

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	88 (2013)
<b>Artikel:</b>	Un critère d'indépendance pour une famille de représentations l-adiques
<b>Autor:</b>	Serre, Jean-Pierre
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-515648">https://doi.org/10.5169/seals-515648</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Un critère d’indépendance pour une famille de représentations $\ell$ -adiques

Jean-Pierre Serre

**Résumé.** We give a criterion for the independence of a family of  $\ell$ -adic Galois representations of a number field.

**Classification mathématique par sujets (2010).** 14 F.

**Mots-clefs.** Galois representations, cohomology, independence.

## Introduction

Soit  $k$  un corps de nombres, de clôture algébrique  $\bar{k}$ , et soit  $A$  une variété abélienne sur  $k$ , de dimension  $d$ . Comme on sait, de telles données définissent, pour tout nombre premier  $\ell$ , une représentation  $\ell$ -adique

$$\rho_\ell: \Gamma_k \rightarrow \text{Aut}(T_\ell(A)) \cong \mathbf{GL}_{2d}(\mathbf{Z}_\ell),$$

où  $\Gamma_k = \text{Gal}(\bar{k}/k)$ , et  $T_\ell(A)$  est le  $\ell$ -ième module de Tate de  $A$  sur  $\bar{k}$ . La famille des  $\rho_\ell$  s’identifie à un homomorphisme continu

$$\rho: \Gamma_k \rightarrow \prod_\ell \text{Aut}(T_\ell(A)) \cong \prod_\ell \mathbf{GL}_{2d}(\mathbf{Z}_\ell).$$

Lorsqu’on s’intéresse au sous-groupe  $\rho(\Gamma_k)$  de  $\prod_\ell \mathbf{GL}_{2d}(\mathbf{Z}_\ell)$ , il est commode de savoir que  $\rho(\Gamma_k)$  est le produit direct des  $\rho_\ell(\Gamma_k)$ , autrement dit, que les  $\rho_\ell$  sont “indépendants”. Bien entendu ce n’est pas toujours vrai, mais on peut démontrer (cf. [Se 86]) que cela le devient après une extension finie convenable de  $k$  ; autrement dit, les  $\rho_\ell$  sont “presque indépendants”.

Je me propose de reprendre cette question en mettant en évidence les propriétés des  $\rho_\ell$  qui entraînent la presque indépendance. Comme on le verra au §2, ce sont des propriétés de ramification, analogues à ce que l’on appelle la “semi-stabilité” ; curieusement, les éléments de Frobenius, si utiles en d’autres circonstances, ne jouent ici aucun rôle.

L’intérêt de cette axiomatisation est qu’on peut l’appliquer à des situations plus générales que celle des variétés abéliennes, par exemple à la cohomologie  $\ell$ -adique des variétés algébriques sur un corps de nombres, cf. §3.2. Un résultat très voisin

avait d'ailleurs été obtenu il y a une quinzaine d'années par M. J. Larsen et R. Pink dans des lettres (datées du 23/5/95 et 26/5/95) dont le contenu n'a malheureusement pas été publié jusqu'à présent.

La démonstration du théorème principal (théorème 1 du §2) est donnée au §8. Elle repose sur diverses propriétés des corps de nombres et des groupes linéaires (corps de classes, théorème de Hermite–Minkowski, théorèmes de Jordan et de Nori) ; ces propriétés font l'objet des §§4–7.

*Remerciement.* Cet article doit beaucoup à L. Illusie : il m'a encouragé à l'écrire, il m'a fourni de nombreuses références et il m'a communiqué ([II 10]) une démonstration d'un résultat auxiliaire essentiel, qui avait été démontré auparavant, sous une forme un peu différente, par N. Katz et G. Laumon. Je lui en suis très reconnaissant.

## §1. La notion d'indépendance

Soit  $\Gamma$  un groupe, et soit  $\rho_i : \Gamma \rightarrow G_i$  une famille d'homomorphismes de  $\Gamma$  dans des groupes  $G_i$  indexés par un ensemble  $I$ . Cela revient à se donner un homomorphisme

$$\rho = (\rho_i) : \Gamma \rightarrow \prod_{i \in I} G_i.$$

On dit que les  $\rho_i$  sont *indépendants* si la propriété suivante est satisfaite :

$$(R) \quad \rho(\Gamma) = \prod \rho_i(\Gamma).$$

Autrement dit, si  $\gamma_i$  est une famille quelconque d'éléments de  $\Gamma$ , il existe  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\rho_i(\gamma) = \rho_i(\gamma_i)$  pour tout  $i$ .

Il y a une propriété plus faible que l'on peut considérer :

$$(RO) \quad \rho(\Gamma) \text{ est un sous-groupe d'indice fini de } \prod \rho_i(\Gamma).$$

A partir de maintenant, on suppose que  $\Gamma$  est un groupe profini, que les  $G_i$  sont localement compacts, et que les  $\rho_i$  sont continus (de sorte que les  $\rho_i(\Gamma)$  sont des groupes profinis). On s'intéresse à la propriété :

(PR) Il existe un sous-groupe ouvert  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  tel que les restrictions des  $\rho_i$  à  $\Gamma'$  vérifient (R). [Noter que  $\Gamma'$  est d'indice fini dans  $\Gamma$ , puisque  $\Gamma$  est compact.]

On dit alors que les  $\rho_i$  sont *presque indépendants*.

On a (R)  $\Rightarrow$  (RO)  $\Rightarrow$  (PR) : c'est clair pour (R)  $\Rightarrow$  (RO), et ce n'est pas difficile pour (RO)  $\Rightarrow$  (PR).

*Remarque.* On peut aussi exprimer (R) comme une propriété des noyaux  $N_i$  des  $\rho_i$ . Si l'on pose  $N'_i = \bigcap_{j \neq i} N_j$ , la condition (R) est équivalente à chacune des deux conditions suivantes :

$$(R1) \quad \Gamma = N_i \cdot N'_i \text{ pour tout } i.$$

$$(R2) \quad \Gamma \text{ est engendré (topologiquement) par les } N'_i.$$

[Lorsque  $I$  est fini, cela se démontre par récurrence sur le nombre d'éléments de  $I$  ; le cas général s'en déduit par passage à la limite, en utilisant la compacité de  $\Gamma$ .]

On peut préciser (R2) : si l'on note  $\Gamma'$  le plus petit sous-groupe fermé de  $\Gamma$  contenant les  $N'_i$ , alors  $\Gamma'$  est le plus grand sous-groupe fermé de  $\Gamma$  sur lequel les  $\rho_i$  sont indépendants.

## §2. Enoncé du théorème

Il y a trois données :

- a)  $k$  est un corps de nombres de clôture algébrique  $\bar{k}$  ; on note  $\Gamma_k$  le groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ .
- b)  $L$  est un ensemble de nombres premiers.
- c) Pour tout  $\ell \in L$ ,  $G_\ell$  est un groupe de Lie  $\ell$ -adique localement compact<sup>1</sup>, et  $\rho_\ell: \Gamma_k \rightarrow G_\ell$  est un homomorphisme continu.

On fait deux sortes d'hypothèses :

**2.1.** On suppose que la famille des  $\rho_\ell(\Gamma_k)$  est *bornée*, i.e. qu'elle satisfait à la condition suivante :

(B) *Il existe un entier  $n \geq 0$  tel que, pour tout  $\ell \in L$ ,  $\rho_\ell(\Gamma_k)$  soit isomorphe à un sous-quotient de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ .*

[Rappelons qu'un “sous-quotient” d'un groupe  $A$  est un quotient d'un sous-groupe de  $A$ . Bien sûr, il s'agit ici de sous-groupes fermés.]

Les cas particuliers les plus intéressants sont ceux où l'on a  $G_\ell = \mathbf{GL}_{n_\ell}(\mathbf{Z}_\ell)$ , ou  $G_\ell = \mathbf{GL}_{n_\ell}(\mathbf{F}_\ell)$ , avec des  $n_\ell$  bornés (par exemple constants).

**2.2.** On fait une hypothèse du genre “semi-stabilité” sur la famille des  $\rho_\ell$ . Pour l'énoncer, notons  $V_k$  l'ensemble des places non archimédiennes de  $k$ . Si  $v \in V_k$ , notons  $k_v$  le complété de  $k$  en  $v$ , notons  $p_v$  la caractéristique résiduelle de  $v$  et choisissons un prolongement  $\bar{v}$  de  $v$  à  $\bar{k}$ . Notons  $I_{\bar{v}}$  le groupe d'inertie correspondant à  $\bar{v}$  ; c'est un sous-groupe fermé de  $\Gamma_k$  ; à conjugaison près, il ne dépend que de  $v$ .

Avec ces notations, l'hypothèse dont on a besoin s'énonce de la manière suivante :

(ST) *Il existe un sous-ensemble fini  $S$  de  $V_k$  tel que :*

(ST1) *Si  $v \notin S$  et  $\ell \neq p_v$ , alors  $\rho_\ell(I_{\bar{v}}) = 1$ , i.e.  $\rho_\ell$  est non ramifié en  $v$ .*

(ST2) *Si  $v \in S$  et  $\ell \neq p_v$ , alors  $\rho_\ell(I_{\bar{v}})$  est un pro- $\ell$ -groupe.*

[Noter que l'on ne fait aucune hypothèse sur les  $\rho_\ell(I_{\bar{v}})$  lorsque  $\ell = p_v$ .]

Lorsque  $G_\ell = \mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ , la condition (ST2) est moins restrictive que la condition habituelle de semi-stabilité, où l'on exige que  $\rho_\ell(I_{\bar{v}})$  soit formé d'éléments unipotents.

Il est commode d'introduire une notion analogue à la *potentielle semi-stabilité* :

---

<sup>1</sup>On ne perdrait rien si l'on supposait que les  $G_\ell$  sont compacts, vu que l'on peut supposer que les  $\rho_\ell$  sont surjectifs.

(PST) *Il existe une extension finie de  $k$  pour laquelle (ST) est satisfaite.* [Plus explicitement : il existe une sous-extension finie  $k_1$  de  $\bar{k}$  telle que la famille des  $\rho_\ell|\Gamma_{k_1}$  satisfasse à (ST).]

Noter que, dès que (ST) est satisfaite pour une extension  $k_1$  de  $k$ , elle l'est aussi pour toute extension finie de  $k$  contenant  $k_1$ .

**2.3.** Le théorème que nous avons en vue dit que les propriétés (B) et (PST) entraînent la propriété (PR) du §1. Autrement dit :

**Théorème 1.** *Si la famille des  $\rho_\ell(\Gamma_k)$  est bornée au sens de (B), et si la condition (PST) est satisfaite, il existe une extension finie de  $k$  sur laquelle les  $\rho_\ell$  sont indépendants.*

On peut reformuler cet énoncé en termes d'extensions de  $k$  : notons  $N_\ell$  le noyau de  $\rho_\ell$  et  $k_\ell$  le sous-corps de  $\bar{k}$  fixé par  $N_\ell$  ; posons  $N'_\ell = \bigcap_{\ell' \neq \ell} N_{\ell'}$  et notons  $k'_\ell$  le corps fixé par  $N'_\ell$ , autrement dit le corps engendré par les  $k_{\ell'}$  avec  $\ell' \neq \ell$ . Le corps  $k^{\text{ind}} = \bigcap k'_\ell$  correspond, par la théorie de Galois, au plus petit sous-groupe fermé de  $\Gamma_k$  contenant les  $N'_\ell$ . Avec ces notations, le théorème 1 est équivalent à :

**Théorème 1'.** *Si les conditions (B) et (PST) sont satisfaites, le corps  $k^{\text{ind}} = \bigcap_\ell k'_\ell$  défini ci-dessus est une extension finie de  $k$ .*

De plus,  $k^{\text{ind}}$  est la plus petite extension de  $k$  sur laquelle les  $\rho_\ell$  sont indépendants ; on peut l'appeler le “corps d’indépendance” des  $\rho_\ell$ .

La démonstration des théorèmes 1 et 1' sera donnée au §8.

### §3. Exemples et contre-exemples

Dans chacun des exemples ci-dessous, l’ensemble  $L$  est l’ensemble de tous les nombres premiers, et  $G_\ell$  est isomorphe à  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Q}_\ell)$ , avec  $n$  fixe. Cette dernière hypothèse entraîne que le groupe  $\rho_\ell(\Gamma_k)$  est isomorphe à un sous-groupe fermé de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ , de sorte que la condition (B) est satisfaite.

**3.1. Variétés abéliennes et quasi-abéliennes.** Si  $A$  est une variété abélienne de dimension  $d$  sur  $k$ , les modules de Tate  $T_\ell(A)$  fournissent des représentations  $\ell$ -adiques de dimension  $2d$  de  $\Gamma_k$  qui satisfont à (PST) en vertu du théorème de Grothendieck et Mumford sur la semi-stabilité des modèles de Néron ([SGA 7 I], exposé IX, voir aussi [BLR 90], §7.4).

D’après le théorème 1, ces représentations sont presque indépendantes : on retrouve ainsi un résultat démontré un peu différemment dans [Se 86]. Noter qu’ici les corps  $k_\ell$  ont une interprétation simple :  $k_\ell$  est le corps de rationalité des points de  $A(\bar{k})$  d’ordre une puissance de  $\ell$ , et  $k'_\ell$  est le corps de rationalité des points de  $A(\bar{k})$  d’ordre fini premier à  $\ell$ .

Ces résultats s’appliquent aussi au cas des schémas en groupes quasi-abéliens ; ce cas a été utilisé par Hrushovski, cf. [Bo 00].

**3.2. Cohomologie  $\ell$ -adique.** Plus généralement, si  $X$  est un schéma séparé de type fini sur  $k$ , la condition (PST) est satisfaite par les représentations  $\ell$ -adiques associées aux *groupes de cohomologie* à support propre  $H_c^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ , ainsi que par les groupes de cohomologie  $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$  à support quelconque. En effet :

a) La condition (ST1) est satisfaite d’après les théorèmes d’existence de “stratifications” dus à N. Katz et G. Laumon [KL 86], th. 3.1.2 et th. 3.3.2.

b) Si  $S$  est choisi comme dans (ST1), il résulte d’un théorème de Berthelot [Be 96], prop. 6.3.2, que, pour tout  $v \in S$ , il existe un sous-groupe ouvert normal  $U_{\bar{v}}$  de  $I_{\bar{v}}$  qui opère de façon unipotente sur les  $H_c^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$  et les  $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$ , pourvu que  $\ell \neq p_v$ . [La démonstration de Berthelot est basée sur la théorie des altérations de de Jong, cf. [Jo 96].] Choisissons une extension galoisienne  $k'_v$  du corps local  $k_v$ , telle que  $\Gamma_{k'_v} \cap I_{\bar{v}} \subset U_{\bar{v}}$ . Un argument d’approximation bien connu montre qu’il existe une extension galoisienne finie  $k_1$  de  $k$  dont les complétés locaux aux places au-dessus de  $S$  contiennent les  $k'_v$ . On a alors  $\Gamma_{k_1} \cap I_{\bar{v}} \subset U_{\bar{v}}$  pour tout  $v \in S$ , ce qui montre que la condition (ST2) est satisfaite sur  $k_1$ .

*Problème* (cf. [Se 91], 10.1 ?). Au lieu de supposer, comme nous venons de le faire, que  $k$  est un corps de nombres, supposons seulement que  $k$  est une extension de type fini de  $\mathbf{Q}$ . Comme ci-dessus, soit  $X$  un schéma séparé de type fini sur  $k$ . Est-il encore vrai que les représentations  $\ell$ -adiques de  $\Gamma_k$  fournies par les  $H_c^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$  et les  $H^i(\bar{X}, \mathbf{Q}_\ell)$  sont presque indépendantes ?<sup>2</sup>

**3.3. Mariage “carpe-lapin”.** On peut partir de deux familles de  $\rho_\ell$  satisfaisant aux hypothèses (B) et (PST), et pour chaque  $\ell$  choisir au hasard l’un des deux  $\rho_\ell$  ; on obtient encore une famille presque indépendante. Exemple : pour  $\ell \equiv 1 \pmod{4}$  prendre la représentation  $\ell$ -adique associée à la fonction de Ramanujan, et pour les autres  $\ell$  la représentation  $\ell$ -adique associée à la courbe elliptique d’équation  $y^2 - y = x^3 - x^2$ .

**3.4. Exemple montrant que la condition (PST) ne peut pas être entièrement supprimée.** Soit  $k = \mathbf{Q}$ . Choisissons un nombre premier  $p > 2$ , ainsi qu’une suite infinie  $\ell_1 < \ell_2 < \dots$  de nombres premiers tels que  $\ell_i \equiv 1 \pmod{p^i}$ . Soit  $L = \{\ell_1, \ell_2, \dots\}$ . Soit  $\rho_{\ell_i} : \Gamma_k \rightarrow \mathbf{Z}_{\ell_i}^\times$  un homomorphisme non ramifié en dehors de  $p$  dont l’image est cyclique d’ordre  $p^i$ . La famille des  $\rho_{\ell_i}$  satisfait à la condition (B) avec  $n = 1$  et à la condition (ST1) avec  $S = \{p\}$  ; elle ne possède cependant pas la propriété (PR) car son corps d’indépendance est l’unique  $\mathbf{Z}_p$ -extension de  $\mathbf{Q}$ , qui est de degré infini sur  $\mathbf{Q}$ .

<sup>2</sup>Note ajoutée sur épreuves. Ce problème vient d’être résolu par W. Gadjza et S. Petersen : Independence of  $\ell$ -adic representations over function fields, *Compositio Mathematica*, à paraître.

#### §4. Un théorème de finitude sur les corps de nombres

Soit  $d$  un entier  $> 0$ , et soit  $G$  un groupe fini. Considérons la condition :

(Jor $_d$ ) *Il existe un sous-groupe abélien normal  $A$  de  $G$  tel que  $(G : A) \leq d$ .*

**Théorème 2.** *Pour tout  $d > 0$  il n'existe qu'un nombre fini de sous-extensions galoisiennes  $K/k$  de  $\bar{k}/k$  qui sont partout non ramifiées et dont le groupe de Galois a la propriété (Jor $_d$ ) ci-dessus.*

*Démonstration.* On sait (Hermite–Minkowski) qu'il n'existe qu'un nombre fini de sous-extensions de  $\bar{k}$  de degré  $\leq d$  qui soient partout non ramifiées (cela provient de ce que leurs discriminants sont bornés en valeur absolue, cf. par exemple [Se 81], §1.4). On peut donc trouver une sous-extension finie  $k_1$  de  $\bar{k}$  contenant toutes ces extensions. Soit  $k_2$  la plus grande extension abélienne non ramifiée de  $k_1$  contenue dans  $\bar{k}$ ; d'après la théorie du corps de classes,  $k_2$  est une extension finie de  $k_1$ , donc aussi de  $k$ . Soit maintenant  $K/k$  une extension galoisienne dont le groupe de Galois  $G$  a la propriété de l'énoncé, et soit  $K'$  le sous-corps de  $K$  fixé par un sous-groupe abélien normal  $A$  d'indice  $\leq d$ . On a  $[K' : k] \leq (G : A) \leq d$  et  $K'$  est non ramifiée sur  $k$ . Cela montre que  $K'$  est contenu dans  $k_1$ . Comme  $K/K'$  est abélienne et non ramifiée, il en est de même de  $K \cdot k_1/k_1$  et cela entraîne que  $K \cdot k_1$  est contenu dans  $k_2$ , d'où  $K \subset k_2$ , ce qui prouve la finitude cherchée.

[Ce théorème utilise deux des propriétés les plus importantes des corps de nombres :

- a) finitude des extensions de  $\mathbf{Q}$  de degré et discriminant bornés<sup>3</sup>;
- b) finitude des extensions abéliennes non ramifiées (corps de classes).]

#### §5. Groupes linéaires d'ordre premier à la caractéristique

**5.1. Le théorème de Jordan classique.** Sous sa forme originelle ([Jo 78]), ce théorème s'énonce comme suit :

**Théorème 3.** *Pour tout entier  $n \geq 0$  il existe un entier  $d = d(n)$  tel que tout sous-groupe fini de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$  ait la propriété (Jor $_d$ ) du §4.*

[Autrement dit, un sous-groupe fini de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{C})$  ne peut être “gros” que s'il contient un gros sous-groupe abélien.]

On trouvera dans [Fr 11] une démonstration simple de ce résultat. Cette démonstration donne une valeur de  $d(n)$  telle que

$$d(n) \leq (\sqrt{8n} + 1)^{2n^2}.$$

On connaît maintenant la valeur optimale de  $d(n)$ , qui est bien inférieure à celle-là ; ainsi, pour  $n \geq 71$ , on a  $d(n) = (n + 1)!$ , d'après M. J. Collins [Co 07], améliorant

<sup>3</sup>En fait discriminant borné entraîne degré borné, mais cela ne joue aucun rôle ici.

des résultats de B. Weisfeiler et de W. Feit<sup>4</sup>. Nous n’en aurons pas besoin. Dans ce qui suit, nous noterons  $d(n)$  n’importe quel entier  $d$  pour lequel le théorème 3 est valable.

## 5.2. Le théorème de Jordan sur un corps quelconque

**Théorème 3'.** *Soient  $n$  un entier  $\geq 0$ ,  $F$  un corps,  $H$  un sous-groupe fini de  $\mathbf{GL}_n(F)$  et  $G$  un quotient de  $H$ . On suppose que  $|G|$  est premier à la caractéristique de  $F$  si celle-ci est  $\neq 0$ . Alors  $G$  a la propriété  $(\text{Jor}_{d(n)})$  du §4.*

*Démonstration.* Elle se fait en trois étapes :

5.2.1. *Le cas où  $\text{car}(F) = 0$ .* On peut supposer  $F$  de type fini sur  $\mathbf{Q}$ , donc plongeable dans  $\mathbf{C}$ . Le théorème 3 montre alors que  $H$  a la propriété  $(\text{Jor}_{d(n)})$  et il en est donc de même de  $G$ .

5.2.2. *Le cas où  $\text{car}(F) = p > 0$ , avec  $|H|$  premier à  $p$ .* On peut supposer que  $F$  est parfait. Soit  $W$  l’anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $F$ . On a un homomorphisme surjectif  $\mathbf{GL}_n(W) \rightarrow \mathbf{GL}_n(F)$ . Comme  $|H|$  est premier à  $p$ ,  $H$  se relève en un sous-groupe de  $\mathbf{GL}_n(W)$ , et l’on applique 5.2.1 au corps des fractions de  $W$ .

5.2.3. *Le cas où  $\text{car}(F) = p > 0$ .* Soit  $I$  le noyau de  $H \rightarrow G$ , et soit  $P$  un  $p$ -Sylow de  $I$  ; c’est aussi un  $p$ -Sylow de  $H$ , puisque  $(H : I)$  est premier à  $p$ . Soit  $N_H(P)$  le normalisateur de  $I$  dans  $H$ . On sait (Frattini) que  $N_H(P) \rightarrow G$  est surjectif<sup>5</sup>. D’autre part, la suite exacte

$$1 \rightarrow P \rightarrow N_H(P) \rightarrow N_H(P)/P \rightarrow 1$$

est scindée car les ordres de  $P$  et de  $N_H(P)/P$  sont premiers entre eux. Il existe donc un sous-groupe  $H'$  de  $N_H(P)$ , d’ordre premier à  $p$ , tel que  $N_H(P) = P.H'$ . Or l’image de  $P$  dans  $G$  est triviale, puisque  $P$  est contenu dans  $I$ . On en déduit que  $G$  est un quotient de  $H'$ , et l’on conclut en appliquant 5.2.2 à  $H'$ .

## §6. Groupes linéaires engendrés par des éléments d’ordre égal à la caractéristique

Dans ce qui suit,  $\ell$  désigne un nombre premier  $\geq 5$ .

**6.1. Les groupes simples finis de caractéristique  $\ell$  : la famille  $\Sigma_\ell$ .** Rappelons comment on définit les groupes simples “du type de Lie” en caractéristique  $\ell \geq 5$  (pour les propriétés utilisées ici, voir par exemple [GLS 98], §2.2, – noter que l’hypothèse

<sup>4</sup>Les démonstrations de Weisfeiler, Feit et Collins dépendent de la classification des groupes finis simples.

<sup>5</sup>L’argument dit “de Frattini” est le suivant : si  $h \in H$ ,  $hPh^{-1}$  est un  $p$ -Sylow de  $I$ , donc s’écrit  $xPx^{-1}$  avec  $x \in I$ , d’où  $x^{-1}h \in N_H(P)$ , ce qui montre que  $h$  appartient à  $I.N_H(P)$ . On a donc bien  $H = I.N_H(P)$ .

$\ell \geq 5$  élimine les cas particuliers exceptionnels que l'on rencontre en caractéristique 2 et 3, ainsi que les formes tordues à la Suzuki–Ree).

On se donne un groupe algébrique lisse connexe  $\underline{H}$  sur un corps fini  $F$  dont l'ordre est une puissance de  $\ell$ . On suppose que  $\underline{H}$  est géométriquement simple et simplement connexe, et l'on désigne par  $\underline{H}^{\text{adj}}$  le quotient de  $\underline{H}$  par son centre. L'image  $H_F$  de l'homomorphisme  $\underline{H}(F) \rightarrow \underline{H}^{\text{adj}}(F)$  est alors un groupe fini simple non abélien.

*Remarque.* On aurait aussi pu définir  $H_F$  comme le quotient de  $\underline{H}(F)$  par son centre, ou bien comme le sous-groupe de  $\underline{H}^{\text{adj}}(F)$  engendré par les  $\ell$ -Sylow de  $\underline{H}^{\text{adj}}(F)$ . L'équivalence de ces diverses définitions provient de ce que  $\underline{H}(F)$  est engendré par ses éléments unipotents d'après un théorème de Steinberg [St 68], th. 12.4.

Nous noterons  $\Sigma_\ell$  l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes finis simples qui sont, soit du type  $H_F$  ci-dessus (pour un  $\underline{H}$  et un  $F$  convenables<sup>6</sup>), soit isomorphe au groupe cyclique  $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ .

## 6.2. Un lemme

**Lemme 1.** *Soit  $\underline{G}$  un groupe algébrique linéaire connexe sur  $\mathbf{F}_\ell$  et soit  $G = \underline{G}(\mathbf{F}_\ell)$  le groupe de ses points rationnels. Tout quotient simple d'une suite de Jordan–Hölder de  $G$  appartient<sup>7</sup> à  $\Sigma_\ell$  ou est cyclique d'ordre  $\neq \ell$ .*

*Démonstration.* Un argument de dévissage permet de supposer que  $\underline{G}$  est, soit un groupe unipotent, soit un tore, soit un groupe semi-simple. Les deux premiers cas sont immédiats. On peut donc supposer que  $\underline{G}$  est semi-simple. Soit  $\tilde{G}$  le revêtement universel de  $\underline{G}$  et soit  $\underline{G}^{\text{adj}}$  son groupe adjoint. Soient  $\tilde{G}$  et  $G^{\text{adj}}$  les groupes de points  $\mathbf{F}_\ell$ -rationnels de ces groupes algébriques. On a des homomorphismes naturels

$$\tilde{G} \rightarrow G \rightarrow G^{\text{adj}}.$$

Comme  $\tilde{G}$  est simplement connexe, c'est un produit de groupes du type  $R_{F/\mathbf{F}_\ell}\underline{H}$ , où  $\underline{H}$  et  $F$  sont comme dans 6.1 ci-dessus, et le symbole  $R_{F/\mathbf{F}_\ell}$  désigne le foncteur “restriction des scalaires” à la Weil (celui que Grothendieck note  $\prod_{F/\mathbf{F}_\ell}$ ), cf. par exemple [KMRT 98], th. 26.8. On a donc  $\tilde{G} = \prod \underline{H}(F)$ . Les homomorphismes

$$\tilde{G} \rightarrow G \rightarrow G^{\text{adj}}$$

ont des noyaux et conoyaux qui sont commutatifs d'ordre premier à  $\ell$ . De plus, l'image de  $\tilde{G}$  dans  $G^{\text{adj}}$  est un produit de groupes simples appartenant à  $\Sigma_\ell$ . Le lemme en résulte.

<sup>6</sup>Il y a unicité : un groupe simple n'est isomorphe à  $H_F$  que pour au plus un couple  $(\underline{H}, F)$ , à isomorphisme près.

<sup>7</sup>Dans ce qui suit, on dit qu'un groupe simple “appartient” à  $\Sigma_\ell$  lorsqu'il est isomorphe à un élément de  $\Sigma_\ell$ .

### 6.3. Un théorème de Nori

**Théorème 4.** *Pour tout  $n \geq 0$ , il existe un entier  $c(n)$  tel que, si  $\ell > c(n)$ , tout sous-quotient fini simple de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$  d'ordre divisible par  $\ell$  appartient à  $\Sigma_\ell$ .*

*Démonstration.* Prenons  $c(n) = \sup(3, c_2(n))$ , où  $c_2(n)$  a les propriétés énoncées dans [No 87], Theorem B. Nous allons voir que cet entier convient.

Supposons que  $\ell > c(n)$  et soit  $H$  un sous-quotient fini simple de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$  d'ordre divisible par  $\ell$ . Comme  $H$  est simple, cette dernière propriété entraîne que  $H$  est engendré par ses  $\ell$ -Sylow.

L'homomorphisme naturel  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell) \rightarrow \mathbf{GL}_n(\mathbf{F}_\ell)$  est surjectif, et son noyau est un pro- $\ell$ -groupe. Il en résulte que  $H$  est, soit cyclique d'ordre  $\ell$ , soit isomorphe à un sous-quotient de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{F}_\ell)$ . Dans le premier cas,  $H$  appartient à  $\Sigma_\ell$ . Dans le second cas, on a  $H = G/I$ , avec  $G \subset \mathbf{GL}_n(\mathbf{F}_\ell)$  et  $I$  normal dans  $G$  ; on peut évidemment supposer que  $G$  est engendré par ses  $\ell$ -Sylow. D'après [No 87], Theorem B, il existe un  $\mathbf{F}_\ell$ -sous-groupe algébrique connexe  $\underline{G}$  de  $\mathbf{GL}_n$  tel que  $G$  soit contenu dans  $\underline{G}(\mathbf{F}_\ell)$  et soit engendré par les  $\ell$ -Sylow de ce groupe<sup>8</sup>. Le groupe  $H$  est un quotient d'une suite de Jordan–Hölder de  $G$ , donc aussi de  $\underline{G}(\mathbf{F}_\ell)$ . D'après le lemme 1, ceci entraîne que  $H$  est, soit cyclique d'ordre premier à  $\ell$  (ce qui est exclu), soit isomorphe à un élément de  $\Sigma_\ell$ . D'où le théorème.

**6.4. Un théorème d'Artin.** Le résultat suivant est essentiellement dû à E. Artin ([Ar 55], complété par [KLST 90]) :

**Théorème 5.** *Si  $\ell'$  est premier  $\geq 5$  et distinct de  $\ell$ , on a  $\Sigma_\ell \cap \Sigma_{\ell'} = \emptyset$ .*

La démonstration donne même un résultat plus fort : si  $G$  appartient à  $\Sigma_\ell$  et  $G'$  appartient à  $\Sigma_{\ell'}$ , leurs ordres  $|G|$  et  $|G'|$  sont distincts.

*Exemples.* Pour  $\ell = 5$ , les ordres des éléments de  $\Sigma_\ell$ , rangés par taille croissante, sont  $\{5, 60, 7800, 126000, 372000, 976500, \dots\}$ .

Pour  $\ell = 7$ , ce sont  $\{7, 168, 58800, 1876896, 5663616, 20176632, \dots\}$ .

## §7. Deux critères d'indépendance

**7.1. Un critère élémentaire.** Revenons aux notations du §1, et soit  $\rho_i : \Gamma \rightarrow G_i$ ,  $i \in I$ , une famille d'homomorphismes, les groupes  $\Gamma$  et  $G_i$  étant des groupes profinis, et les  $\rho_i$  étant continus.

**Lemme 2.** *Supposons que les groupes  $\rho_i(\Gamma) \subset G_i$  aient la propriété suivante :*

(D) *Si  $i \neq j$ , aucun quotient fini simple de  $\rho_i(\Gamma)$  n'est isomorphe à un quotient de  $\rho_j(\Gamma)$ .*

<sup>8</sup> La définition de  $\underline{G}$  donnée par Nori est très simple : c'est le plus petit sous-groupe algébrique de  $\mathbf{GL}_n$  contenant les groupes à 1 paramètre  $t \mapsto u^t$ , où  $u$  parcourt les éléments d'ordre  $\ell$  de  $G$ . Dans la terminologie de [Se 94], §4, c'est le *saturé* de  $G$ .

Alors les  $\rho_i$  sont indépendants.

*Démonstration.* On peut évidemment supposer que les  $\rho_i$  sont surjectifs, i.e.  $G_i = \rho_i(\Gamma)$  pour tout  $i$ .

Considérons d'abord le cas où  $I$  est un ensemble à deux éléments, par exemple  $I = \{1, 2\}$ . Si  $\rho: \Gamma \rightarrow G_1 \times G_2$  n'est pas surjectif, le classique lemme de Goursat montre qu'il existe un groupe profini non trivial  $A$  et des homomorphismes surjectifs  $f_i: G_i \rightarrow A$  tels que  $f_1 \circ \rho_1 = f_2 \circ \rho_2$ . Comme  $A$  est non trivial, il a un quotient qui est un groupe simple fini, et ce groupe est quotient à la fois de  $G_1$  et de  $G_2$ , contrairement à l'hypothèse (D).

Le cas où  $I$  est fini se déduit par récurrence sur  $|I|$  du cas où  $|I| = 2$ , et le cas où  $|I|$  est infini se déduit par passage à la limite du cas où  $|I|$  est fini.

**7.2. Un autre critère.** Soit  $\Gamma$  un groupe profini et soit  $L$  un ensemble de nombres premiers. Pour tout  $\ell \in L$ , soit  $\rho_\ell: \Gamma \rightarrow G_\ell$  un homomorphisme continu de  $\Gamma$  dans un groupe de Lie  $\ell$ -adique compact  $G_\ell$ .

**Lemme 3.** *Supposons qu'il existe une partie finie  $I$  de  $L$  telle que la famille  $(\rho_\ell)_{\ell \in L - I}$  ait la propriété (PR) du §1. Alors il en est de même de la famille  $(\rho_\ell)_{\ell \in L}$ .*

[Autrement dit, pour prouver (PR), on a le droit de supprimer un nombre fini d'éléments de  $L$ .]

*Démonstration.* On peut supposer que  $I$  est réduit à un seul élément, que l'on notera  $p$  : le cas général en résultera par récurrence sur  $|I|$ . Quitte à remplacer  $\Gamma$  par un sous-groupe ouvert, on peut supposer que les  $\rho_\ell$  sont indépendants pour  $\ell \neq p$  ; on peut aussi supposer que tous les  $\rho_\ell$  sont surjectifs. Nous allons alors démontrer un peu mieux que (PR), à savoir :

(\*) *La famille des  $\rho_\ell$  possède la propriété (RO) du §1.*

Autrement dit, l'image de  $\Gamma$  par l'homomorphisme

$$\rho = (\rho_\ell): \Gamma \rightarrow G_p \times \prod_{\ell \neq p} G_\ell$$

est ouverte dans  $\prod_\ell G_\ell$ .

Les deux projections  $\rho(\Gamma) \rightarrow G_p$  et  $\rho(\Gamma) \rightarrow \prod_{\ell \neq p} G_\ell$  sont surjectives par hypothèse. On se trouve donc dans la situation du lemme de Goursat. Autrement dit, si l'on identifie  $G_p$  au facteur  $G_p \times 1$  de  $G_p \times \prod_{\ell \neq p} G_\ell$ , le groupe quotient  $C = G_p / (\rho(\Gamma) \cap G_p)$  est un quotient de  $\prod_{\ell \neq p} G_\ell$ . Dire que  $\rho(\Gamma)$  est ouvert équivaut à dire que  $C$  est *fini*. C'est ce que nous allons démontrer.

Observons d'abord que  $C$  est un groupe de Lie  $p$ -adique compact (puisque c'est un quotient de  $G_p$ ) ; il contient donc un sous-groupe ouvert normal  $U$  qui est un pro- $p$ -groupe sans torsion (cf. par exemple [Se 65], II, §IV.9, th. 5, [Bo 72], Chap. III, §7, ou [DSMS 99], th. 8.32). Si  $J$  est une partie finie de  $L - \{p\}$ , notons  $C_J$  l'image de l'homomorphisme

$$\prod_{\ell \in J} G_\ell \rightarrow \prod_{\ell \neq p} G_\ell \rightarrow C.$$

Les  $p$ -Sylow des  $G_\ell$  sont finis si  $\ell \in J$  ; il en est donc de même de ceux de  $C_J$ . Comme  $U$  est sans torsion, cela montre que  $U \cap C_J = 1$  ; d'où  $|C_J| \leq (C : U)$ . Cela donne une borne uniforme pour l'ordre de  $C_J$ , ce qui entraîne qu'il existe un  $C_J$  qui contient tous les autres. Mais la réunion des  $C_J$  est dense dans  $C$ . D'où le fait que  $C$  est fini.

## §8. Démonstration du théorème 1

Revenons à la situation du théorème 1, relative à un homomorphisme

$$\rho = (\rho_\ell) : \Gamma_k \rightarrow \prod_{\ell \in L} G_\ell$$

satisfaisant aux conditions (B) et (PST). Pour prouver que  $\rho$  a la propriété (PR), nous procéderons en plusieurs étapes.

**8.1. Réductions.** Quitte à remplacer  $k$  par une extension finie, on peut supposer que la condition de semi-stabilité (ST) est satisfaite. On peut aussi supposer que les  $\rho_\ell$  sont surjectifs. D'après (B), on peut choisir un entier  $n \geq 0$  tel que, pour tout  $\ell \in L$ , le groupe  $G_\ell$  soit un sous-quotient de  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Z}_\ell)$ . D'après le lemme 3, on peut aussi supposer que tous les  $\ell \in L$  sont  $> \sup(3, c(n))$  où  $c(n)$  a la propriété énoncée dans le théorème 4. Pour la même raison, on peut aussi supposer que l'on a  $\ell \neq p_v$  pour toute place  $v$  de l'ensemble fini  $S$  intervenant dans (ST).

**8.2. Les groupes  $A_\ell$ .** Si  $\ell \in L$ , notons  $\Gamma_{k,\ell}$  le plus petit sous-groupe normal fermé de  $\Gamma_k$  contenant les groupes d'inertie  $I_{\bar{v}}$  correspondant aux places  $v$  telles que  $p_v = \ell$ . D'après (ST1), on a  $\rho_{\ell'}(\Gamma_{k,\ell}) = 1$  pour tout  $\ell' \neq \ell$ . L'image du groupe  $\Gamma_{k,\ell}$  par  $\rho : \Gamma_k \rightarrow \prod G_\ell$  est donc contenue dans le  $\ell$ -ième facteur de  $\prod G_\ell$ . Notons  $A_\ell$  cette image ; c'est un sous-groupe fermé normal de  $G_\ell$ . Le plus petit sous-groupe fermé de  $\prod G_\ell$  contenant tous les  $A_\ell$  n'est autre que le produit  $\prod A_\ell$ . En particulier, on a :

**Lemme 4.** *Le sous-groupe  $\rho(\Gamma_k)$  de  $\prod G_\ell$  contient  $\prod A_\ell$ .*

**8.3. Les groupes  $G_\ell^+$ .** Si  $\ell \in L$ , notons  $G_\ell^+$  le sous-groupe de  $G_\ell$  engendré par ses  $\ell$ -Sylow ; c'est un sous-groupe ouvert normal de  $G_\ell$ . Posons  $H_\ell = G_\ell / G_\ell^+ A_\ell$  ; c'est un groupe fini d'ordre premier à  $\ell$ .

**Lemme 5. a)** *L'homomorphisme  $\Gamma_k \rightarrow G_\ell \rightarrow H_\ell$  est partout non ramifié.*

**b)** *Le groupe  $H_\ell$  jouit de la propriété  $\text{Jor}_{d(n)}$  des §§4–5.*

*Démonstration.* Soit  $v \in V_k$ , et soit  $\bar{v}$  une place de  $\bar{k}$  prolongeant  $v$ . Si  $p_v = \ell$ , on a  $\rho_\ell(I_{\bar{v}}) \subset A_\ell$  par définition de  $A_\ell$  ; l'image de  $I_{\bar{v}}$  dans  $H_\ell$  est donc triviale. Si  $p_v \neq \ell$ , le groupe  $\rho_\ell(I_{\bar{v}})$  est un pro- $\ell$ -groupe d'après (ST) ; il est donc contenu dans  $G_\ell^+$  et son image dans  $H_\ell$  est triviale. Cela démontre a).

Quant à b), il résulte du fait que l'ordre de  $H_\ell$  est premier à  $\ell$ , ce qui permet de lui appliquer le théorème 3'.

**8.4. Changement de corps.** D'après le lemme 5, les homomorphismes  $\Gamma_k \rightarrow H_\ell$  sont non ramifiés. Comme les  $H_\ell$  ont la propriété  $\text{Jor}_{d(n)}$ , on peut appliquer le théorème 2. On en déduit qu'il existe une extension finie non ramifiée  $k'$  de  $k$  telle que, pour tout  $\ell \in L$ , l'image de  $\rho_\ell(\Gamma_{k'})$  dans  $H_\ell$  soit triviale. Choisissons une telle extension. On a alors  $\rho_\ell(\Gamma_{k'}) \subset G_\ell^+ \cdot A_\ell$  pour tout  $\ell$ . Nous allons maintenant prendre  $k'$  comme corps de base ; nous poserons  $G'_\ell = \rho_\ell(\Gamma_{k'})$ , et nous noterons  $G'^+_\\ell$  et  $A'_\\ell$  les groupes correspondant à  $G_\ell^+$  et à  $A_\ell$  ; par exemple,  $G'^+_\\ell$  est le sous-groupe de  $G'_\\ell$  engendré par les  $\ell$ -Sylow de  $G'_\\ell$ .

**Lemme 6.** Si  $\ell > [k' : k]$ , on a  $G'^+_\\ell = G_\ell^+$ ,  $A'_\\ell = A_\ell$  et  $G'_\\ell = G'^+_\\ell \cdot A'_\\ell$ .

*Démonstration.* L'hypothèse faite sur  $\ell$  entraîne que l'indice de  $G'_\\ell$  dans  $G_\ell$  est  $< \ell$ , d'où le fait que tout  $\ell$ -Sylow de  $G_\ell$  est contenu dans  $G'_\\ell$ , ce qui entraîne  $G'^+_\\ell = G_\ell^+$ . L'égalité  $A'_\\ell = A_\ell$  résulte de ce que les groupes d'inertie  $I_{\bar{v}}$  sont les mêmes pour  $k'$  et pour  $k$ , puisque  $k'$  est non ramifié sur  $k$ . Enfin, l'égalité  $G'_\\ell = G'^+_\\ell \cdot A'_\\ell$  résulte de ce que  $G'_\\ell = \rho_\ell(\Gamma_{k'})$  est contenu dans  $G_\ell^+ \cdot A_\ell$ .

**8.5. Fin de la démonstration.** D'après le lemme 3, on peut supposer que l'on a  $\ell > [k' : k]$  pour tout  $\ell \in L$ . Le lemme 6 montre que l'on a alors  $G'_\\ell = G'^+_\\ell \cdot A'_\\ell$  pour tout  $\ell$ . D'après le théorème 4, tout quotient simple de  $G'^+_\\ell$  appartient à l'ensemble  $\Sigma_\ell$  défini au n° 6.1. Il en est donc de même des quotients simples de  $G'_\\ell / A'_\\ell$ . Comme les  $\Sigma_\ell$  sont deux à deux disjoints (théorème 5), on peut appliquer le lemme 2 à la famille des homomorphismes  $\Gamma_{k'} \rightarrow G'_\\ell / A'_\\ell$ . On en conclut que l'homomorphisme  $\Gamma_{k'} \rightarrow \prod G'_\\ell / A'_\\ell$  est surjectif. Si l'on pose  $X' = \rho(\Gamma_{k'})$  et  $A' = \prod A'_\\ell$ , cela revient à dire que  $X' \cdot A' = \prod G'_\\ell$ . Mais le lemme 4, appliqué au corps  $k'$ , montre que  $X'$  contient  $A'$ . On a donc  $X' = \prod G'_\\ell$ , ce qui achève la démonstration.

## Références

- [Ar 55] E. Artin, The orders of the classical simple groups. *Comm. Pure Appl. Math.* **8** (1955), 455–472 (= C.P., n° 33). [Zbl 0065.25703](#) [MR 0073601](#)
- [Be 96] P. Berthelot, Altération des variétés algébriques (d'après A. J. de Jong). Dans *Sém. Bourbaki* 1995/96, exposé 815 ; *Astérisque* **241** (1997), Soc. Math. France, Paris 1997, 273–311. [Zbl 0924.14007](#) [MR 1472543](#)
- [BLR 90] S. Bosch, W. Lütkebohmert and M. Raynaud, *Néron models*. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) **21**, Springer-Verlag, Berlin 1990. [Zbl 0705.14001](#) [MR 1045822](#)
- [Bo 72] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie. Chapitre II : Algèbres de Lie libres. Chapitre III : Groupes de Lie*. Actualités Scientifiques et Industrielles 1349, Hermann, Paris 1972. [Zbl 0244.22007](#) [MR 0573068](#)
- [Bo 00] E. Bouscaren, Théorie des modèles et conjecture de Manin-Mumford (d'après Ehud Hrushovski). Dans *Sém. Bourbaki* 1999/2000, exposé 870 ; *Astérisque* **276** (2002), Soc. Math. France, Paris 2002, 137–159. [Zbl 0994.03033](#) [MR 1886759](#)

- [Co 07] M. J. Collins, On Jordan’s theorem for complex linear groups. *J. Group Theory* **10** (2007), 411–423. [Zbl 1125.20033](#) [MR 2334748](#)
- [DSMS 99] J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann, and D. Segal, *Analytic pro- $p$ -groups*. Second edition, revised and enlarged by Marcus du Sautoy and Dan Segal, Cambridge Stud. Adv. Math. 61, Cambridge University Press, Cambridge 1999. [Zbl 0934.20001](#) [MR 1720368](#)
- [Fr 11] F. G. Frobenius, Über den von L. Bieberbach gefundenen Beweis eines Satzes von C. Jordan. *Sitz. Königlich Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1911), 241–248 (=Ges. Abh. III, 493–500). [JFM 42.0152.01](#)
- [GLS 98] D. Gorenstein, R. Lyons and R. Solomon, *The classification of the finite simple groups*. Number 3, Part I, Chapter A, Almost simple K-groups, Math. Surveys Monogr. 40.3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998 [Zbl 0890.20012](#) [MR 1490581](#)
- [Il 10] L. Illusie, Constructibilité générique et uniformité en  $\ell$ . Orsay, 2010, non publié.
- [Jo 96] A. J. de Jong, Smoothness, semi-stability and alterations. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **83** (1996), 51–93. [Zbl 0916.14005](#) [MR 1423020](#)
- [Jo 78] C. Jordan, Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique. *Borchardt J. (J. reine angew. Math.)* **84** (1878), 89–215 (=Oe.II, 13-140). [JFM 09.0234.02](#)
- [KL 86] N. M. Katz et G. Laumon, Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **62** (1986), 361–418 ; Erratum, *Publ. Math. IHES* **69** (1989), 233. [Zbl 0603.14015](#) [MR 0823177](#)
- [KLST 90] W. Kimmerle, R. Lyons, R. Sandling, and D. N. Teague, Composition factors from the group ring and Artin’s theorem on orders of simple groups. *Proc. London Math. Soc.* **60** (1990), 89–122. [Zbl 0668.20009](#) [MR 1023806](#)
- [KMRT 98] M-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, and J-P. Tignol, *The book of involutions*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. [Zbl 0955.16001](#) [MR 1632779](#)
- [No 87] M. V. Nori, On subgroups of  $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_p)$ . *Invent. math.* **88** (1987), 257–275. [Zbl 0632.20030](#) [MR 0880952](#)
- [Se 65] J-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups*. Benjamin Publ., New York 1965 ; Lecture Notes in Math. 1500, Springer-Verlag, Berlin 1992 ; corrected fifth printing, 2006. [Zbl 0132.27803](#) [MR 0218496](#)
- [Se 81] J-P. Serre, Quelques applications du théorème de densité de Chebotarev. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **54** (1981), 123–201 (=Oe.III, n° 125). [Zbl 0496.12011](#) [MR 0644559](#)
- [Se 86] J-P. Serre, Lettre à Ken Ribet du 7/3/1986 (=Oe.IV, n° 138). [Zbl 0933.01034](#) [MR 1730973](#)
- [Se 91] J-P. Serre, Propriétés conjecturales des groupes de Galois motiviques et des représentations  $\ell$ -adiques. Dans *Motives*, Proc. Symp. Pure Math. 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 377–400 (=Oe.IV, n° 161). [Zbl 0812.14002](#) [MR 1265537](#)
- [Se 94] J-P. Serre, Sur la semi-simplicité des produits tensoriels de représentations de groupes. *Invent. math.* **116** (1994), 513–530 (=Oe.IV, n° 164). [Zbl 0816.20014](#) [MR 1253203](#)

- [SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck et J-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*. 3 vol., Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer-Verlag, Berlin 1972–1973. [Zbl 0234.00007](#), [Zbl 0237.00012](#), [Zbl 0245.00002](#), [MR 0354652](#), [MR 0354653](#), [MR 0354654](#)
- [SGA 7 I] A. Grothendieck, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*. Lecture Notes in Math. 288, Springer-Verlag, Berlin 1972. [Zbl 0237.00013](#) [MR 0354656](#)
- [St 68] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*. Mem. Amer. Math. Soc. 80, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968 (= C.P., n° 23). [Zbl 0164.02902](#) [MR 0230728](#)

Received May 24, 2010

Jean-Pierre Serre, Collège de France, 3 rue d’Ulm, 75005 Paris, France  
E-mail: [serre@noos.fr](mailto:serre@noos.fr)