de $\frac{(\gamma-1)T^i}{T^i}$ est ≥ 1. On donne l'estimation seulement pour $\gamma = \gamma_m$ et l'estimation pour $\gamma = u_m$ se déduit de la même manière.

De la formule (10) pour γ_m, on a

$$T^i * (\gamma_m - 1) = \big((1+T)^{e^{p^m}} - 1\big)^i - T^i = T^i\Big(\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{e^{p^m}}{k} T^{k-1}\Big)^i - 1\Big).$$

On conclut le lemme du fait que la valuation de $\big(\sum_{k=1}^{+\infty} \binom{e^{p^m}}{k} T^{k-1}\big)^i - 1$ est ≥ 1 dans $\mathbf{D}_{1,j}(\mathscr{W}_n)$. □

Pour terminer ce paragraphe, on établit les formules pour les actions de $\partial_{m,1}$ et $\partial_{m,2}$ sur $\mathbf{D}_{1,j}(\mathscr{W}_n)$ pour tout n.

Lemme 4.9. *Si* $f(T) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i T^i \in \mathbf{D}_{1,j}(\mathscr{W}_n)$ *avec* $a_i \in \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$, *les actions de* $\partial_{m,1}$ *et* $\partial_{m,2} - p^m$ *sur* $f(T)$ *sont données par les formules suivantes :*

$$\begin{aligned} \partial_{m,1} f(T) &= p^m \log(1+T) f(T), \\ (\partial_{m,2} - p^m) f(T) &= p^m \Big(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i i (1+T) T^{i-1} \log(1+T)\Big) - p^m (j+1) f(T). \end{aligned} \tag{11}$$

Démonstration. On donne seulement le calcul pour l'action de $\partial_{m,2}$, et la formule pour l'action de $\partial_{m,1}$ se déduit de la même manière :

$$\begin{aligned}
\partial_{m,2}(T^i) &= \lim_{n\to\infty} \frac{T^i * (\gamma_m^{p^n} - 1)}{p^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left((1+T)^{e^{p^{m+n}}} - 1\right)^i \det{}^{-j}(\gamma_m^{p^n}) - T^i}{p^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\det{}^{-j}(\gamma_m^{p^n})(\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k}(1+T)^{e^{p^{m+n}}k}(-1)^{i-k}) - T^i}{p^n} \\
&= -jp^m T^i + p^m \log(1+T)\Big(\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} k(1+T)^k(-1)^{i-k}\Big) \\
&= p^m \left(i(1+T)T^{i-1}\log(1+T) - jT^i\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

4.2.2. La construction de l'application $\exp^*_{\mathrm{Kato},v}$. On note $\mathfrak{K}^{++} = \mathbb{Z}_p\{\frac{q}{p}\}$ l'anneau des entiers de $\mathfrak{K}^+$ pour la valuation v_p, ainsi que $\mathcal{K}^{++}$ son complété q-adique. On note $\mathfrak{K}_M^{++}$ l'anneau des entiers de $\mathfrak{K}_M^+$, qui est l'anneau

$$\left\{\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n q_M^n \in \mathfrak{K}_M^+ : a_n \in F_M \text{ tel que } v_p(a_n) + \frac{n}{M} \geq 0\right\},$$

et on note $\mathcal{K}_M^{++}$ son complété q-adique, ainsi que $\mathcal{K}_M^+ = \mathcal{K}_M^{++} \otimes \mathbb{Q}_p$.

Rappelons que l'application $\iota_{\mathrm{dR}} \colon \mathfrak{K}^+ \to \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+;\ f(q) \mapsto f(\tilde{q})$ identifie $\mathfrak{K}^+$ à un sous-anneau de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$. On note $\widetilde{\mathfrak{K}}^+ = \iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+)[[t]]$ et $\widetilde{\mathcal{K}}^+ = (\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^{++})} \otimes \mathbb{Q}_p)[[t]]$, où $\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^{++})}$ est le complété $\tilde{q}$-adique de $\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^{++})$. De même, on note $\widetilde{\mathfrak{K}}_M^+ = \iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^+)[[t]]$ et $\widetilde{\mathcal{K}}_M^+ = (\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^{++})} \otimes \mathbb{Q}_p)[[t]]$. On a bien

$$\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^{++})} = \left\{\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tilde{q}_M^n \in F_M[[\tilde{q}_M]] : a_n \in F_M \text{ tel que } v_p(a_n) + \frac{n}{M} \geq 0\right\}.$$

On définit une application $\theta \colon \widetilde{\mathcal{K}}_M^+ \to \mathcal{K}_M^+$ par réduction modulo t, qui coïncide avec celle sur $\widetilde{\mathfrak{K}}_M^+$. On constate que $\widetilde{\mathfrak{K}}_M^+$ est la limite projective $\varprojlim_n (\widetilde{\mathfrak{K}}_M^+/t^n)$, où les $\widetilde{\mathfrak{K}}_M^+/t^n$ sont des $\mathfrak{K}^+$-modules de rang fini munis de la topologie p-adique.

Fixons un ouvert affinoïde $\mathscr{W}_n$ de l'espace des poids $\mathscr{W}$ pour $n \geq 1$ un entier. On a un isomorphisme $\mathcal{O}(W_n) \cong \mathbb{Z}_p[\Delta] \otimes C_n$, où C_n est le sous-anneau de $\mathbb{Q}_p[[T_1 - 1]]$ consistant des fonctions analytiques sur le disque $v_p(T_1 - 1) \geq \frac{1}{n}$ et Δ est un groupe cyclique d'ordre $p-1$ engendré par X_1. Dans la suite, on identifie $\mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$ avec $\mathbb{Z}_p[\Delta] \otimes C_n$.

Posons $\widetilde{\mathbf{D}} = \varprojlim_{n_1} (\widetilde{\mathfrak{K}}_M^+/t^{n_1}) \widehat{\otimes} \mathbf{D}_{1,j-2}(\mathscr{W}_n)$, qui est une $\mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$-représentation de P_m. Elle n'est pas une $\mathbb{Q}_p$-représentation analytique. On note $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1} = (\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}_M^{++})} \widehat{\otimes} \mathbf{D}_{1,j-2}^+(\mathscr{W}_n)[[t]])/t^{n_1}$ le $\mathbb{Z}_p$-réseau de $(\widetilde{\mathfrak{K}}_M^+/t^n) \widehat{\otimes} \mathbf{D}_{1,j-2}(\mathscr{W}_n)$ qui est stable sous l'action de P_m. On déduit de la formule (10) que l'idéal $\mathrm{m} = (T_1 - 1, T, \tilde{q}_M)$ de $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1}$

est stable sous l'action de P_m. Ceci nous permet de définir des $\mathbb{Z}_p$-représentations analytiques $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ de P_m, pour tous $n_1, n_2 \geq 1$,

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2} = (\widehat{\iota_{\mathrm{dR}}(\mathcal{R}_M^{++})} \widehat{\otimes} \mathbf{D}^+_{1,j-2}(\mathscr{W}_n)[[t]])/t^{n_1})/\mathrm{m}^{n_2}.$$

L'inclusion $\widetilde{\mathbf{D}} \subset \varprojlim_{n_1} \big((\varprojlim_{n_2} \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}) \otimes \mathbb{Q}_p\big)$ de P_m-représentations, nous permet de définir un morphisme :

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^i(\mathrm{P}_m, \widetilde{\mathbf{D}}) &\to \varprojlim_{n_1} \mathrm{H}^i(\mathrm{P}_m, (\varprojlim_{n_2} \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}) \otimes \mathbb{Q}_p) \\ &\to \varprojlim_{n_1} \big((\varprojlim_{n_2} \mathrm{H}^i(\mathrm{P}_m, \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2})) \otimes \mathbb{Q}_p\big).\end{aligned}$$

Lemme 4.10. *Les actions de $\partial_{m,1}$ et $\partial_{m,2} - p^m$ sur t et $\tilde{q}_M$ sont données par les formules suivantes :*

$$\partial_{m,1}(t) = 0, \partial_{m,1}(\tilde{q}_M) = \frac{p^m t}{M}\tilde{q}_M; \partial_{m,2}(t) = p^m t, \partial_{m,2}(\tilde{q}_M) = 0.$$

Démonstration. Le lemme se déduit d'un calcul direct, qui se trouve dans [14], §5.1. □

Proposition 4.11. *Si $v_p(M) = m \geq v_p(2p)$ et si $j \geq 1$, alors l'application*

$$f(q_M) \mapsto \mathcal{A}_{v_{j-2}} t^{j-1} f(\tilde{q}_M)$$

induit un isomorphisme de $\mathcal{K}_M^{++} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$ sur

$$\varprojlim_{n_1} \big((\varprojlim_{n_2} \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m)) \otimes \mathbb{Q}_p\big),$$

où $\mathcal{A}_{v_{j-2}}$ est la transformée d'Amice de la section globale v_{j-2} de $\mathbf{D}_{0,\rho^{\mathrm{univ}}_{j-2}}(\mathscr{W}_n) \subset \mathbf{D}_{1,j-2}(\mathscr{W}_n)$.

Remarque 4.12. La section globale v_{j-2} est la masse de Dirac en 0 (cf. lemme 2.16). On a $\mathcal{A}_{v_{j-2}} = 1$, mais il faut faire attention que l'action de $\mathbb{I}_0(p)$ sur $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ n'est pas triviale : si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{I}_0(p)$, on a $\mathcal{A}_{v_{j-2}*\gamma} = \mathcal{A}_{\delta_{\frac{b}{a}}} \cdot \kappa^{\mathrm{univ}}(a) \det(\gamma)^{2-j}$, où $\delta_{\frac{b}{a}}$ est la masse de Dirac en $\frac{b}{a}$ (si $\gamma \in \mathrm{P}_m$, on a $a = 1$ et donc $\kappa^{\mathrm{univ}}(a) = 1$).

Pour démontrer la proposition (4.11), on a besoin d'un lemme préparatoire. On définit une valuation p-adique v_p sur $F_M[\Delta]$ par la formule :

$$v_p(x) = \inf_{0 \leq n \leq p-2} v_p(a_n), \quad \text{si } x = \sum_{n=0}^{p-2} a_n X_1^n \text{ avec } a_n \in F_M.$$

Alors tous les éléments de $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ sont de la forme

$$\sum_{\substack{0\le k,l,r,s\\ k+l+r\le n_2-1;\\ s\le n_1-1}} a_{k,l,r,s}T^k(T_1-1)^l\tilde{q}_M^r t^s,$$

où $a_{k,l,r,s}\in F_M[\Delta]$ vérifie $v_p(a_{k,l,r,s})+\frac{r}{M}+k\ge 0$.

On note $\mathbf{M}_{n_1,n_2}$ le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ des éléments de la forme

$$\sum_{\substack{0\le l,r,s\\ l+r\le n_2-1;\\ s\le n_1-1}} a_{l,r,s}\mathcal{A}_{v_j-2}(T_1-1)^l\tilde{q}_M^r t^s \quad \text{où } a_{l,r,s}\in F_M \text{ vérifie } v_p(a_{l,r,s})+\frac{r}{M}\ge 0.$$

On constate qu'il n'existe pas d'élément de $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ tel que $\partial_{m,1}x$ appartient à $\mathbf{M}_{n_1,n_2}$. Par conséquent, l'application naturelle

$$\phi_1\colon \mathbf{M}_{n_1,n_2}\to \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/\partial_{m,1}$$

est injective.

Lemme 4.13. *Le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbf{M}_{n_1,n_2}+\partial_{m,1}\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ contient $p^{2m(n_1+1)}T\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$, pour tout $n_1,n_2\ge 1$.*

Démonstration. D'après le lemme 4.9, on a la formule $\partial_{m,1}(T^k)=p^m\log(1+T)T^k$ et donc

$$\partial_{m,1}(T^k\tilde{q}_M^r t^s)=p^mT^k\log(1+T)\tilde{q}_M^r t^s+rT^k\frac{p^m}{M}\tilde{q}_M^r t^{s+1}. \tag{12}$$

Si $x\in\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$, alors x est de la forme

$$\sum_{\substack{0\le k,l,r,s;\\ k+l+r\le n_2-1;\\ s\le n_1-1}} a_{k,l,r,s}T^k(T_1-1)^l\tilde{q}_M^r t^s,$$

avec $a_{k,l,r,s}\in F_M[\Delta]$ vérifiant $v_p(a_{k,l,r,s})+\frac{r}{M}+k\ge 0$.

Il s'agit de montrer que tous les termes $p^{2m(n_1+1)}a_{k,l,r,s}T^k(T_1-1)^l\tilde{q}_M^r t^s$, où $k\ge 1$ et $a_{k,l,r,s}\in F_M[\Delta]$ satisfait $v_p(a_{k,l,r,s})+\frac{r}{M}+k\ge 0$, sont dans $\partial_{m,1}\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$.

(i) Si $r=0$, la formule (12) s'écrit alors sous la forme :

$$\partial_{m,1}(a_{k,l,0,s}T^k(T_1-1)^l t^s)=p^m a_{k,l,0,s}T^k(T_1-1)^l\log(1+T)t^s.$$

Par ailleurs, on a $\log(1+T)=T(1+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-T)^i}{i+1})$. On constate que $1+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-T)^i}{i+1}$ est inversible dans $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ et on note son inverse par $g(T)$.

Supposons que $x \in T\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$. Comme $v_p(a_{k,l,0,s}) + k \geq 0$, on a $v_p(a_{k,l,0,s}) + m + k - 1 \geq 0$; ceci implique que

$$y = \sum_{\substack{0 \leq l,s; 1 \leq k; \\ k+l \leq n_2-1; \\ s \leq n_1-1}} p^m a_{k,l,0,s} T^{k-1}(T_1 - 1)^l t^s$$

appartient à $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ et on a $\partial_{m,1}(yg(T)) = p^{2m}x$.

(ii) Dans la suite, on suppose que $r \neq 0$. On démontrera le lemme dans ce cas par récurrence descendante sur s.

Si $s = n_1 - 1$, la formule (12) s'écrit alors sous la forme :

$$\partial_{m,1}(a_{k,l,r,s} T^k (T_1 - 1)^l \tilde{q}_M^r t^s) = p^m a_{k,l,r,s} T^k (T_1 - 1)^l \log(1 + T) \tilde{q}_M^r t^s.$$

On en déduit que $\partial_{m,1}\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ contient tous les termes $p^m a_{k,l,r,s} T^k (T_1 - 1)^l \tilde{q}_M^r t^s$ avec $s = n_1 - 1$ et $k \geq 1$; et donc tous les termes $p^{2m} a_{k,l,r,s} T^k (T_1 - 1)^l \tilde{q}_M^r t^s$ avec $s = n_1 - 1$ et $k \geq 1$.

Fixons s_0 un entiers tel que $0 < s_0 \leq n_1 - 2$. Supposons que $\mathbf{M}_{n_1,n_2} + \partial_{m,1}\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ contient tout les termes $p^{2m(n_1-s+1)} a_{k,l,r,s} T^k (T_1 - 1)^l \tilde{q}_M^r t^s$ avec $s \geq s_0 + 1$. Il s'agit à montrer que $\mathbf{M}_{n_1,n_2} + \partial_{m,1}\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ contient tout les termes $x_{k,l,r,s} = p^{2m(n_1-s+1)} a_{k,l,r,s} T^k (T_1 - 1)^l \tilde{q}_M^r t^s$ avec $s = s_0$ et $k \geq 1$.

Comme $v_p(a_{k,l,r,s}) + \frac{r}{M} + k \geq 0$ avec $k \geq 1$, on a $v_p(a_{k_0,l,r,s}) + \frac{r}{M} + m + k - 1 \geq 0$ et donc $y_{k,l,r,s_0} = p^{m+2m(n_1-s_0)} a_{k,l,r,s_0} T^{k-1} (T_1 - 1)^l \tilde{q}_M^r t^{s_0}$ appartient à $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$. Par récurrence, on a $t y_{k,l,r,s_0} \in \mathbf{M}_{n_1,n_2} + \partial_{m,1}\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$.

De la formule (12), on a :

$$\begin{aligned}\partial_{m,1}(y) =& p^{2m(n_1-s_0+1)} a_{k,l,r,s_0} T^{k-1} (T_1 - 1)^l \log(1 + T) \tilde{q}_M^r t^{s_0} + \frac{rp^m}{M} \tilde{q}_M^r y t \\ =& x_{k,l,r,s_0} g(T) + \frac{rp^m}{M} \tilde{q}_M^r y t.\end{aligned}$$

On en déduit que le lemme est vrai pour les termes avec $s = s_0$. □

Corollaire 4.14. *Si n_1, n_2 sont deux entiers ≥ 1, le conoyau* Coker ϕ_1 *de ϕ_1 est un $\mathbb{Z}_p$-module de $p^{2m(n_1+1)}$-torsion.*

On revient à la démonstration de la proposition 4.11.

Démonstration de la proposition 4.11. Comme on a

$$(\partial_{m,2} - p^m)(\mathcal{A}_{v_j-2} \tilde{q}_M^r t^s) = p^m (s - j + 1) \mathcal{A}_{v_j-2} \tilde{q}_M^r t^s, \tag{13}$$

le $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbf{M}_{n_1,n_2}$ est stable sous l'action de $\partial_{m,2} - p^m$. Donc l'application ϕ_1 induit une application injective, que l'on note encore par ϕ_1,

$$\phi_1 : \mathbf{M}_{n_1,n_2}/(\partial_{m,2} - p^m) \to \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m).$$

En plus, on déduit du corollaire (4.14) que son conoyau est un $\mathbb{Z}_p$-module de $p^{2m(n_1+1)}$-torsion.

Si $n_1 \geq 1$, on note

$$(\mathcal{K}_M^{++} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)^+)_{n_1} = (\mathcal{K}_M^{++} \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)^+)/(T_1 - 1, q_M)^{n_1}.$$

Pour tout $n_1 \geq j+1$, on dispose d'une application

$$\phi_0 \colon (\mathcal{K}_M^{++} \hat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)^+)_{n_2} \to \mathbf{M}_{n_1,n_2}$$

en envoyant $f(q_M)$ sur $f(\tilde{q}_M)t^{j-1}\mathcal{A}_{v_{j-2}}$, qui est une injection. De la formule (13) pour $s = j-1$, on déduit que ϕ_0 induit une application injective, notée encore par ϕ_0,

$$\phi_0 \colon (\mathcal{K}_M^{++} \hat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)^+)_{n_2} \to \mathbf{M}_{n_1,n_2}/(\partial_{m,2} - p^m).$$

En composant avec l'application ϕ_1, on obtient une application injective

$$\phi = \phi_1 \circ \phi_0 \colon (\mathcal{K}_M^{++} \hat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)^+)_{n_2} \to \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m).$$

En prenant la limite projective sur n_2, on obtient une injection

$$\mathcal{K}_M^{++} \hat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)^+ \to (\varprojlim_{n_2} \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m)) \quad \text{pour } n_1 \geq j-1.$$

Il ne reste qu'à montrer la surjectivité de

$$\mathcal{K}_M^{++} \hat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n) \to (\varprojlim_{n_2} \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m)) \otimes \mathbb{Q}_p.$$

Cela se ramène à montrer que les applications

$$\varprojlim_{n_2} \phi_0 \colon \mathcal{K}_M^{++} \hat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n) \to (\varprojlim_{n_2} \mathbf{M}_{n_1,n_2}/(\partial_{m,2} - p^m)) \otimes \mathbb{Q}_p$$

et

$$\begin{aligned}\varprojlim_{n_2} \phi_1 \colon (\varprojlim_{n_2} \mathbf{M}_{n_1,n_2}/(\partial_{m,2} - p^m)) \otimes \mathbb{Q}_p \\ \to (\varprojlim_{n_2} \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m)) \otimes \mathbb{Q}_p\end{aligned}$$

sont surjectives. La surjectivité de $\varprojlim_{n_2} \phi_0$ découle de la formule (13) et celle de $\varprojlim_{n_2} \phi_1$ découle du lemme précédent qui dit que, pour tout $n_1 > j+1$, le conoyau de ϕ_1 est de $p^{2m(n_1+1)}$-torsion. □

En composant les applications obtenues dans les paragraphes précédents, on ob-

tient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \hat{\otimes} \mathbf{D}_{1,j-2}(\mathscr{W}_n)) & & \\
\mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}) \hat{\otimes} \mathbf{D}_{1,j-2}(\mathscr{W}_n)) \arrow[u, "(1)"] \arrow[r, "(2)"] \arrow[d, dotted, "\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}"] & \mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \widetilde{\mathbf{D}}) \arrow[d, "(3)"] \\
 & \varprojlim_{n_1} \big((\varprojlim_{n_2} \mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2})) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\big) \arrow[d, "(4)"] \\
\mathcal{K}^{++}_M \hat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n) & \varprojlim_{n_1} \big((\varprojlim_{n_2} (\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m)) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p\big), \arrow[l, "(5)", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

où

• l'application (1), d'inflation, est injective car $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}} = \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty})$ et $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{Mp^\infty}}$ agit trivialement sur $\mathbf{D}_{1,j-2}(\mathscr{W}_n)$;

• (2) est l'isomorphisme induit par "la trace de Tate normalisée" $\mathbf{R}_M$ (cf. proposition 4.3) ;

• (3) est l'application naturelle induite par la projection ;

• (4) est l'isomorphisme de la proposition 4.5 car $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$ est analytique pour tout (n_1, n_2) ;

• (5) est l'inverse de l'isomorphisme dans la proposition 4.11.

On définit l'application $\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}$ en composant les applications (2), (3), (4), (5).

4.3. Application à la famille de systèmes d'Euler de Kato. Dans ce paragraphe, on montrera le théorème 1.4. Soient $M \geq 1$ tel que $v_p(M) \geq v_p(2p)$ et $A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(p)$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, \ldots, M\}$. On note $\psi_{M,A} = 1_{A+M\mathbf{M}_2(\widehat{\mathbb{Z}})}$ la fonction caractéristique de $A + M\mathbf{M}_2(\widehat{\mathbb{Z}})$. C'est une fonction invariante sous l'action de $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}$. Par ailleurs, la distribution $z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu_j)$ appartient à $\mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathfrak{D}_{\mathrm{alg}}(\mathbf{M}_2(\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})^{]p[} \times \mathbb{I}_0(p), \mathbf{D}_{1,j-2}(\mathscr{W}_n)))$. Alors, on a

$$\int \psi_{M,A} z_{\mathbf{Kato},c,d}(\nu) \in \mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathbf{D}_{1,j-2}(\mathscr{W}_n))$$

et on note son image dans $\mathrm{H}^2(\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_M}, \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\mathfrak{K}^+_{Mp^\infty}) \hat{\otimes} \mathbf{D}_{1,j-2}(\mathscr{W}_n))$ par $z_{M,A}$. Pour montrer le théorème (1.4), il suffit de prouver :

Proposition 4.15. *Pour toute paire (M, A) ci-dessus, on a*

$$\begin{aligned}
&\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}(z_{M,A}) \\
&= \frac{M^{-2j}}{(j-1)!} \operatorname{ord}\left(\frac{\alpha}{M}\right)^{j-1} \kappa^{\mathbf{univ}}\left(\frac{M}{\operatorname{ord}(\alpha/M)}\right) F_{c,\alpha/M,\beta/M}(\kappa^{\mathbf{univ}}, j) E^{(j)}_{d,\gamma/M,\delta/M}.
\end{aligned}$$

Pour démontrer ceci, nous aurons besoin d'écrire un 2-cocycle explicite représentant $z_{M,A}$ et le suivre à travers les étapes de la construction de l'application $\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}$.

4.3.1. Construction d'un 2-cocycle. Rappelons que notre famille de systèmes d'Euler de Kato est construite selon le même chemin que celui du système d'Euler de Kato classique. Ceci nous permet d'utiliser la construction d'un 2-cocycle explicite pour le système d'Euler de Kato classique dans [14], qui est reliée à la construction du système d'Euler de Kato. On expose le résultat ci-dessous, et renvoie le lecteur intéressé à §5.2 dans [14] pour les détails de la construction.

Soient Λ_1, Λ_2 deux G-modules à gauche. Si $x_1 \in \Lambda_1, x_2 \in \Lambda_2$ et $\sigma, \tau \in G$, on définit un élément $\{x_1 \otimes x_2\}_{\sigma,\tau} := (x_1 * (\tau\sigma - \sigma) \otimes (x_2 * (\sigma - 1))) \in \Lambda_1 \otimes \Lambda_2$. Un cocycle explicite, qui présente l'image de $z_{M,A}$ dans $\mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \widetilde{\mathfrak{K}}_M^+ \widehat{\otimes} \mathbf{D}_{1,j-2,\mathscr{W}})$, est donné comme suit :

Théorème 4.16. *Si on note*

$$\log^{(\sigma,\tau)}_{\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)} = \left\{ \log\left((c^2 - \langle\langle c \rangle\rangle)\theta(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^{a_0}\tilde{\zeta}_M^{b_0})\right) \otimes \log\left((d^2 - \langle\langle d \rangle\rangle)\theta(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^{c_0}\tilde{\zeta}_M^{d_0})\right)\right\}_{\sigma,\tau},$$

$z_{M,A}$ peut se représenter par le 2-cocycle

$$(\sigma,\tau) \mapsto \lim_{n\to+\infty} p^{-2n} \sum \mathcal{A}_{\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)\nu_j} \log^{(\sigma,\tau)}_{\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)},$$

la somme portant sur l'ensemble

$$U^{(n)} := \left\{(a_0, b_0, c_0, d_0) \in \{1, \dots, Mp^n\}^4 \mid a_0 \equiv \alpha,\ b_0 \equiv \beta,\ c_0 \equiv \gamma, d_0 \equiv \delta \bmod M\right\}.$$

4.3.2. Passage à l'algèbre de Lie. On utilise les techniques différentielles pour calculer l'image du 2-cocycle

$$(\sigma,\tau) \mapsto \lim_{n\to+\infty} p^{-2n} \sum \mathcal{A}_{\nu_j * \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)} \log^{(\sigma,\tau)}_{\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)},$$

obtenu dans le théorème ci-dessus, dans $\mathcal{K}_M^+ \widehat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$ par l'application $\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}$. Plus précisément, cela se fait comme suit :

Recette 4.17. Si $n_1 > j + 1$, on définit une application $\mathrm{res}^{(k)}_{\nu,j} : \widetilde{\mathbf{D}} \to (\mathcal{K}_M^{++} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n))/(q_M)^k$ en composant la projection

$$\widetilde{\mathbf{D}} \to \widetilde{\mathbf{D}}/t^{n_1} \to (\varprojlim_{n_2} \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/(\partial_{m,1}, \partial_{m,2} - p^m)) \otimes \mathbb{Q}_p$$

avec l'inverse de l'isomorphisme dans la proposition 4.11. En prenant la limite projective sur k, on obtient un morphisme $\mathrm{res}_{\nu,j} : \widetilde{\mathbf{D}} \to \mathcal{K}_M^{++} \widehat{\otimes}_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$. Si la classe de cohomologie

$$c = (c^{(n_1,n_2)}) \in \varprojlim_{n_1} (\varprojlim_{n_2} \mathrm{H}^2(P_{\mathfrak{K}_M}, \widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}) \otimes \mathbb{Q}_p)$$

est représenté par une limite de 2-cocycle analytique $(\sigma,\tau) \mapsto c_{\sigma,\tau}^{(n_1,n_2)}$ sur $P_{\mathfrak{K}_M}$ à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}$, alors l'image de c sous l'application (5) est $\mathrm{res}_{\nu,j}(p^{-2m}\delta^{(2)}(c))$, où $\delta^{(2)}$ est l'application définie dans la proposition 4.5.

Comme le 2-cocycle $(\sigma,\tau) \mapsto \lim_{n\to+\infty} p^{-2n} \sum \nu_j *\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right) \log^{(\sigma,\tau)}_{\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)}$ obtenu dans le théorème ci-dessus est la limite de 2-cocycles analytiques à valeurs dans $\widetilde{\mathbf{D}}$, on peut utiliser les techniques différentielles pour calculer son image dans $\mathcal{K}_M^{++} \widehat{\otimes} \mathcal{O}(\mathscr{W}_n)$ par l'application exponentielle duale $\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}$.

Si $f(x_1,x_2)$ est une fonction en deux variables, on note D_1 (resp. D_2) l'opérateur $x_1\frac{d}{dx_1}$ (resp. $x_2\frac{d}{dx_2}$). Si $n \in \mathbb{N}$ et $a,b \in \mathbb{Z}$, on pose $f_{a,b}^{(n)} = f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^b)$. Du développement limité du terme de $(u,v)\, f_{a,b}^{(n)} = f(\tilde{q}^{p^n}, \tilde{q}_M^a \tilde{\zeta}_M^{au+be^v})$ en u et v, on déduit que :

$$\partial_{m,1} f_{a,b}^{(n)} = \frac{ap^m t}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)} \quad \text{et} \quad \partial_{m,2} f_{a,b}^{(n)} = \frac{bp^m t}{M} D_2 f_{a,b}^{(n)}, \tag{14}$$

ce qui joueront un rôle dans les démonstrations du lemme 4.18 et 4.20 ci-dessous.

Lemme 4.18 ([14], lemme 5.15). *On note*

$$\delta^{(2)}_{a_0,b_0,c_0,d_0} = \tilde{\delta}^{(2)}\Big(\Big\{\log\big(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\big) \otimes \log\big(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\big)\Big\}_{\sigma,\tau}\Big).$$

On a

$$\delta^{(2)}_{a_0,b_0,c_0,d_0} = \frac{(a_0d_0 - b_0c_0)t^2}{M^2} \cdot D_2 \log\big(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\big) \cdot D_2 \log\big(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\big).$$

D'après le lemme 4.9, on a les formules suivantes pour $\partial_{m,1}$ et $\partial_{m,2}$ sur $\mathcal{A}_{\nu_j *\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}$:

Lemme 4.19. *On a les formules suivantes :*

$$\begin{aligned} \partial_{m,1}(\mathcal{A}_{\nu_j *\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}) &= p^m \log(1+T)\mathcal{A}_{\nu_j *\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}, \\ \partial_{m,2}(\mathcal{A}_{\nu_j *\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}) &= p^m\big(\tfrac{b}{a}\log(1+T) - j\big)\mathcal{A}_{\nu_j *\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Démonstration. Ce lemme est une traduction du lemme 4.9. On donne seulement le calcul pour $\partial_{m,2}$: on note $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ et on a

$$\begin{aligned}
&\partial_{m,2}(\mathcal{A}_{v_j*\gamma}) + p^m j\,\mathcal{A}_{v_j*\gamma} \\
&\quad = \partial_{m,2}(\kappa^{\mathbf{univ}}(a)\det(\gamma)^{-j}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}}{k}T^k) + p^m j\,\mathcal{A}_{v_j*\gamma} \\
&\quad = p^m\kappa^{\mathbf{univ}}(a)\det(\gamma)^{-j}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\binom{\frac{b}{a}}{k}k(1+T)T^{k-1}\log(1+T)\Big).
\end{aligned}$$

En utilisant la formule $k\binom{\frac{b}{a}}{k} = \frac{b}{a}\binom{\frac{b}{a}-1}{k-1}$, on obtient

$$\partial_{m,2}(\mathcal{A}_{v_j*\gamma}) + p^m j\,\mathcal{A}_{v_j*\gamma} = p^m\frac{b}{a}\log(1+T)\mathcal{A}_{v_j*\gamma}. \qquad \square$$

Lemme 4.20. *Si $s \geq j+1$ et $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ tels que $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{I}_0(p)$, alors, dans*

$$\varprojlim_{n_1}\Big((\varprojlim_{n_2}(\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/(\partial_{m,1},\partial_{m,2}-p^m))\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p\Big),$$

on a

$$\mathcal{A}_{v_j*\gamma}t^s f_{a,b}^{(n)}g_{c,d}^{(n)} = \frac{(ad-bc)t^{s+1}}{aM(j+1-s)}\mathcal{A}_{v_j*\gamma}\cdot f_{a,b}^{(n)}\cdot D_2 g_{c,d}^{(n)}.$$

Démonstration. On en déduit que

$$\begin{aligned}
&(a(p^m-\partial_{m,2})+b\partial_{m,1})(\mathcal{A}_{v_j*\gamma}t^s f_{a,b}^{(n)}g_{c,d}^{(n)}) \\
&\quad = \Big(a(j+1-s)p^m t^s f_{a,b}^{(n)}g_{c,d}^{(n)} - p^m\frac{(ad-bc)t^{s+1}}{M}f_{a,b}^{(n)}D_2 g_{c,d}^{(n)}\Big)\mathcal{A}_{v_j*\gamma},
\end{aligned}$$

est nul dans $\varprojlim_{n_1}\big((\varprojlim_{n_2}(\widetilde{\mathbf{D}}^{+,n_1,n_2}/(\partial_{m,1},\partial_{m,2}-p^m))\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p\big)$, pour $s \geq j+1$. $\square$

Corollaire 4.21. *Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)$, alors on a*

$$\mathrm{res}_{v,j}\big(\mathcal{A}_{v_j*\gamma}\delta^{(2)}_{a_0,b_0,c_0,d_0}\big) = \frac{\kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)}{a_0^{j-1}M^{j+1}(j-1)!}\cdot D_2\log(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0})\cdot D_2^j\log(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}).$$

Démonstration. D'après le lemme 4.18 et le lemme 4.20, on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{v_j*\gamma}\cdot\delta^{(2)}_{a_0,b_0,c_0,d_0} \\
&\quad = \mathcal{A}_{v_{j-2}*\gamma}\frac{(a_0d_0-b_0c_0)^{-1}}{M^2}\cdot D_2\log\big(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\big)\cdot D_2\log\big(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\big) \\
&\quad = M^{-1-j}\frac{(a_0d_0-b_0c_0)^{j-2}t^{j-1}}{a_0^{j-1}(j-1)!}\mathcal{A}_{v_{j-2}*\gamma}\cdot D_2\log\big(r_c\theta^{(n)}_{a_0,b_0}\big)\cdot D_2^j\log\big(r_d\theta^{(n)}_{c_0,d_0}\big).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a $\mathcal{A}_{\nu_{j-2}*\gamma} = (1+T)^{\frac{b_0}{a_0}}(a_0d_0 - b_0c_0)^{2-j}\kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)$. Le corollaire se déduit de la définition de $\mathrm{res}_{\nu,j}$. □

On rappelle le fait que $D_2^r \log\left(r_c\theta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^{(n)}\right) = c^2E_r(x_1,x_2) - c^rE_r(x_1,x_2^c)$, noté par $E_{c,r}(x_1,x_2)$. Si $b \equiv \beta \mod M$ et $d \equiv \delta \mod M$, on a $\zeta_M^b = \zeta_M^\beta$ et $\zeta_M^d = \zeta_M^\delta$. Donc par le corollaire 4.21 et le calcul que nous avons fait, on obtient :

$$\begin{aligned}&\exp^*_{\mathbf{Kato},\nu}(z_{M,A})\\ &\quad= \frac{M^{-1-j}}{(j-1)!}\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ c_0\equiv\gamma[M]\\ 1\le a_0,c_0\le Mp^n}}\kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)a_0^{1-j}E_{c,1}(q^{p^n},q_M^{a_0}\zeta_M^\beta)E_{d,j}(q^{p^n},q_M^{c_0}\zeta_M^\delta).\end{aligned}$$

Enfin, on utilise le lemme suivant pour terminer le calcul :

Lemme 4.22. *Si $1 \le r \in \mathbb{N}$ et $c,d \in \mathbb{Z}_p^*$, on a*

(1)

$$\sum_{\substack{c_0\equiv\gamma[M]\\ 1\le c_0\le Mp^n}} E_j(q^{p^n},q_M^{c_0}\zeta_M^\delta) = E^{(j)}_{\gamma/M,\delta/M}$$

et

$$\sum_{\substack{c_0\equiv\gamma[M]\\ 1\le c_0\le Mp^n}} E_{d,j}(q^{p^n},q_M^{c_0}\zeta_M^\delta) = E^{(j)}_{d,\gamma/M,\delta/M};$$

(2)

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}}\kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)a_0^{1-j}E_{c,1}(q^{p^n},q_M^{a_0}\zeta_M^\beta)\\ &\qquad= M^{1-j}\,\mathrm{ord}\left(\frac{\alpha}{M}\right)^{j-1}\kappa^{\mathbf{univ}}\left(\frac{M}{\mathrm{ord}(\alpha/M)}\right)F_{c,\alpha/M,\beta/M}(\kappa^{\mathbf{univ}},j).\end{aligned}$$

Démonstration. Le (1) est montré dans lemme 5.17 de [14] ; on ne montre que le (2) dans la suite. On remarque que la limite dans (2) est une limite p-adique. La démonstration se divise en deux parties : la première consiste à comparer les séries de Dirichlet formelles associées aux q-développements de ces familles de formes modulaires p-adiques et la deuxième consiste à comparer les termes constants de ces deux familles.

(i) (Comparaison de deux séries de Dirichlet formelles) On se ramène à montrer que la série formelle associée à $\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}}\kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)a_0^{1-j}E_1(q^{p^n},q_M^{a_0}\zeta_M^\beta)$

et celle associée à $M^{1-j}\operatorname{ord}(\frac{\alpha}{M})^{j-1}\kappa^{\mathbf{univ}}(\frac{M}{\operatorname{ord}(\alpha/M)})\widetilde{F}_{\alpha/M,\beta/M}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)$ sont les mêmes.

D'après la proposition 3.7, on a :

$$E_1(q^{p^n}, q_M^{a_0}\zeta_M^{\beta}) = E^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q^{p^n}) = F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q^{p^n}).$$

Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} &\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} \kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)a_0^{1-j}E_1(q^{p^n}, q_M^{a_0}\zeta_M^{\beta})\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} \kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)a_0^{1-j}F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q^{p^n}).\end{aligned}$$

Soit $F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q) = \sum_{m\in\mathbb{Q}^+} b_m q^m$ et soit $\sum_{m\in\mathbb{Q}^+}\frac{b_m}{m^s}$ la série de Dirichlet formelle, à coefficients dans $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$, associée à $F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q)$. On déduit de la proposition 3.7 que

$$\sum_{m\in\mathbb{Q}^+}\frac{b_m}{m^s} = \zeta(a_0/Mp^n,s)\zeta^*(\beta,s) - \zeta(-a_0/Mp^n,s)\zeta^*(-\beta,s).$$

Par conséquent, la série de Dirichlet formelle à coefficients dans $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}$ associée à $F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q^{p^n})$ satisfait :

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Q}^+}\frac{b_m}{(p^n m)^s} &= p^{-ns}\sum_{m\in\mathbb{Q}^+}\frac{b_m}{n^s}\\ &= p^{-ns}(\zeta(a_0/Mp^n,s)\zeta^*(\beta/M,s) - \zeta(-a_0/Mp^n,s)\zeta^*(-\beta/M,s)).\end{aligned} \tag{16}$$

Soit $\sum_{m\in\mathbb{Q}^+} A_{m,n}m^{-s}$ la série de Dirichlet formelle à coefficients dans $\mathbb{Q}^{\mathrm{cycl}}\otimes\mathcal{O}(\mathscr{W})$ associée au q-développement de

$$\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} \kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)a_0^{1-j}F^{(1)}_{a_0/Mp^n,\beta/M}(q^{p^n}).$$

Alors, de la formule (16), on obtient :

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in\mathbb{Q}_+^*}\frac{A_{m,n}}{m^s}\\ &\quad= \sum_{i=0}^{p^n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\kappa^{\mathbf{univ}}(\alpha+iM)(\alpha+iM)^{1-j}}{(kp^n+\frac{a_0}{M})^s}\zeta^*(\beta/M,s)\\ &\qquad+\kappa^{\mathbf{univ}}(-1)(-1)^{2-j}\cdot\frac{\kappa^{\mathbf{univ}}(-\alpha-iM)(-\alpha-iM)^{1-j}}{(kp^n-\frac{\alpha}{M}+(p^n-i))^s}\zeta^*(-\beta/M,s)\Big).\end{aligned} \tag{17}$$

Dans la suite, on donne les calculs pour le terme $\frac{\kappa^{\mathbf{univ}}(\alpha+iM)(\alpha+iM)^{1-j}}{(kp^n+\frac{a_0}{M})^s}\zeta^*(\beta/M,s)$ ci-dessus, et le terme restant se calcule de la même manière :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} \kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)a_0^{1-j}\,p^{-ns}\zeta(a_0/Mp^n,s)\zeta^*(\beta/M,s)\\
&\quad= \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} \kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)a_0^{1-j}\,p^{-ns}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+\frac{a_0}{Mp^n})^s}\zeta^*(\beta/M,s)\\
&\quad= \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)a_0^{1-j}}{(kp^n+\frac{a_0}{M})^s}\zeta^*(\beta/M,s).
\end{aligned}\tag{18}$$

En prenant la limite p-adique de la formule (17) et en utilisant le fait $(p,\alpha)=1$, on a :

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{m\in\mathbb{Q}_+^*}\frac{A_{m,n}}{m^s}\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\Bigg(\sum_{\substack{\frac{\alpha}{M}\le\tilde\alpha<\frac{\alpha}{M}+p^n\\ \tilde\alpha\equiv\frac{\alpha}{M}\mod\mathbb{Z}}}\frac{\kappa^{\mathbf{univ}}(M\tilde\alpha)(M\tilde\alpha)^{1-j}}{\tilde\alpha^s}\zeta^*(\beta/M,s)\\
&\qquad+\kappa^{\mathbf{univ}}(-1)(-1)^{2-j}\cdot\sum_{\substack{-\frac{\alpha}{M}<\tilde\alpha\le-\frac{\alpha}{M}+p^n\\ \tilde\alpha\equiv-\frac{\alpha}{M}\mod\mathbb{Z}}}\frac{\kappa^{\mathbf{univ}}(M\tilde\alpha)(M\tilde\alpha)^{1-j}}{\tilde\alpha^s}\zeta^*(-\beta/M,s)\Bigg).
\end{aligned}$$

C'est la même série de Dirichlet formelle associée au q-développement de

$$M^{1-j}\,\mathrm{ord}\left(\frac{\alpha}{M}\right)^{j-1}\kappa^{\mathbf{univ}}\left(\frac{M}{\mathrm{ord}(\alpha/M)}\right)\widetilde{F}_{\alpha/M,\beta/M}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)$$

(cf. la formule (6) pour le q-développement de $\widetilde{F}_{\alpha/M,\beta/M}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)$).

(ii) (Comparaison de termes constants) On rappelle que la mesure μ_c sur $\mathbb{Z}_p$ dont sa transformée d'Amice est $\frac{c^2}{T}-\frac{c}{(1+T)^{c^{-1}}-1}$, satisfait les relations :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_p}(x_{\alpha/M})^k\mu_c &= -\mathrm{ord}(\alpha/M)^k\left(c^2\zeta\left(\frac{\alpha}{M},-k\right)-c^{1-k}\zeta\left(\frac{\langle\langle c\rangle\rangle\alpha}{M},-k\right)\right);\\
\int_{p^n\mathbb{Z}_p}(x_{\alpha/M})^k\mu_c &= -\mathrm{ord}(\alpha/M)^k\left(c^2\zeta\left(\frac{\alpha}{p^nM},-k\right)-c^{1-k}\zeta\left(\frac{\langle\langle c\rangle\rangle\alpha}{p^nM},-k\right)\right).
\end{aligned}\tag{19}$$

On constate que le terme constant de la série à gauche de la relation voulue est la somme de Riemann

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\substack{a_0\equiv\alpha[M]\\ 1\le a_0\le Mp^n}} \kappa^{\mathbf{univ}}(a_0)a_0^{1-j}\Big(c^2\zeta\Big(\frac{a_0}{p^nM},0\Big)-c\zeta\Big(\frac{\langle\langle c\rangle\rangle a_0}{p^nM},0\Big)\Big),$$

et donc il se traduit en l'intégration p-adique

$$M^{1-j}\operatorname{ord}\Big(\frac{\alpha}{M}\Big)^{j-2}\kappa^{\mathbf{univ}}\Big(\frac{M}{\operatorname{ord}(\alpha/M)}\Big)\int_{\mathbb{Z}_p}\kappa^{\mathbf{univ}}(x_{\alpha/M})(x_{\alpha/M})^{2-j}\mu_c.$$

On en déduit que le terme constant de la série à gauche de la relation voulue est

$$M^{1-j}\operatorname{ord}\Big(\frac{\alpha}{M}\Big)^{j-2}\kappa^{\mathbf{univ}}\Big(\frac{M}{\operatorname{ord}(\alpha/M)}\Big)\omega(0_{\alpha/M})^{2-j}\zeta_{p,c}(\kappa^{\mathbf{univ}},\alpha/M).$$

Ceci permet de conclure. □

En appliquant ceci à $\exp^*_{\mathbf{Kato},v}(z_{M,A})$, on obtient

$$\exp^*_{\mathbf{Kato},v}(z_{M,A}) = \frac{1}{(j-1)!}M^{-2j}\operatorname{ord}\Big(\frac{\alpha}{M}\Big)^{j-1}$$
$$\kappa^{\mathbf{univ}}\Big(\frac{M}{\operatorname{ord}(\alpha/M)}\Big)F_{c,\alpha/M,\beta/M}(\kappa^{\mathbf{univ}},j)E^{(j)}_{d,\gamma/M,\delta/M}.$$

Ceci termine la démontration du théorème 1.4.

Références

[1] F. Andreatta et A. Iovita, Comparison isomorphisms for formal schemes. *J. Inst. Math. Jussieu* **12** (2013), no. 1, 77–151. Zbl 1281.14013 MR 3001736

[2] J. Bellaïche, Critical p-adic L-functions. *Invent. Math.* **189** (2012), no. 1, 1–60. Zbl 06065252 MR 2929082

[3] G. Chenevier, Une correspondance de Jacquet–Langlands p-adique. *Duke Math. J.* **126** (2005), no. 1, 161–194. Zbl 1070.11016 MR 2111512

[4] P. Colmez, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique. *Astérisque* **294** (2004), 251–319. Zbl 1094.11025 MR 2111647

[5] P. Colmez, Fonctions d'une variable p-adique. *Astérisque* **330** (2010), 13–59. Zbl 1223.11144 MR 2642404

[6] A. J. de Jong, Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **82** (1995), 5-96. Zbl 0864.14009 MR 1383213

[7] D. Delbourgo, *Elliptic curves and big Galois representations*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 356, Cambridge University Press, Cambridge 2008. Zbl 1188.11028 MR 2444858

[8] G. Faltings, Almost étale extensions. *Astérisque* **279** (2002), 185–270. Zbl 1027.14011 MR 1922831

[9] T. Fukaya, Coleman power series for K_2 and p-adic zeta functions of modular forms. *Doc. Math.* (2003), Extra Vol., 387–442. Zbl 1142.11338 MR 2046604

[10] K. Kato, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Astérisque* **295** (2004). Zbl 1142.11336 MR 2104361

[11] S. Sen, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge–Tate modules. *Ann. of Math.* **97** (1973), 160–170. Zbl 0258.12009 MR 0314853

[12] J. Tate, p-divisible groups. In 1967 *Proc. Conf. Local Fields* (Driebergen, 1966), Springer-Verlag, Berlin 158–183. Zbl 0157.27601 MR 0231827

[13] A. Panchishkin, A new method of constructing p-adic L-functions associated with modular forms. *Mosc. Math. J.* **2** (2002), no. 2, 313–328. Zbl 1011.11026 MR 1944509

[14] S. Wang, Le système d'Euler de Kato. *J. Théor. Nombres Bordeaux* **25** (2013), no. 3, 677–758. Zbl 06291372 MR 3179681

[15] S. Wang, Le système d'Euler de Kato en famille (II). Prépublication.

[16] A. Weil, *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*. Ergeb. Math. Grenzgeb. 88, Springer-Verlag, Berlin 1976. Zbl 0318.33004 MR 0562289

Received November 15, 2012

Shanwen Wang, Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Via Trieste 63,
35121 Padova, Italy
E-mail: wetiron1984@gmail.com