Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 83 (2008)

Artikel: Rigidité topologique sous l'hypothèse "entropie majorée" et applications
Autor: Reviron, Guillemette
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-99049

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 83 (2008), 815–846 **Commentarii Mathematici Helvetici**
© Swiss Mathematical Society

Rigidité topologique sous l'hypothèse «entropie majorée» et applications

Guillemette Reviron

Résumé. We study some families of compact length spaces whose entropy is bounded from above. We prove that these families are complete w.r.t. the Gromov–Hausdorff distance and we give an explicit constant $\varepsilon_0 > 0$ such that, on balls of radius ε_0 with respect to the Gromov–Hausdorff distance, the fundamental group is constant, the universal covers are close for the equivariant Gromov–Hausdorff distance, the length spectrum is continuous and the entropy is Lipschitz. If we consider now some subsets of manifolds, we show moreover that the volume is semi-continuous from below and that the integral of the Ricci curvature is bounded from below.

Résumé. Nous étudions certaines familles d'espaces de longueur compacts dont l'entropie volumique est majorée. Nous montrons que ces familles sont complètes pour la distance de Gromov–Hausdorff et nous prouvons l'existence d'une constante explicite $\varepsilon_0 > 0$ telle que, sur les boules de rayon ε_0 pour la distance de Gromov–Hausdorff, le groupe fondamental est constant, les revêtements universels sont proches pour la distance de Gromov–Hausdorff équivariante, le spectre des longueurs est continu, l'entropie est Lipschitzienne. Si l'on se restreint à certains sous-ensembles des variétés riemanniennes compactes, nous montrons de plus que, sur ces boules de rayon ε_0, le volume est semi-continu inférieurement et que l'intégrale de la courbure de Ricci est minorée uniformément.

Mathematics Subject Classification (2000). 53C23, 53B21, 54E45, 53C24, 37A35, 14H30.

Mots Clefs. Espaces métriques, entropie volumique, rigidité topologique, distance de Gromov–Hausdorff, précompacité, spectre des longueurs, revêtements.

1. Introduction

Notons $\mathcal{R}_{m,K,D}$ l'ensemble des classes d'isométries de variétés riemanniennes compactes (M, g) de dimension m, dont le diamètre est majoré par D et telles que $\mathrm{Ricci}(M, g) \geq -(m-1)K^2 g$ et munissons cet ensemble de la distance de Gromov–Hausdorff, notée d_{GH}. Dans ce cadre classique, toutes les variétés sont localement difféomorphes (théorème A.112 de [CC1]) et le volume est un invariant continu (théorème 0.1 de [Co2]). De plus, $(\mathcal{R}_{m,K,D}, d_{\mathrm{GH}})$ est précompact dans l'ensemble des classes d'isométries des espaces de longueur compacts (théorème 5.3 de [Gr]).

Comme il n'est pas complet, il était naturel d'étudier son adhérence, qui s'avère en fait très difficile à caractériser (voir le survey [Co1] des travaux de J. Cheeger et T. Colding à ce sujet).

Dans cet article, nous affaiblissons l'hypothèse de minoration de la courbure de Ricci dans le but d'obtenir des ensembles d'espaces de longueur compacts qui sont complets vis-à-vis de la distance de Gromov–Hausdorff ; nous y étudions la continuité de certains invariants topologiques et géométriques (volume, premier nombre de Betti, spectre des longueurs,...). Dans le même but, J. Lott et C. Villani d'une part et K. T. Sturm d'autre part ont considéré $\mathcal{R}_{m,K,D}$ comme un sous-ensemble de l'ensemble des espaces métriques mesurés compacts sur lequel ils généralisent l'hypothèse "dimension m et courbure de Ricci minorée". Notons que, jusqu'à présent, leurs travaux portent essentiellement sur la généralisation du cas Ricci ≥ 0 et que, sur les variétés, cette hypothèse implique que le groupe fondamental est à croissance polynomiale, ce qui n'est pas le cas que nous considérons.

Nous avons ainsi remplacé la notion de courbure par celle d'entropie volumique qui a pour premier avantage d'être directement définie sur les espaces métriques de longueur compacts si l'on adopte la définition suivante :

Définition 1. Soit (X, d_X) un espace de longueur compact qui admet un revêtement universel $p\colon (\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}}) \to (X, d_X)$. Soit $\tilde{x}$ un point de $\widetilde{X}$ et $N_{\tilde{x}}(R)$ le nombre de points de l'orbite de $\tilde{x}$ (par l'action du groupe des automorphismes du revêtement universel) situés dans une boule de rayon R. On définit alors l'entropie volumique de (X, d_X) par

$$\mathrm{Ent}(X, d_X) = \lim_{R \longrightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log N_{\tilde{x}}(R).$$

Un second avantage réside dans le fait que l'entropie volumique est uniformément continue par rapport à la distance de Gromov–Hausdorff (voir le théorème 39). Nous considérerons donc l'ensemble $\mathcal{M}_{H,D}$ *des classes d'isométrie des espaces de longueur compacts, qui admettent un revêtement universel, dont l'entropie et le diamètre sont majorés par H et D*. Le théorème de Bishop–Gromov implique que $\mathcal{R}_{m,K,D}$ est inclus dans $\mathcal{M}_{(m-1)K,D}$, mais $\mathcal{M}_{(m-1)K,D}$ est bien plus vaste que $\mathcal{R}_{m,K,D}$ dans le sens suivant :

Remarque 2. (i) L'ensemble $(\mathcal{M}_{(m-1)K,D}, d_{\mathrm{GH}})$ n'est pas précompact (voir [Re], exemple 2.29).

(ii) Toute variété riemannienne de dimension m paire ($m \geq 4$) est obtenue comme la limite (pour la distance de Gromov–Hausdorff) d'une suite de variétés riemanniennes compactes de même dimension m, dont l'entropie est uniformément majorée (voir [Re], exemple 2.31) mais telles que deux variétés quelconques de la suite aient des caractéristiques d'Euler différentes.

(iii) Toute variété riemannienne (X, g) compacte de dimension $m \geq 3$ peut être obtenue comme la limite d'une suite de variétés riemanniennes compactes $((X_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de même dimension m, toutes difféomorphes à X, dont l'entropie est uniformément majorée, mais telle que $(\mathrm{Vol}(X_n, g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers l'infini (voir [Re], exemple 2.33).

Si l'on se restreint aux variétés riemanniennes compactes de $\mathcal{M}_{H,D}$, le point (ii) prouve qu'il ne peut y avoir ni finitude ni rigidité locale de la topologie ou de l'homologie. De plus, la finitude ou la rigidité locale de l'ensemble de leurs groupes fondamentaux ne peut être espérée puisqu'elle est déjà fausse pour l'ensemble des variétés riemanniennes compactes de courbure de Ricci minorée et de diamètre majoré (voir [Pl], exemple 1.1). Cependant, dans ce dernier cadre, M. Gromov prouve un résultat de finitude de l'ensemble des groupes fondamentaux en ajoutant une borne sur la dimension et une hypothèse algébrique sur la croissance des sous-groupes à deux générateurs du groupe fondamental ([Gr], corollaire 5.27). C'est une hypothèse algébrique du même type que nous ferons ici :

Définition 3. Un groupe G non-abélien possède la *propriété* FSG(N) si, pour toute paire d'éléments (γ, γ') qui ne commutent pas, le semi-groupe engendré par γ^N et $(\gamma')^N$ (ou $(\gamma')^{-N}$) est libre.

En revanche, nous nous affranchirons de toute hypothèse sur la dimension des objets étudiés, car celle-ci n'est pas continue pour la distance de Gromov–Hausdorff.

Notons donc $\mathcal{M}_{N,H,D}$ *l'ensemble des classes d'isométrie des espaces de longueurs compacts* (X, d_X) *qui appartiennent à* $\mathcal{M}_{H,D}$ *et dont le groupe des automorphismes du revêtement universel* $G(\widetilde{X}, X)$ *est de centre réduit à zéro et possède la propriété* FSG(N).

Si (Y, d_Y) est un espace de longueur compact et si $p\colon (\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}}) \to (Y, d_Y)$ est un revêtement galoisien, nous noterons $G(\widetilde{Y}, Y)$ *le groupe des automorphismes de ce revêtement.* Sur l'ensemble $\mathcal{R}_{m,K,D}$, C. Sormani et G. Wei ont montré le résultat suivant, dont une version plus précise avaient été démontrée par W. Tuschmann dans le cas particulier des variétés riemanniennes compactes dont la courbure sectionnelle est uniformément bornée (voir [Tu1], [Tu2]) :

Théorème 4 ([SW], théorème 1.4). *Soit* $((M_i^m, g_i))_{i\in\mathbb{N}}$ *une suite de variétés riemanniennes compactes qui appartiennent à* $\mathcal{R}_{m,K,D}$ *et qui convergent vers un espace de longueur* (Y, d_Y) *au sens de Gromov–Hausdorff. Alors le revêtement universel* $\widetilde{Y}$ *de* Y *existe et, pour* n *suffisamment grand (qui dépend de* Y*), il existe un homomorphisme surjectif de* $\pi_1(M_n)$ *dans le groupe* $G(\widetilde{Y}, Y)$.

Sur $\mathcal{M}_{N,H,D}$, nous montrons le théorème principal suivant, dont une version plus générale est donnée dans le théorème 16 :

Théorème 5. *Il existe une constante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N, H, D)$ telle que, si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces de longueur compacts qui appartiennent à $\mathcal{M}_{N,H,D}$ et qui vérifient $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$, il existe un triplet $(\rho, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$ où*

(i) *ρ est un isomorphisme entre les groupes $G(\widetilde{X}, X)$ et $G(\widetilde{Y}, Y)$.*

(ii) *$\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ et $\widetilde{\psi}\colon \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ sont, pour tout $R > 0$, des $(\frac{3}{\varepsilon_0}R+3)\varepsilon$-approximations de Gromov–Hausdorff entre les boules de rayon R de $\widetilde{X}$ et $\widetilde{Y}$, ε-presque inverses l'une de l'autre (voir la définition 10), et respectivement ρ-équivariante et ρ^{-1}-équivariante.*

Remarquons que le théorème 5 détermine a priori la taille des voisinages sur lesquels ses conclusions sont vérifiées ; une valeur possible de ε_0 est $\varepsilon_0(N, H, D) = \frac{1}{N.H} \log\left(\frac{1}{1-e^{-2NHD}}\right)$.

Remarquons également que l'hypothèse FSG(N) n'est guère restrictive. En effet, notons en premier lieu que les groupes fondamentaux de n'importe quelle surface de genre supérieur ou égal à 2 possèdent tous la propriété FSG(1). Plus généralement, si Γ est le groupe fondamental d'une variété riemannienne compacte de courbure strictement négative, il vérifie la propriété FSG(N) pour un N qui dépend de Γ. Pour les résultats que nous visons, il est souhaitable que N soit indépendant de Γ, ce qui est le cas pour les ensembles de groupes suivants : les groupes δ-épais et δ-non-abéliens (voir les définitions et de nombreux exemples dans [BCG1], p. 9–13) possèdent uniformément la propriété FSG$(E[\frac{4}{\delta}])$; les groupes δ-hyperboliques selon Gromov non abéliens et sans torsion possèdent la propriété FSG(N) pour un N ne dépendant que de δ et d'un majorant du nombre de générateurs ([CG], p. 158) ; les produits libres et les produits amalgamés malnormaux – voir la définition p. 933 de [KS] – de deux groupes ayant la propriété FSG(N_0) ont eux aussi la propriété FSG(N_0) ([Zu], proposition 2.0.14). Enfin, remarquons que $(\mathcal{M}_{N,H,D}, d_{\mathrm{GH}})$ n'est pas précompacte et que, dans la remarque 2, si la variété de départ est de courbure strictement négative, les suites de variétés qui y sont construites appartiennent toutes à un même ensemble $\mathcal{M}_{N,H,D}$: supposer l'appartenance à un même ensemble $\mathcal{M}_{N,H,D}$ reste donc une condition relativement faible.

Le théorème 16 a pour corollaires les résultats suivants :

Théorème 6 (Théorème 39). *L'espace métrique $(\mathcal{M}_{N,H,D}, d_{\mathrm{GH}})$ est complet et l'entropie volumique y est uniformément continue.*

Dans la preuve du théorème 6, une des difficultés est de démontrer que, pour toute suite d'éléments de $\mathcal{M}_{N,H,D}$ qui converge au sens de Gromov–Hausdorff, l'espace-limite possède un revêtement universel. Ce point est vérifié dans la proposition 34.

Corollaire 7. *En restriction à l'ensemble des variétés riemanniennes qui appartiennent à $\mathcal{M}_{N,H,D}$, les propriétés suivantes sont vérifiées sur toute boule de rayon $\frac{\varepsilon_0}{13}$:*

(i) *le groupe fondamental et le premier nombre de Betti sont constants ;*

(ii) *l'entropie et, pour tout i, le logarithme de la $i^{ème}$ valeur propre du spectre des longueurs sont des fonctions Lipschitziennes de la structure riemannienne pour la distance de Gromov–Hausdorff, la constante de Lipschitz étant contrôlée (corollaire* 35).

Pour le volume, aucune continuité ne peut être espérée (voir la remarque 2 (iii)). Cependant, on a le résultat de semi-continuité inférieure suivant :

Corollaire 8 (corollaire 42). *Sous les hypothèses du corollaire 7, si la boule de rayon $\frac{\varepsilon_0}{13}$ est centrée en une variété riemannienne (X^m, g_0) de courbure sectionnelle $\sigma_0 \leq -1$, pour toute variété riemannienne (Y^m, g) de cette boule qui est un $K(\pi, 1)$, on a*

$$\mathrm{Vol}(Y, g) \geq \left(\frac{m-1}{\mathrm{Ent}(X, g_0)}\right)^m \left(1 - \frac{3\, d_{\mathrm{GH}}((X, g_0), (Y, g))}{\varepsilon_0}\right)^m \mathrm{Vol}(X, g_0).$$

En imposant sur (Y, g) des hypothèses plus fortes, on obtient également le semi-continuité supérieure du volume (voir le corollaire 43).

Enfin, on obtient les obstructions suivantes sur la courbure de Ricci (proposition 41) :

Corollaire 9. *Sous les hypothèses du corollaire 7, si le centre de la boule de rayon $\frac{\varepsilon_0}{13}$ est noté (X, d_X), aucune des variétés riemanniennes (Y^m, g) de la boule ne peut vérifier*

$$\mathrm{Ricci}(Y, g) \geq -(m-1)\left[\frac{\mathrm{Ent}(X, d_X)}{m-1}\left(1 - \frac{4\, d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (Y, g))}{\varepsilon_0}\right)\right] g.$$

De plus, il existe une constante $C(m, \delta, X) > 0$ telle qu'aucune des variétés riemanniennes (Y, g) de la boule ne puisse avoir la norme $L^{(m+\delta)/2}$ de la partie négative de sa courbure de Ricci majorée par $C(m, \delta, X)$.

Remarquons finalement qu'une des conséquences d'une version du Lemme de Margulis sans courbure démontrée par G. Besson, G. Courtois et S. Gallot dans [BCG1] est l'existence d'une constante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N, H, D)$ telle que la systole de tout espace de longueur qui appartient à $\mathcal{M}_{N,H,D}$ est uniformément minorée par ε_0 (voir la définition 14 de la systole sur les espaces de longueur). En fait, le théorème 5, ses corollaires 7, 8, 9 et le théorème 6 restent valables si l'on y remplace l'hypothèse d'appartenance à $\mathcal{M}_{N,H,D}$ par l'hypothèse plus faible "la systole est minorée par ε_0", c'est pourquoi nous avons choisi cette dernière hypothèse dans les énoncés et les démonstrations. Certains des résultats présentés dans cet article restent même valables lorsque seul le centre de la boule de rayon $\frac{\varepsilon_0}{13}$ est un espace (X, d_X) dont la

systole est minorée par ε_0, le point "courant" (Y, g_Y) de la boule étant quelconque (voir le théorème 16, le théorème 37 et la proposition 41).

Je remercie Sylvestre Gallot et Bruno Colbois pour leur disponibilité et leurs encouragements.

2. Généralités

Nous utilisons la définition d'espaces métriques de longueur donnée dans [Gr], définition 1.7. Nous les supposerons toujours connexes.

Distance de Gromov–Hausdorff. Nous adopterons les définitions suivantes :

Définition 10. Une application $\varphi\colon X \to Y$ entre deux espaces métriques compacts (X, d_X) et (Y, d_Y) est dite ε-presque-isométrique si elle vérifie, pour tous les points x et x' de X,

$$|d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) - d_X(x, x')| < \varepsilon.$$

La distance de Gromov–Hausdorff entre deux espaces métriques compacts (X, d_X) et (Y, d_Y), notée $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (y, d_Y))$, est la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ tels qu'il existe deux applications ε-presque-isométriques $\varphi\colon X \to Y$ et $\psi\colon Y \to X$ telles que, pour tout point x de X et tout point y de Y,

$$d_X(\psi \circ \varphi(x), x) < \varepsilon,$$

$$d_Y(\varphi \circ \psi(y), y) < \varepsilon.$$

Si φ et ψ vérifie ces deux dernières conditions, nous dirons qu'elles sont ε-presque-inverses l'une de l'autre.

Une ε-presque-isométrie $\varphi\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ qui admet un ε-presque-inverse est appelée ε-approximation de Gromov–Hausdorff entre (X, d_X) et (Y, d_Y).

Existence d'un revêtement universel et α-revêtements. Soit (X, d_X) un espace de longueur. Si $p\colon Y \to X$ est un revêtement galoisien de X, nous noterons $G(Y, X)$ le *groupe des automorphismes de ce revêtement.*

Rappelons que l'application $p\colon Y \to X$ est un revêtement universel de X si, pour tout autre revêtement $p'\colon Y' \to X$, il existe un revêtement $p''\colon Y \to Y'$ tel que $p = p' \circ p''$. Un tel revêtement est unique (à équivalence de revêtement près). En général, quand il existe, le revêtement universel n'est pas simplement connexe (voir par exemple [Sp], exemple 18, p. 84).

Dans le cadre des espaces de longueur, C. Sormani et G. Wei ont établi une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence d'un revêtement universel. Si (X, d_X) est un espace de longueur connexe, on construit des sous-groupes

normaux du groupe fondamental de X de la manière suivante : fixons $\alpha > 0$ et considérons le sous-groupe distingué (noté $\pi_1(X, x_0)[\alpha]$) de $\pi_1(X, x_0)$ engendré par les lacets γ en x_0 de la forme $\gamma = c^{-1}.\beta.c$ où β est un lacet entièrement inclus dans une boule de rayon α et c est un chemin entre x_0 et $\beta(0)$. Si l'on note à présent $p_\alpha\colon (X^\alpha, d_{X^\alpha}) \to (X, d_X)$ le revêtement galoisien de (X, d_X) dont le groupe des automorphismes est $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)[\alpha]$, un critère d'existence du revêtement universel est alors donné dans le théorème suivant :

Théorème 11 ([SW], théorème 3.7). *Un espace de longueur compact (X, d) admet un revêtement universel si et seulement s'il existe $\alpha_0 > 0$ (qui dépend de X) tel que, pour tout $\alpha < \alpha_0$, les revêtements $p_\alpha\colon (X^\alpha, d_{X^\alpha}) \to (X, d_X)$ et $p_{\alpha_0}\colon (X^{\alpha_0}, d_{X^{\alpha_0}}) \to (X, d_X)$ sont isomorphes. Dans ce cas, $p_{\alpha_0}\colon (X^{\alpha_0}, d_{X^{\alpha_0}}) \to (X, d_X)$ est le revêtement universel.*

Nous donnons à présent quelques propriétés immédiates sur les α-revêtements (voir [Re], p. 85–88 pour les détails).

Propriété 12. Le relevé d'un lacet c sur X de point-base x_0 est un lacet de X^α si et seulement si la classe de c dans $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)[\alpha]$ est nulle.

Propriété 13. Soit (X, d_X) un espace de longueur compact et considérons son α-revêtement de longueur $p_\alpha\colon (X^\alpha, d_{X^\alpha}) \to (X, d_X)$. Alors, pour tout point $\tilde{x}$ de X^α, l'application p_α est

(i) un homéomorphisme de $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, r)$ sur $B_X(p_\alpha(\tilde{x}), r)$ si $r \leq \alpha$,

(ii) une isométrie globale de $B_{X^\alpha}(\tilde{x}, r)$ sur $B_X(p_\alpha(\tilde{x}), r)$ si $r \leq \alpha/2$.

Définition 14. Si (X, d) est un espace de longueur compact qui admet un revêtement universel $p\colon (\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}}) \to (X, d)$, nous définissons la systole de (X, d) par $\mathrm{sys}(X, d) = \inf\{d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x}) \,/\, \tilde{x} \in \widetilde{X}, \gamma \in G(\widetilde{X}, X) \setminus \{\mathrm{id}\}\}$.

Proposition 15. *Considérons un espace de longueur compact (X, d_X) qui admet un revêtement universel $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ et dont la systole est minorée par ε_0. Alors, pour tout $0 < \alpha \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$, le revêtement universel $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ est isomorphe au α-revêtement de X (ou, ce qui est équivalent, pour tout $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon_0}{2}]$, les groupes $\pi_1(X, x_0)[\alpha]$ et $\pi_1(X, x_0)[\frac{\varepsilon_0}{2}]$ sont isomorphes).*

3. Construction d'approximations équivariantes entre revêtements

Nous démontrons dans cette section le résultat fondamental de cet article, qui est un résultat de rigidité locale sur le groupe des automorphismes du revêtement universel et de quasi-rigidité de son action sur le revêtement universel.

Théorème 16. *Soit (X, d_X) un espace de longueur compact (connexe), qui admet un revêtement universel et dont la systole est minorée par un réel $\varepsilon_0 > 0$. Si (Y, d_Y) est un espace de longueur compact connexe tel que $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ alors, pour tout α tel que $0 < 5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, il existe un triplet $(\rho, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$ tel que*

(i) *ρ est un isomorphisme entre les groupes $G(\widetilde{X}, X)$ et $G(Y^\alpha, Y)$.*

(ii) *$\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{X} \to Y^\alpha$ et $\widetilde{\psi}\colon Y^\alpha \to \widetilde{X}$ sont, pour tout $R > 0$, des $(\frac{3\varepsilon}{2\alpha}R + 3\varepsilon)$-approximations de Gromov–Hausdorff entre les boules de rayon R de $\widetilde{X}$ et Y^α, ε-presque inverses l'une de l'autre, et respectivement ρ-équivariante et ρ^{-1}-équivariante.*

Remarques 17. (i) En fait, nous montrons les inégalités suivantes sur $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$: pour tous les points $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ de $\widetilde{X}$, pour tous les points $\tilde{y}$ et $\tilde{y}'$ de Y^α,

(1) $\left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') - 3\varepsilon \leq d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{\varphi}(\tilde{x}')) \leq \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{-1} d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') + \varepsilon$;

(2) $\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') - 3\varepsilon \leq d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi}(\tilde{y}), \widetilde{\psi}(\tilde{y}')) \leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') + \varepsilon$;

(3) $d_{\widetilde{X}}((\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi})(\tilde{x}), \tilde{x}) < \varepsilon$ et $d_{Y^\alpha}((\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi})(\tilde{y}), \tilde{y}) < \varepsilon$.

(ii) Sous la seule hypothèse de minoration de la systole, on ne peut espérer améliorer le résultat de rigidité du groupe fondamental ci-dessus en un résultat de rigidité homotopique ou homologique (voir la remarque 2).

(iii) Les hypothèses faites sur α dans le théorème 16 sont nécessaires : le réel α ne peut pas être choisi arbitrairement petit par rapport à ε ou arbitrairement grand par rapport à $\frac{\varepsilon_0}{2}$ (voir le paragraphe suivant sur l'approximation d'une variété par un graphe).

(iv) Dans le cas où (X, d_X) est un revêtement universel de lui-même (par exemple si (X, d_X) est une sphère de dimension au moins 2), le groupe des automorphismes du revêtement universel est trivial. Le théorème 16 s'énonce alors de la manière suivante :

Corollaire 18. *Soit (X, d_X) un espace de longueur compact qui est un revêtement universel de lui-même. Pour tout $\varepsilon > 0$, si (Y, d_Y) est un espace de longueur compact (connexe) quelconque tel que $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (Y, d_Y)) < \varepsilon$, alors le groupe $\pi_1(Y, y)$ est isomorphe à $\pi_1(Y, y)[5\varepsilon]$.*

Une application directe du théorème 16 dans le cadre des variétés riemanniennes est le suivant :

Corollaire 19. *Soit Y une variété compacte qui admet une métrique g_0 de courbure sectionnelle $\sigma_0 < 0$. S'il existe sur Y une suite de métriques $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entropie volumique uniformément bornée (mais dont la courbure est de signe quelconque) qui*

converge pour la distance de Gromov–Hausdorff, alors l'espace-limite (X, d) admet un revêtement universel $\pi : \widetilde{X} \to X$ et, si y est un point de Y, $G(\widetilde{X}, X)$ est isomorphe à $\pi_1(Y, y)$.

Preuve. La variété Y admet une métrique g_1 de courbure sectionnelle $\sigma_1 \leq -1$. Si $\delta_1 = \mathrm{inj}(Y, g_1)$, le groupe $\pi_1(Y)$ est δ_1-épais (voir la définition dans [BCG1], p. 9). Comme, par ailleurs, l'entropie des espaces (Y, g_n) est supposée uniformément bornée par H et que, si n est suffisamment grand, $\mathrm{diam}(Y, g_n) \leq \mathrm{diam}(X, d) + 1$, le point (iv) du théorème 2.1 de [BCG1] implique que, pour tout n suffisamment grand, $\mathrm{sys}(Y, g_n) \geq \varepsilon_1 = \frac{\delta_1}{(4+\delta_1)H} e^{-2(\frac{4+\delta_1}{\delta_1})H(\mathrm{diam}(X,d)+1)}$. Posons alors $\varepsilon_n = d_{\mathrm{GH}}((Y, g_n), (X, d))$. Si n est suffisamment grand pour que $5\varepsilon_n < 6\varepsilon_n < \frac{\varepsilon_1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_n$, le théorème 16 implique que $\pi_1(Y) \simeq G(\widetilde{Y}, Y) \simeq G(X^{6\varepsilon_n}, X)$. Le théorème 11 permet de conclure. □

Illustration : Approximation d'une variété par un graphe. Fixons un espace de longueur compact (connexe) (X, d) quelconque, semi-localement simplement connexe : son revêtement universel est simplement connexe et $G(\widetilde{X}, X)$ est isomorphe à $\pi_1(X, x_0)$. On construit un graphe qui approche l'espace de longueur (pour la distance de Gromov–Hausdorff) de la manière suivante : si $\varepsilon < 1/4$, considérons un ε^2-réseau fini sur (X, d_X), noté $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$. On construit le graphe G (fini donc compact), dont l'ensemble des sommets est $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$, en mettant une arête entre deux points x et y de $\mathcal{R}_{\varepsilon^2}$ si et seulement si la distance (sur X) entre ces deux points est strictement inférieure à ε ; on attribue alors à cette arête la longueur $d_X(x, y)$. On munit ensuite le graphe G de la distance de longueur d_G naturellement induite par cette construction. On peut alors vérifier que G est connexe par arcs et que $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (G, d_G)) \leq 4\varepsilon(D + \varepsilon)$ (voir [Re], p. 117).

Le théorème 16 et sa preuve permettent alors de déduire le corollaire suivant :

Corollaire 20. *Soit (X, d_X) un espace de longueur compact (connexe), semi-localement simplement connexe, de diamètre inférieur à D et dont la systole est supérieure à ε_0. Soit G un graphe de recouvrement connexe construit comme ci-dessus tel que $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (G, d_G)) < \frac{\varepsilon_0}{66}$. Le morphisme canonique de $\pi_1(G, x_0)$ sur $\pi_1(X, x_0)$ (associé à l'inclusion) est surjectif et a pour noyau le sous-groupe $\pi_1(G, x_0)[\frac{\varepsilon_0}{13}]$.*

Ce corollaire découle de la preuve du théorème 16, en remarquant que l'isomorphisme ρ qui y est construit dans le cas général coïncide ici avec le morphisme canonique associé à l'inclusion (où l'inclusion est dans ce cas une approximation de Gromov–Hausdorff).

3.1. Démonstration du théorème 16. Le théorème 16 est une version quantitative précisée du théorème 3.4 de [SW], dont certaines idées étaient déjà présentes dans

[Tu1] et [Tu2]. Même si cette preuve s'appuie sur des techniques classiques, nous avons décidé de la détailler, d'une part pour montrer que les idées classiques de preuve (valables dans le cas d'applications continues) s'appliquent encore dans le cas d'approximations de Hausdorff non continues, mais aussi pour montrer qu'un calcul effectif des valeurs admises de ε et de α est possible en fonction seulement du minorant de la systole de (X, d_X). Enfin, la comparaison des distances obtenues n'est pas classique.

L'idée de la preuve qui suit est de discrétiser les courbes sur X pour les transporter en des «courbes discrètes» sur Y à l'aide de l'approximation de Hausdorff entre X et Y. Si la discrétisation est assez fine, nous allons montrer qu'une courbe représentant une classe de $G(\widetilde{X}, X)$ est envoyée sur une courbe représentant une classe de $G(Y^\alpha, Y)$. Nous posons donc la définition suivante :

Définition 21. Soit (X, d_X) un espace de longueur. Une subdivision $T = (t_i)_{i=0,\dots,p}$ de l'intervalle $[0, a]$ sera dite δ-admissible pour la courbe $c\colon [0, a] \to X$ si $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = a$ et si, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ et tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $d_X(c(t_i), c(t)) < \delta$.

Construction de l'application $\widetilde{\varphi}$ et du morphisme ρ. Notons $p\colon (\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}}) \to (X, d_X)$ le revêtement universel de (X, d_X) et $p_\alpha\colon (Y^\alpha, d_{Y^\alpha}) \to (Y, d_Y)$ le α-revêtement de (Y, d_Y). Soient $\varphi\colon X \to Y$ une ε-approximation, x_0 un point fixé de X et $\tilde{x}_0$ un point de $p^{-1}(x_0)$. Notons $y_0 = \varphi(x_0)$ et fixons un point y^α dans $(p_\alpha)^{-1}(y_0)$.

Pour tout point $\tilde{x}$ de $\widetilde{X}$, nous allons construire $\widetilde{\varphi}(\tilde{x})$. Soit $\tilde{c}$ une courbe qui relie $\tilde{x}_0$ à $\tilde{x}$ dans $\widetilde{X}$, $c = p \circ \tilde{c}$ et $x = p(\tilde{x})$. Soit $T = (t_i)_{i=1,\dots,p}$ une subdivision δ-admissible pour la courbe c. On construit sur Y une courbe c_T qui joint $y_0 = \varphi(x_0)$ et $\varphi(x)$ en joignant, pour tout i, $\varphi \circ c(t_i)$ à $\varphi \circ c(t_{i+1})$ par une courbe minimisante quelconque de (Y, d_Y). On relève ensuite cette courbe en une courbe (continue) c_T^α de Y^α telle que $c_T^\alpha(0) = y^\alpha$.

Lemme 22. *Si $c\colon [0, a] \to X$ est une courbe incluse dans une boule $B_X(x, r)$ et si T est une subdivision δ-admissible pour c, la courbe c_T est incluse dans la boule $B_Y(\varphi(x), r + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2})$.*

Preuve. Pour tout t de $[t_i, t_{i+1}]$, comme φ est une ε-approximation, on a

$$\begin{aligned} d_Y(\varphi(x), c_T(t)) &\le d_Y(\varphi(x), \varphi \circ c(t_i)) + d_Y(\varphi \circ c(t_i), c_T(t)) \\ &< r + \varepsilon + d_Y(\varphi \circ c(t_i), c_T(t)). \end{aligned}$$

On conclut en ajoutant à cette inégalité celle obtenue en remplaçant t_i par t_{i+1} et en utilisant le fait que $d_Y(\varphi \circ c(t_i), c_T(t))$ est la longueur de $c_T([t_i, t])$. $\square$

Lemme 23. *L'extrémité $c_T^\alpha(1)$ du chemin c_T^α ne dépend ni du choix de la subdivision T (si elle est δ-admissible pour $\delta \leq \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$), ni du choix des courbes minimisantes entre les points $\varphi \circ c(t_i)$ et $\varphi \circ c(t_{i+1})$.*

Preuve. Soient $\delta > 0$ et $\delta' > 0$ inférieurs à $\frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$. Soit $T = (t_i)_{i=1,\dots,p}$ (resp. $T' = (t'_i)_{i=1,\dots,q}$) une subdivision de $[0, a]$, δ-admissible (respectivement δ'-admissible) pour la courbe c. Construisons les courbes c_T et $c_{T'}$, posons $T'' = T \cup T'$ et construisons $c_{T''}$.

Commençons par montrer que le lacet $c_{T''}.c_T^{-1}$ est un lacet de $\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$, c'est-à-dire qu'il s'écrit comme produit de lacets du type $\beta.c.\beta^{-1}$, où c est un lacet inclus dans une boule de rayon α et β est un chemin entre y_0 et y.

Tout d'abord, si $\beta_i = c_{T|[t_0,t_i]}$ et si γ_i est le lacet de point base $\varphi \circ c(t_i)$ donné par $\gamma_i = c_{T''|[t_i,t_{i+1}]}.c^{-1}_{T|[t_i,t_{i+1}]}$, on a, en homotopie : $\prod_{i=0}^{p-1} \beta_i.\gamma_i.\beta_i^{-1} \sim c_{T''}.c_T^{-1}$. Par ailleurs, comme le lacet $c_{|[t_i,t_{i+1}]}.c^{-1}_{|[t_i,t_{i+1}]}$ est inclus dans une boule de rayon δ, le lemme 22 implique que le lacet γ_i est inclus dans la boule $B_Y(\varphi \circ c(t_i), \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon))$. Dès que $\alpha \geq \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon)$, on en déduit que tous les lacets de la forme $\beta_i.\gamma_i.\beta_i^{-1}$ appartiennent au groupe $\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$; il s'ensuit que le lacet $c_{T''}.c_T^{-1}$ appartient également à $\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$. D'après la proposition 12, il se relève sur Y^α en un lacet $c^\alpha_{T''}.(c_T^{-1})^\alpha$ où $c^\alpha_{T''}$ et $(c_T^{-1})^\alpha$ sont les relevés des courbes $c_{T''}$ et c_T^{-1} d'origines respectives y^α et $c^\alpha_{T''}(a)$. Comme $(c_T^{-1})^\alpha(a) = y^\alpha = c_T^\alpha(0)$, on a $(c_T^{-1})^\alpha = (c_T^\alpha)^{-1}$ et il s'ensuit que les courbes $c^\alpha_{T''}$ et c_T^α ont même extrémité.

On montre de même que les courbes $c^\alpha_{T''}$ et $c^\alpha_{T'}$ ont même extrémité et, finalement, si $\alpha \geq \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon)$, les courbes c_T^α et $c^\alpha_{T'}$ ont même extrémité, ce qui termine la preuve du lemme 23. □

Remarque 24. Le lemme 23 entraîne que l'on peut toujours remplacer une subdivision δ-admissible T par une subdivision T' plus fine (ce qui veut dire que δ peut être choisi arbitrairement petit) pourvu que $\delta \leq \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$.

A tout point $\tilde{x}$ de $\widetilde{X}$, on associe le point $\widetilde{\varphi}(\tilde{x})$ construit de la manière suivante : soit $\tilde{c}$ une courbe quelconque reliant $\tilde{x}_0$ à $\tilde{x}$ et soit $c = p \circ \tilde{c}$ sa projection sur X. A toute subdivision δ-admissible de $\tilde{c}$ (pour $\delta < \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$), notée T, on associe la courbe c_T de Y construite comme au lemme 23 et l'on pose $\widetilde{\varphi}(\tilde{x}) = c_T^\alpha(1)$, où $c_T^\alpha(1)$ est l'extrémité du chemin c_T^α.

D'après le lemme 23, $\widetilde{\varphi}(\tilde{x})$ ne dépend pas de la subdivision T. Pour s'assurer que l'application $\widetilde{\varphi}$ est bien définie, il nous reste à vérifier que la construction de $\widetilde{\varphi}(\tilde{x})$ ne dépend pas du chemin $\tilde{c}$ choisi entre $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}$, c'est-à-dire que si $\tilde{\gamma}$ est un autre chemin qui relie ces deux points, alors $\gamma_T^\alpha(1) = c_T^\alpha(1)$. D'après la proposition 12, ceci équivaut à prouver que $\gamma_T.c_T^{-1}$ appartient à $\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$. Nous commençons par montrer quelques résultats intermédiaires et nous montrons l'indépendance de la construction de $\widetilde{\varphi}$ par rapport au chemin choisi dans le lemme 27.

Lemme 25. *Soient c et γ deux lacets sur X tels que dans $\pi_1(X,x_0)/\pi_1(X,x_0)[r]$ on a $[c]^r = [\gamma]^r$ et soit T une subdivision δ-admissible pour c et γ.*

Si $\alpha \geq r + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2}$ et si $\delta \leq \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$, on a l'égalité $[c_T]^\alpha = [\gamma_T]^\alpha$ dans $\pi_1(Y,y_0)/\pi_1(Y,y_0)[\alpha]$.

En particulier, si c et γ sont homotopes et si $\alpha > \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2}$, on a l'égalité $[c_T]^\alpha = [\gamma_T]^\alpha$ pour toute subdivision T, pourvu qu'elle soit δ-admissible pour c et γ.

Preuve. Considérons deux lacets quelconques c et γ de X, de point-base x_0, et notons $a = c.\gamma$ le lacet obtenu par concaténation. Si $T' = (t'_i)_{i=0,\dots,p}$ et $T'' = (t''_j)_{j=0,\dots,q}$ sont des subdivisions δ-admissibles de c et γ, la subdivision $T = T' \cup T'' = (t_i)_{i=0,\dots,p+q}$, obtenue en concaténant les deux subdivisions et en identifiant t''_0 et t'_p, est δ-admissible pour a. Comme la classe de a_T dans $\pi_1(Y,y_0)/\pi_1(Y,y_0)[\alpha]$ ne dépend pas des chemins minimisants choisis entre les points $\varphi \circ \alpha(t_i)$, on peut construire a_T comme la concaténation de $c_{T'}$ et de $\gamma_{T''}$.

De même, si c est une courbe sur X, on construit $(c^{-1})_T$ comme égale à $(c_T)^{-1}$.

Si de plus, $[c]^r = [\gamma]^r$, le lacet $\alpha = \gamma.c^{-1}$ est alors un produit de lacets du type $\beta.\gamma_i.\beta^{-1}$, où chaque γ_i est un lacet inclus dans une boule $B_X(x_i,r)$. D'après la propriété de concaténation que nous venons d'établir, le lacet α_T peut alors être construit comme un produit de lacets du type $\beta_{T_1}.\gamma_{i_{T_2}}.\beta_{T_1}^{-1}$, où $\gamma_{i_{T_2}}$ est inclus (d'après le lemme 22) dans la boule $B_Y(\varphi(x_i), r + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2})$. Comme $B_Y(\varphi(x_i), r + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2})$ est incluse dans $B_Y(\varphi(x_i),\alpha)$, on a $[\alpha_T]^\alpha = [e]^\alpha$. Par ailleurs, comme $[\alpha_T]^\alpha = [\gamma_{T''}.c_{T'}^{-1}]^\alpha$, on a $[\gamma_{T''}]^\alpha = [c_{T'}]^\alpha$.

Si de plus γ et c sont deux lacets homotopes, alors, pour tout r>0, $[c]^r = [\gamma]^r$ dans $\pi_1(X,x_0)/\pi_1(X,x_0)[r]$. Si $\alpha > \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2}$, posons $r = \alpha - \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{\delta}{2} > 0$: il découle du point (i) du lemme 25 que $[c_T]^\alpha = [\gamma_T]^\alpha$. □

Lemme 26. *Si $\frac{3}{2}(\delta+\varepsilon) < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$, et si c parcourt l'espace des lacets de point-base x_0, l'application $c \mapsto c_T$ (où T est une subdivision quelconque δ-admissible pour c) induit, par passage aux classes d'homotopie, un morphisme*

$$\rho\colon \pi_1(X,x_0)/\pi_1(X,x_0)[\tfrac{\varepsilon_0}{2}] \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)/\pi_1(Y,y_0)[\alpha].$$

Rappelons que

$$\pi_1(X,x_0)/\pi_1(X,x_0)[\tfrac{\varepsilon_0}{2}] \cong G(\widetilde{X},X)) \quad \text{et} \quad \pi_1(Y,y_0)/\pi_1(Y,y_0)[\alpha] \cong G(Y^\alpha,Y).$$

Preuve. D'après la proposition 15, puisque $\mathrm{sys}(X,d_X) > \varepsilon_0$, les groupes $\pi_1(X,x_0)[r]$ et $\pi_1(X,x_0)[\frac{\varepsilon_0}{2}]$ sont égaux pour tout $0 < r \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$. En particulier, si $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ et si $\alpha - \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{\delta}{2} > 0$ et si c et γ sont deux lacets tels que $[c]^{\varepsilon_0/2} = [\gamma]^{\varepsilon_0/2}$, il en découle que $[c]^{\alpha-\frac{3}{2}\varepsilon-\frac{\delta}{2}} = [\gamma]^{\alpha-\frac{3}{2}\varepsilon-\frac{\delta}{2}}$. Si T et T' sont des subdivisions δ-admissibles pour c et γ, le lemme 25 entraîne que $[c_T]^\alpha = [\gamma_{T'}]^\alpha$; l'application ρ est donc bien définie. Le fait que ρ est un morphisme découle du fait que $[e_T]^\alpha = e$ et de la propriété

de concaténation, établie quand $\alpha \geq \frac{3}{2}(\delta + \varepsilon)$ dans la preuve du lemme 25 : si $a = c.\gamma$ et si $T = T' \cup T''$, alors a_T et $c_{T'}.\gamma_{T''}$ représentent le même élément de $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$. Ceci termine la preuve du lemme 26. □

Lemme 27. *Si $\frac{3}{2}(\delta + \varepsilon) < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$, la construction de $\widetilde{\varphi}(\tilde{x})$ ne dépend pas du choix du chemin $\tilde{c}$, pourvu que celui-ci relie $\tilde{x}_0$ à $\tilde{x}$ dans $\widetilde{X}$; l'application $\widetilde{\varphi}\colon \tilde{x} \to \widetilde{\varphi}(\tilde{x})$ est donc correctement définie.*

Preuve. Si $\tilde{c}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$ et $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \widetilde{X}$ sont deux chemins continus d'origine $\tilde{x}_0$ et d'extrémité $\tilde{x}$, et si l'on note $c = p \circ \tilde{c}$ et $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, le chemin $\gamma.c^{-1}$ est un lacet de X dont un relevé est le *lacet* $\tilde{\gamma}.(\tilde{c})^{-1}$. Il s'ensuit que le lacet $\gamma.c^{-1}$ appartient à $\pi_1(X, x_0)[\frac{\varepsilon_0}{2}]$ (d'après la proposition 12). Si T est une subdivision δ-admissible pour les courbes γ et c, le lemme 26 permet d'en déduire que

$$[e]^\alpha = \rho([\gamma.c^{-1}]^{\varepsilon_0/2}) = [\gamma_T.(c_T)^{-1}]^\alpha.$$

Le lacet $\gamma_T.(c_T)^{-1}$ sur Y appartient donc à $\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$: son relevé $\gamma_T^\alpha.(c_T^\alpha)^{-1}$ est alors un lacet sur Y^α et les relevés γ_T^α et c_T^α des courbes γ_T et c_T, qui ont même origine y^α, ont même extrémité dans Y^α. Il en découle que la construction de $\widetilde{\varphi}$ ne dépend pas du chemin choisi entre $\tilde{x}_0$ à $\tilde{x}$. □

Construction de l'application $\widetilde{\psi}$. Soit $\psi\colon Y \to X$ une ε-approximation de Hausdorff «presque-inverse» de l'approximation φ (c'est-à-dire que ψ et φ vérifient le point (ii) de la définition 10). On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $\psi \circ \varphi(x_0) = \psi(y_0) = x_0$. On construit alors l'application $\widetilde{\psi}\colon Y^\alpha \to \widetilde{X}$ et le morphisme $r\colon \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, y_0)[\alpha] \to \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)[\frac{\varepsilon_0}{2}]$ comme on a construit l'application $\widetilde{\varphi}$ (en relevant cette fois-ci l'application ψ) et le morphisme ρ. Il suffit pour cela de remarquer que $\widetilde{X}$ est le $\frac{\varepsilon_0}{2}$-revêtement de X. Comme dans le lemme 23, on montre l'indépendance de la construction par rapport au choix de la subdivision T δ-admissible pour $\delta \leq \frac{\varepsilon_0}{3} - \varepsilon$, ainsi que l'indépendance par rapport au choix des courbes minimisantes entre les points $\psi \circ c(t_i)$ et $\psi \circ c(t_{i+1})$. Par ailleurs, si $\frac{\varepsilon_0}{2} > \alpha + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{\delta}{2}$ l'application

$$\begin{aligned} r\colon \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, y_0)[\alpha] &\longrightarrow \pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)\big[\tfrac{\varepsilon_0}{2}\big] \\ [c]^\alpha &\longmapsto [c_T]^{\varepsilon_0/2}, \end{aligned}$$

induite par passage aux classes d'homotopie est bien définie. En effet, si c et γ sont deux lacets de Y tels que $[c]^\alpha = [\gamma]^\alpha$, le lemme 25 implique que $[c_T]^{\varepsilon_0/2} = [\gamma_T]^{\varepsilon_0/2}$. On montre comme dans le lemme 26 que, sous ces conditions, l'application r est un morphisme. L'application $\widetilde{\psi}$ est alors bien définie dès que $\frac{\varepsilon_0}{2} > \alpha + \frac{3}{2}\varepsilon$.

Preuve des inégalités du théorème 16

Lemme 28. *Si $\frac{3}{2}\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, les applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ (bien) définies ci-dessus vérifient, pour tous les points $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ de $\widetilde{X}$ et pour tous les points $\tilde{y}$ et $\tilde{y}'$ de Y^α,*

(i) $d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{\varphi}(\tilde{x}')) \leq \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{-1} d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') + \varepsilon$;

(ii) $d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi}(\tilde{y}), \widetilde{\psi}(\tilde{y}')) \leq \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') + \varepsilon$.

Preuve. Comme $\frac{3}{2}\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$, le lemme 27 nous assure l'existence de $\widetilde{\varphi}$. De même, comme $\alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, l'application $\widetilde{\psi}$ est bien définie.

Choisissons un réel δ qui vérifie $0 < \delta < \min\left\{\frac{2}{3}\alpha - \varepsilon, \varepsilon_0 - 3\varepsilon - 2\alpha\right\}$.

Soient $\tilde{c}$ une courbe minimisante qui relie les points $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ dans $\widetilde{X}$ et $\tilde{\gamma}$ un chemin qui joint les points $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}$. Pour construire $\widetilde{\varphi}(\tilde{x}')$, comme $\frac{3}{2}(\delta + \varepsilon) < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ (par choix de δ) et $\varepsilon < \frac{2\alpha}{3}$, le lemme 27 nous permet de choisir le chemin $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma}.\tilde{c}$ comme chemin qui relie $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}'$. Si T (resp. T') est une subdivision δ-admissible pour $\tilde{\gamma}$ (resp. $\tilde{c}$) paramétrée par $[0, 1]$ (resp. $[1, 2]$), alors $T \cup T' = T_1$ est une subdivision δ-admissible pour $\tilde{\beta}$.

Posons $\delta' = \frac{2}{3}\alpha - \varepsilon$ et fixons un réel $\eta > 0$. Construisons une subdivision T'' de $[1, 2]$ (δ'-admissible pour la courbe $\tilde{c}$) de telle sorte que les points $\tilde{c}(t_i)$ (pour tous les éléments $t_i \in T'' \setminus \{2\}$ sauf le dernier) vérifient $d_{\widetilde{X}}(\tilde{c}(t_i), \tilde{c}(t_{i+1})) = \delta' - \eta$. Alors, la subdivision $T_2 = T \cup T''$ est une subdivision de $\tilde{\beta}$ qui, bien que n'étant plus δ-admissible, permet de construire une courbe $\beta^\alpha_{T_2}$ de Y^α qui a la même extrémité que $\beta^\alpha_{T_1}$ d'après le lemme 23 et le paragraphe qui le suit (car on a bien alors $\alpha \geq \frac{3}{2}(\delta' + \varepsilon)$). On a donc, puisque $\tilde{x} = \tilde{\beta}(1)$ et $\tilde{x}' = \tilde{\beta}(2)$,

$$\widetilde{\varphi}(\tilde{x}) = \gamma^\alpha_T(1) = \beta^\alpha_{T_2}(1) \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi}(\tilde{x}') = \beta^\alpha_{T_1}(2) = \beta^\alpha_{T_2}(2).$$

Ainsi,

$$d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{\varphi}(\tilde{x}')) \leq \sum_{t_i \in T'' \setminus \{2\}} d_{Y^\alpha}(\beta^\alpha_{T_2}(t_i), \beta^\alpha_{T_2}(t_{i+1})).$$

Puisque la courbe $\beta^\alpha_{T_2}$ est la courbe relevée de β_{T_2}, on a

$$\begin{aligned} d_{Y^\alpha}(\beta^\alpha_{T_2}(t_i), \beta^\alpha_{T_2}(t_{i+1})) &\leq \text{ long } (\beta^\alpha_{T_2|[t_i, t_{i+1}]}) = \text{ long } (\beta_{T_2|[t_i, t_{i+1}]}) \\ &= d_Y(\varphi \circ \beta(t_i), \varphi \circ \beta(t_{i+1})) < d_X(\beta(t_i), \beta(t_{i+1})) + \varepsilon \\ &\leq d_{\widetilde{X}}(\tilde{\beta}(t_i), \tilde{\beta}(t_{i+1})) + \varepsilon, \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant du fait que p est contractante.

Par ailleurs, comme $T'' \subset [1,2]$ et comme $\tilde{\beta}_{|[1,2]} = \tilde{c}$ est minimisante, en sommant et en faisant tendre η vers zéro, on en déduit que

$$d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{\varphi}(\tilde{x}')) \leq d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') + \left(\frac{d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}')}{\delta'} + 1\right)\varepsilon,$$

ce qui termine la preuve de la première inégalité du lemme 28.

On procède de la même manière pour la deuxième inégalité du lemme 28, en remplaçant $\widetilde{\varphi}$ par $\widetilde{\psi}$ et $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ par deux points quelconques $\tilde{y}$ et $\tilde{y}'$ de Y^α. La seule différence réside dans le fait que, pour pouvoir appliquer le lemme 23, il faut remplacer α pat $\frac{\varepsilon_0}{2}$ et δ' par $\delta'' = \frac{\varepsilon_0}{3} - \varepsilon$. On trouve ainsi

$$d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi}(\tilde{y}), \widetilde{\psi}(\tilde{y}')) \leq d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') + \left(\frac{d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}')}{\delta''} + 1\right)\varepsilon,$$

ce qui termine la preuve du lemme 28. □

Lemme 29. *Les applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ vérifient, pour tous les points $\tilde{x}$ de $\widetilde{X}$ et pour tous les points $\tilde{y}$ de Y^α,*

(i) $d_{\widetilde{X}}((\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi})(\tilde{x}), \tilde{x}) < \varepsilon$ *si* $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{10}$,

(ii) $d_{Y^\alpha}((\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi})(\tilde{y}), \tilde{y}) < \varepsilon$ *si* $\varepsilon < \frac{\alpha}{5}$.

Preuve. Soit $\tilde{c}$ une courbe qui joint $\tilde{x}_0$ et $\tilde{x}$; fixons une subdivision $T = (t_i)_{0 \leq i \leq N}$ δ-admissible pour $\tilde{c}$. Nous allons prouver par récurrence sur i que, si c_T^α est la courbe sur Y^α associée à $c = p \circ \tilde{c}$ selon le procédé décrit avant le lemme 25, alors, pour tout $t_i \in T$,

$$d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \tilde{c}(t_i)) < \varepsilon. \qquad (H_i)$$

Ceci est vrai au rang $i = 0$, puisque $\widetilde{\psi}(\tilde{y}_0) = \tilde{x}_0$ par construction.

Supposons que ce soit vrai à l'ordre i, alors

(1) $d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \tilde{c}(t_i)) < \varepsilon$ par hypothèse de récurrence,

(2) $d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \tilde{c}(t_{i+1})) < \varepsilon + \delta$ par l'inégalité triangulaire.

Par ailleurs, la courbe c_T^α est un relevé de la courbe c_T minimisante entre les points $\varphi \circ c(t_i)$ et $\varphi \circ c(t_{i+1})$, ce qui implique

$$\begin{aligned} d_{Y^\alpha}(c_T^\alpha(t_i), c_T^\alpha(t_{i+1})) &\leq \text{ long } (c^\alpha_{T|[t_i,t_{i+1}]}) = \text{ long } (c_{T|[t_i,t_{i+1}]}) \\ &= d_Y(\varphi \circ c(t_i), \varphi \circ c(t_{i+1})) < \delta + \varepsilon. \end{aligned}$$

En utilisant la deuxième inégalité du lemme 28, nous en déduisons l'inégalité

(3) $d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i), \widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_{i+1})) < \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon \leq \frac{10}{7}(\delta + \varepsilon) + \varepsilon$,

la dernière ligne étant valable parce que $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{10}$.

Si l'on choisit δ tel que $\frac{10}{7}(\delta+\varepsilon)+\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{4}$, les membres de droite des inégalités (2) et (3) sont majorés par $\frac{\varepsilon_0}{4}$. Comme $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ est isomorphe au $\frac{\varepsilon_0}{2}$-revêtement $(X^{\varepsilon_0/2}, d_{X^{\varepsilon_0/2}})$ de X, le point (i) de la propriété 13 implique que les points $\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_{i+1})$ et $\tilde{c}(t_{i+1})$ sont les uniques relevés de $\psi \circ \varphi[c(t_{i+1})]$ et de $c(t_{i+1})$ dans la boule de $\widetilde{X}$ de centre $\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_i)$ et de rayon $\frac{\varepsilon_0}{4}$. Comme, d'après le point (ii) de la propriété 13, l'application p est une isométrie en restriction à cette boule, on a

$$d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ c_T^\alpha(t_{i+1}), \tilde{c}(t_{i+1})) = d_X(\psi \circ \varphi(c(t_{i+1})), c(t_{i+1})) < \varepsilon,$$

ce qui prouve l'inégalité (H_i) pour tout i. En l'appliquant pour $t_i = 1$, on obtient $d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \tilde{x}) < \varepsilon$. Ceci termine la preuve de la première inégalité du lemme 29.

Montrons la deuxième inégalité : soit c^α une courbe qui joint y^α et $\tilde{y}$ dans Y^α ; fixons une subdivision $T = (t_i)_{0 \le i \le N}$ (δ-admissible) pour c^α et construisons la courbe c_T de X et son relevé $\tilde{c}_T$ sur $\widetilde{X}$ associées à la courbe $c = p_\alpha \circ c^\alpha$. On prouve par récurrence que, pour tout $t_i \in T$,

$$d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi} \circ \tilde{c}_T(t_i), c^\alpha(t_i)) < \varepsilon. \qquad (H_i')$$

La preuve est identique à celle que nous venons de faire, à condition d'y remplacer $\widetilde{\psi}$ par $\widetilde{\varphi}$, c_T^α par $\tilde{c}_T$ et $\frac{\varepsilon_0}{2}$ par α. On obtient ainsi que, si $\varepsilon < \frac{\alpha}{5}$, alors $d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\psi}(\tilde{y}), \tilde{y}) < \varepsilon$. □

Lemme 30. *Si $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, les applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ définies ci-dessus vérifient, pour tous les points $\tilde{x}$ et $\tilde{x}'$ de $\widetilde{X}$ et pour tous les points $\tilde{y}$ et $\tilde{y}'$ de Y^α,*

$$\left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\left[d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') - 3\varepsilon\right] \le d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{\varphi}(\tilde{x}'))$$

et

$$\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\left[d_{Y^\alpha}(\tilde{y}, \tilde{y}') - 3\varepsilon\right] \le d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi}(\tilde{y}), \widetilde{\psi}(\tilde{y}')).$$

Preuve. Remarquons que l'hypothèse $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ implique que $\varepsilon < \frac{\alpha}{5}$, que $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{10}$ et que $\frac{3}{2}\varepsilon < \alpha$, d'où la validité des lemmes 23 à 29 pour une valeur suffisamment petite de δ. En appliquant l'inégalité triangulaire et le lemme 29, puis le lemme 28, nous obtenons

$$\begin{aligned} d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}') &\le d_{\widetilde{X}}(\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}(\tilde{x}')) + 2\varepsilon \\ &\le \left(1 - 3\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{\varphi}(\tilde{x}')) + 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui donne la première inégalité du lemme 30.

La deuxième inégalité se montre exactement de la même manière. □

Le morphisme ρ est un isomorphisme

Lemme 31. *Si $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, le morphisme ρ défini dans le lemme 26 est un isomorphisme dont l'inverse est le morphisme r défini dans la section «Construction de l'application $\widetilde{\psi}$».*

Preuve. Rappelons tout d'abord que $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ est isomorphe à $(X^{\varepsilon_0/2}, d_{X^{\varepsilon_0/2}})$. Notons $[c]$ la classe d'un lacet c sur X dans le groupe $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)[\frac{\varepsilon_0}{2}]$, $\tilde{c}$ le relevé de ce lacet à $\widetilde{X}$ d'origine $\tilde{x}_0$ et $[\gamma]^\alpha$ la classe d'un lacet γ sur Y dans le groupe $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$ et γ^α le relvé de ce lacet à Y^α d'origine y^α. L'action de $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)[\frac{\varepsilon_0}{2}]$ (respectivement de $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$) sur $\widetilde{X}$ (resp. sur Y^α) étant définie par $[c].\tilde{x}_0 = \tilde{c}(1)$ (resp. $[\gamma]^\alpha.y^\alpha = \gamma^\alpha(1)$), on a, pour tout lacet c (resp. γ) de point-base x_0 sur $\widetilde{X}$ (resp. de point-base y_0 sur Y^α),

(4) $r([\gamma]^\alpha).\tilde{x}_0 = [\gamma_{T'}].\tilde{x}_0 = \tilde{\gamma}_{T'}(1) = \widetilde{\psi}(\gamma^\alpha(1)) = \widetilde{\psi}([\gamma]^\alpha.y^\alpha)$,

(5) $\rho([c]).y^\alpha = [c_T]^\alpha.y^\alpha = c_T^\alpha(1) = \widetilde{\varphi}(\tilde{c}(1)) = \widetilde{\varphi}([c].\tilde{x}_0)$,

où T (resp. T') est une subdivision δ-admissible de c (resp. de γ) et où δ est choisi suffisamment petit pour que, sous l'hypothèse $5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$, toutes les hypothèses des lemmes 23 à 29 soient vérifiées. On obtient ainsi

$$(r \circ \rho([c])).\tilde{x}_0 = \widetilde{\psi}[\rho([c]).y^\alpha] = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}([c].\tilde{x}_0).$$

En appliquant le lemme 29, il s'ensuit que

$$d_{\widetilde{X}}\big([r \circ \rho([c])].\tilde{x}_0, [c].\tilde{x}_0\big) < \varepsilon.$$

Les points $r \circ \rho([c]).\tilde{x}_0$ et $[c].\tilde{x}_0$ sont donc deux éléments de $p^{-1}(x_0)$ situés à une distance inférieure à ε et, si $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$, ils sont confondus d'après le point (i) de la propriété 13. Ainsi, comme l'action de $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)[\frac{\varepsilon_0}{2}]$ sur $\widetilde{X}$ est sans point fixe, on a $r \circ \rho = \mathrm{id}$.

On prouve de même que $\rho \circ r = \mathrm{id}$, donc que ρ et r sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. □

Equivariance des applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$. L'action de $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)[\frac{\varepsilon_0}{2}]$ décrite dans la preuve du lemme 31 explicite l'isomorphisme $\Phi_{\tilde{x}_0}$ entre ce groupe et le groupe $G(\widetilde{X}, X)$ des automorphismes de revêtement ; $\Phi_{\tilde{x}_0}([c])$ est défini comme l'unique élément de $G(\widetilde{X}, X)$ qui envoie $\tilde{x}_0$ sur $\tilde{c}(1)$ où $\tilde{c}$ est le relvé de c d'origine $\tilde{x}_0$. Bien que $\Phi_{\tilde{x}_0}$ dépende du choix de $\tilde{x}_0$ dans la fibre au-dessus de x_0, nous adopterons, par commodité, la notation $[c].\tilde{x}$ pour $\Phi_{\tilde{x}_0}([c]).\tilde{x}$. La même remarque vaut pour l'isomorphisme entre $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$ et $G(Y^\alpha, Y)$. Moyennant cet abus de langage, on peut énoncer le lemme suivant :

Lemme 32. *Pour tous les points $\tilde{x}$ de $\widetilde{X}$ et $\tilde{y}$ de Y^α, pour tous les éléments $[\gamma]$ de $\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)[\frac{\varepsilon_0}{2}]$ et tous les éléments $[\beta]^\alpha$ de $\pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$, on a*

$$\widetilde{\varphi}([\gamma].\tilde{x}) = \rho([\gamma]).\widetilde{\varphi}(\tilde{x})$$

$$\widetilde{\psi}([\beta]^\alpha.\tilde{y}) = r([\beta]^\alpha).\tilde{\beta}(\tilde{y}).$$

Preuve. Ce lemme a déjà été prouvé dans le cas où $\tilde{x} = \tilde{x}_0$ et $\tilde{y} = y^\alpha$, puisque nous avons déjà vu que $[c]^\alpha.y^\alpha$ est l'extrémité du relevé c^α de c d'origine y^α. Si $\tilde{y}$ est un point quelconque de Y^α, choisissons une courbe b^α qui joint y^α à $\tilde{y}$ et notons $\bar{b}$ la courbe relevée de $b = p_\alpha \circ b^\alpha$ en partant de l'origine $[c]^\alpha.y^\alpha = c^\alpha(1)$. On a alors,

(6) $[c]^\alpha.\tilde{y} =$ extrémité de $\bar{b}$

$=$ extrémité du relevé $c^\alpha.\bar{b}$ (dans Y^α) de la courbe $c.b$ d'origine y^α.

En effet, la courbe $t \to [c]^\alpha.b^\alpha(t)$ est un relevé de b de même origine que $\bar{b}$; elle coïncide donc avec $\bar{b}$ et, comme $\tilde{p} \to X$ est galoisien,

$$\text{extrémité de } \bar{b} = [c]^\alpha.(\text{extrémité de } b^\alpha) = [c]^\alpha.\tilde{y}.$$

Choisissons des subdivisions δ-admissibles (pour δ assez petit) T et T' de c et b respectivement et notons $T = T' \cup T''$ la subdivision concaténée de $(c.b)$. Rappelons que

(7) $[c_{T'}] = r([c]^\alpha)$,

(8) $\widetilde{\psi}(\tilde{y}) = \widetilde{\psi}(b^\alpha(1)) =$ extrémité du relevé $\tilde{b}_{T''}$ de $b_{T''}$ d'origine $\tilde{x}_0$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}([c]^\alpha.\tilde{y}) &= \widetilde{\psi}(\text{extrémité de } c^\alpha.\bar{b}) \\
&= \text{extrémité du relevé } (c.\widetilde{b})_T \text{ de } (c.b)_T \text{ d'origine } \tilde{x}_0 \\
&= \text{extrémité du relevé de } c_{T'}.b_{T''} \text{ d'origine } \tilde{x}_0 \\
&= [c_{T'}].(\text{extrémité du relevé } \tilde{b}_{T''} \text{ de } b_{T''} \text{ d'origine } \tilde{x}_0) \\
&= [c_{T'}].\widetilde{\psi}(\tilde{y}) \\
&= r([c]^\alpha).\widetilde{\psi}(\tilde{y}),
\end{aligned}$$

où la première et la quatrième égalité découlent de (6), la seconde et la cinquième de la définition de $\widetilde{\psi}$ (voir (8)), la troisième de la construction de $(c.b)_T$ à partir de $c.b$ qui donne $(c.b)_T = c_{T'}.b_{T''}$ (ce choix étant rendu possible par le lemme 23) et la sixième des égalités (7) et (8).

Ceci prouve l'équivariance de $\widetilde{\psi}$ par rapport à la représentation r ; l'équivariance de $\widetilde{\varphi}$ par rapport à ρ se prouve de la même manière. □

3.2. Convergence des revêtements universels et complétude. Dans cette partie, nous montrons le résultat suivant :

Proposition 33. *Tout ensemble de classes d'isométrie d'espaces de longueur compacts qui admettent un revêtement universel et dont la systole est uniformément minorée est complet pour la distance de Gromov–Hausdorff.*

Comme l'ensemble des classes d'isométrie des espaces de longueur compacts est complet pour la distance de Gromov–Hausdorff (voir [Gr], proposition 3.8), la proposition 33 découle de la proposition suivante :

Proposition 34. *Soit $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de longueur qui possèdent un revêtement universel et dont la systole est uniformément minorée par ε_0. Si $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la distance de Gromov–Hausdorff, alors elle converge au sens de Gromov–Hausdorff vers un espace métrique de longueur compact (Y, d_Y) qui a les propriétés suivantes :*

(i) *(Y, d_Y) admet un revêtement universel, noté $(\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}})$;*

(ii) *le revêtement $Y^\alpha \to Y$ est isomorphe au revêtement $\widetilde{Y} \to Y$ pour tout réel α tel que $0 < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ (donc la systole de (Y, d_Y) est supérieure à ε_0) ;*

(iii) *$(\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}})$ est la limite pour la topologie Gromov équivariante (au sens de la définition de* [Fu]*) de la suite des revêtements universels $((\widetilde{X}_n, d_{\widetilde{X}_n}))_{n\in\mathbb{N}}$.*

Remarquons que le revêtement universel de (Y, d_Y) n'est pas nécessairement simplement connexe, même si les revêtements universels de tous les espaces X_n le sont (voir l'exemple 3.76 de [Re]).

Preuve de la proposition 34. D'après le théorème 11 de C. Sormani et G. Wei, pour montrer le point (i), il suffit de vérifier que, pour tous les réels α et α' tels que $0 < \alpha' < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$, les revêtements $p_\alpha : Y^\alpha \to Y$ et $p_{\alpha'} : Y^{\alpha'} \to Y$ sont isomorphes. Comme $\alpha' > \alpha$, on a clairement un revêtement $\pi : Y^{\alpha'} \to Y^\alpha$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y^{\alpha'} \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y^\alpha \arrow[dl] \\ & Y. & \end{tikzcd}$$

Nous allons vérifier que π est un isomorphisme de revêtement.

Soit $\varepsilon > 0$ un réel tel que $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ et $5\varepsilon < \alpha' < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ et soit n un entier suffisamment grand pour que $d_{\mathrm{GH}}((X_n, d_n), (Y, d_Y)) < \varepsilon$. On applique le théorème 16 au revêtement $p_\alpha : Y^\alpha \to Y$ puis au revêtement $p_{\alpha'} : Y^{\alpha'} \to Y$. Or,

dans la preuve du lemme 26, on montre qu'il existe un point x_n de X_n et un point y_0 de Y tels que l'application

$$\begin{aligned} r_n\colon \pi_1(Y, y_0) &\longrightarrow \pi_1(X_n, x_n)/\pi_1(X_n, x_n)\big[\tfrac{\varepsilon_0}{2}\big] \\ [c] &\longmapsto [c_T] \end{aligned}$$

soit un morphisme dont le noyau contient $\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$ et $\pi_1(Y, y_0)[\alpha']$.

Il s'ensuit que le morphisme r_n passe au quotient en deux morphismes

$$\begin{aligned} r_n^{\alpha}\colon \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, y_0)[\alpha] &\longrightarrow \pi_1(X_n, x_n)/\pi_1(X_n, x_n)\big[\tfrac{\varepsilon_0}{2}\big] \\ r_n^{\alpha'}\colon \pi_1(Y, y_0)/\pi_1(Y, y_0)[\alpha'] &\longrightarrow \pi_1(X_n, x_n)/\pi_1(X_n, x_n)\big[\tfrac{\varepsilon_0}{2}\big]. \end{aligned}$$

Le lemme 31 prouve que ces deux morphismes sont deux isomorphismes ; il en découle que les groupes $\pi_1(Y, y_0)[\alpha]$, $\operatorname{Ker} r_n$ et $\pi_1(Y, y_0)[\alpha']$ sont égaux. Le corollaire IX.3.6 de [Go] permet d'en déduire que $\pi\colon Y^{\alpha'} \to Y^{\alpha}$ est un isomorphisme de revêtement. Les revêtements $p_\alpha\colon Y^\alpha \to Y$ et $p_{\alpha'}\colon Y^{\alpha'} \to Y$ sont donc isomorphes pour tous les réels $0 < \alpha' < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Le théorème 12 de [SW] implique que l'espace Y admet un revêtement universel (ce qui termine la preuve du point (i)) et que ce revêtement universel est isomorphe à $p_\alpha\colon Y^\alpha \to Y$ pour tout $\alpha \in]0, \frac{\varepsilon_0}{2}[$ (ce qui termine la preuve du point (ii)).

Pour vérifier le point (iii), il suffit de remarquer que, si $0 < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2}$ et $0 < 5\varepsilon < \alpha < \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ et si n est suffisamment grand pour que $d_{\mathrm{GH}}((X_n, d_n), (Y, d_Y)) < \varepsilon$, les applications $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ construites dans le théorème 16 sont des $\big[\frac{3R}{2\alpha - 3\varepsilon} + 2\big]\varepsilon$-approximations de Gromov–Hausdorff entre les boules de rayon R des espaces $\widetilde{X}$ et $Y^\alpha = \widetilde{Y}$, respectivement ρ-équivariante et $(\rho)^{-1}$-équivariante. □

3.3. Continuité uniforme du spectre des longueurs et isospectralité. Soit (X, d) un espace de longueur compact semi-localement simplement connexe. Notons $\sim$ la relation d'équivalence sur $G(\widetilde{X}, X)$ définie par $\gamma \sim \gamma'$ si et seulement s'il existe $g \in G(\widetilde{X}, X)$ tel que $\gamma = g^{-1}\gamma' g$.

L'application $l_X : \gamma \to \inf_{\tilde{x} \in \widetilde{X}} d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x})$ étant constante sur les classes de conjugaison de la relation $\sim$, le *spectre marqué des longueurs* est l'ensemble des valeurs prises, *avec multiplicité*, par l'application $\bar{l}_X\colon G(\widetilde{X}, X)/\sim \to \mathbb{R}^+$ obtenue par passage au quotient de l'application l_X. Le *spectre non marqué* des longueurs est l'ensemble des valeurs prises par $\bar{l}_X$, *sans multiplicité*.

Corollaire 35. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces de longueur dont la systole est minorée par ε_0 et tels que $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$.*

Soit $(\rho, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$ un triplet vérifiant les propriétés du théorème 16 et $\bar{\rho}$ la bijection induite par ρ entre les ensembles de classes de conjugaison $G(\widetilde{X}, X)/\sim$ et

$G(\widetilde{Y}, Y)/\sim$. Alors, pour tout élément γ de $G(\widetilde{X}, X)/\sim$,

$$\left(1-\frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\left(\bar{l}_X(\gamma)-\varepsilon\right) \leq \bar{l}_Y(\bar{\rho}(\gamma)) \leq \left(1-\frac{4\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \bar{l}_X(\gamma)+\varepsilon.$$

Preuve. Soit g un élément de $G(\widetilde{X}, X)$, montrons que

$$\left(1-\frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)(l_X(g)-\varepsilon) \leq l_Y(\rho(g)) \leq \left(1-\frac{4\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} l_X(g)+\varepsilon.$$

D'après le théorème 16 (remarque 17), comme $\widetilde{\varphi}$ est ρ-équivariante, en faisant tendre α vers $\frac{\varepsilon_0}{2}-\frac{3}{2}\varepsilon$, on obtient :

$$\begin{aligned} d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, g(\tilde{x})) &\geq \left(1-\frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0-3\varepsilon}\right)\left(d_{\widetilde{Y}}[\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{\varphi}(g(\tilde{x}))]-\varepsilon\right) \\ &\geq \left(1-\frac{4\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\left(d_{\widetilde{Y}}[\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \rho(g).\widetilde{\varphi}(\tilde{x})]-\varepsilon\right). \end{aligned}$$

En prenant la borne inférieure en $\tilde{x}$, nous obtenons

$$l_X(g) \geq \left(1-\frac{4\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)(l_Y(\rho(g))-\varepsilon).$$

La minoration dans la double-inégalité du corollaire 35 se démontre de la même manière en utilisant l'inégalité suivante :

$$d_{\widetilde{Y}}(\tilde{y}, g(\tilde{y})) \geq \left(1-\frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\left(d_{\widetilde{X}}[\widetilde{\psi}(\tilde{y}), \widetilde{\psi}(g(\tilde{y}))]-\varepsilon\right). \qquad \square$$

Corollaire 36. (i) *L'ensemble des classes d'isométrie des espaces métriques de longueur compacts isospectraux pour le spectre des longueurs (marqué ou non-marqué) est un sous-ensemble complet de l'ensemble des espaces de longueur compacts muni de la distance de Gromov–Hausdorff.*

(ii) *Tout ensemble de classes d'isométrie de variétés riemanniennes compactes isospectrales (pour le spectre du laplacien) de courbure sectionnelle strictement négative est d'adhérence compacte dans l'ensemble des espaces de longueur compacts isospectraux à ces variétés (pour le spectre non marqué des longueurs) muni de la distance de Gromov–Hausdorff.*

Preuve. Considérons une suite de Cauchy $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces de longueur compacts isospectraux. Comme la systole s_0 est donnée par le spectre non marqué des longueurs, la proposition 34 implique que l'espace-limite de longueur (X, d) possède un revêtement universel et que sa systole est minorée par s_0. Le point (i) découle alors du corollaire 35.

Le point (ii) provient du résultat de Y. Colin de Verdière (voir le corollaire de [CV]) qui assure que, sous les hypothèses du point (ii), deux variétés isospectrales ont même spectre des longueurs non marqué (donc même systole L) et même volume. Comme les variétés considérées sont de courbure strictement négative, sur toute variété de la famille considérée, les boules de rayon $L/2$ sont de volume uniformément minoré et la proposition 5.2 de [Gr] assure que la famille est précompacte pour la distance de Gromov–Hausdorff. Le point (i) implique finalement que l'adhérence de la famille est incluse dans l'ensemble des espaces de longueur compacts isospectraux aux variétés considérées (pour le spectre des longueurs non marqué). □

4. Ensembles d'espaces de longueur d'entropie majorée

Si (Y, d_Y) est un espace de longueur connexe par arcs, complet et localement compact et si μ_Y est une mesure borélienne sur Y, on définit son entropie volumique par rapport à la mesure μ_Y de la manière suivante :

$$\mathrm{Ent}(Y, d_Y, \mu_Y) = \liminf_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \log[\mu_Y(B(y, R))].$$

Si (X, d_X) est un espace de longueur compact qui possède un revêtement universel $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$, l'entropie de (X, d_X) est par définition l'entropie volumique de $(\widetilde{X}, d_{\widetilde{X}})$ muni de la mesure de comptage sur l'orbite d'un point sous l'action du groupe $G(\widetilde{X}, X)$.

4.1. Continuité uniforme de l'entropie.

Théorème 37. *Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces de longueur compacts qui admettent un revêtement universel. Si la systole de (X, d_X) est minorée par $\varepsilon_0 > 0$ et si $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (Y, d_Y)) = \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$, alors*

(i) *Pour tout $\alpha \in]5\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon[$,*

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right) \mathrm{Ent}(X, d_X) \le \mathrm{Ent}(Y^\alpha, d_{Y^\alpha}, \mu_{Y^\alpha}) \le \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \mathrm{Ent}(X, d_X),$$

où μ_{Y^α} est la mesure de comptage de l'orbite d'un point sous l'action de $G(Y^\alpha, Y)$ sur Y^α.

(ii) $\mathrm{Ent}(Y, d_Y) \ge \left(1 - \frac{4\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \mathrm{Ent}(X, d_X)$.

(iii) *Si, de plus,* $\mathrm{sys}(Y, d_Y) \ge \varepsilon_0$, *alors*

$$\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \mathrm{Ent}(X, d_X) \le \mathrm{Ent}(Y, d_Y) \le \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \mathrm{Ent}(X, d_X).$$

Preuve. Si $(\rho, \widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi})$ est un triplet vérifiant les conclusions du théorème 16, tout élément γ de $G(\widetilde{X}, X)$ vérifie

$$d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \rho^{-1}(\gamma)(\tilde{x})) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1} \left[d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{\varphi}(\rho^{-1}(\gamma)(\tilde{x}))) + 3\varepsilon\right].$$

Il en découle que, pour tout $R > 0$,

$$\frac{\log N_{\widetilde{\varphi}(\tilde{x})}[Y^\alpha, R]}{R} \leq \frac{\log N_{\tilde{x}}\left[\widetilde{X}, (R + 3\varepsilon)\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}\right]}{(R + 3\varepsilon)\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}} \frac{(R + 3\varepsilon)\left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1}}{R}.$$

En passant à la limite inférieure quand R tend vers $+\infty$, on obtient l'inégalité de droite du point (i).

On montre que $\mathrm{Ent}(X, d_X) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right)^{-1} \mathrm{Ent}(Y^\alpha, d_{Y^\alpha}, \mu_{Y^\alpha})$ de la même manière, à partir de l'inégalité :

$$d_{Y^\alpha}(\widetilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{\varphi}(\gamma.\tilde{x})) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha}\right)^{-1} d_{\widetilde{X}}(\tilde{x}, \gamma.\tilde{x}) + \varepsilon.$$

Le point (ii) découle du point (i). En effet, $(\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}}) \xrightarrow{\pi_\alpha} (Y^\alpha, d_{Y^\alpha}) \xrightarrow{p_\alpha} (Y, d_Y)$ est une chaîne de revêtements et notons que, si $y^\alpha = \pi_\alpha(\tilde{y})$, alors π_α envoie $B_{\widetilde{Y}}(\tilde{y}, R)$ (resp. $G(\widetilde{Y}, Y).\tilde{y} = (p_\alpha \circ \pi_\alpha)^{-1}(y)$) surjectivement sur $B_{Y^\alpha}(y^\alpha, R)$ (resp. sur $G(Y^\alpha, Y).y^\alpha = p_\alpha^{-1}(y)$). Ceci implique que $\mathrm{Ent}(Y^\alpha, d_{Y^\alpha}, \mu_{Y^\alpha}) \leq \mathrm{Ent}(\widetilde{Y}, d_{\widetilde{Y}}, \mu_{\widetilde{Y}}) = \mathrm{Ent}(Y, d_Y)$. L'inégalité de (ii) se déduit alors en faisant tendre α vers $\frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon$ dans (i).

Si l'on suppose de plus que $\mathrm{sys}(Y, d_Y) > \varepsilon_0$, pour tout α vérifiant l'hypothèse du point (i), Y^α est le revêtement universel de Y. Comme nous l'avons remarqué au début de cette section, on a alors $\mathrm{Ent}(Y, d_Y) = \mathrm{Ent}(Y^\alpha, d_{Y^\alpha}, \mu_\alpha)$. L'inégalité de droite du point (iii) découle donc directement du point (i). Comme dans ce cas les rôles des espaces X et Y sont symétriques, l'inégalité de gauche s'obtient à partir de l'inégalité de droite. □

La continuité uniforme de l'entropie sous l'hypothèse de minoration de la systole (théorème 37) associée au résultat de complétude sur la famille des espaces de longueur dont la systole est minorée (voir le théorème 33) implique la proposition suivante :

Proposition 38. *Si une suite* $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *d'espaces de longueur qui possèdent un revêtement universel et dont la systole est uniformément minorée converge vers un espace de longueur* (Y, d_Y) *au sens de Gromov–Hausdorff, alors* (Y, d_Y) *possède un revêtement universel et la suite* $(\mathrm{Ent}(X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\mathrm{Ent}(Y, d_Y)$.

Notons que, contrairement au théorème 37, nous ne faisons ici aucune hypothèse sur l'espace Y.

4.2. Complétude de familles d'espaces de longueur d'entropie majorée . Dans cette partie, nous appliquons les résultats précédents à la famille $\mathcal{M}_{N,H,D}$ définie p. 817. En effet, rappelons qu'il est montré dans [BCG1] (voir le théorème 2.1) que, sur la famille $\mathcal{M}_{N,H,D}$, la systole est uniformément minorée par $\varepsilon_0 = \frac{1}{N.H}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2NHD}}\right)$. Les résultats précédents peuvent donc s'interpréter de la manière suivante :

Théorème 39. *L'espace métrique $(\mathcal{M}_{N,H,D}, d_{\mathrm{GH}})$ est complet.*

De plus, il existe une constante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N, H, D)$ explicite telle que, sur les boules de rayon $\frac{\varepsilon_0}{13}$, le groupe des transformations du revêtement universel est constant et l'entropie volumique est $\frac{4H}{\varepsilon_0}$-lipschitzienne.

Preuve. Posons $\varepsilon_0 = \frac{1}{N.H}\log\left(\frac{1}{1-e^{-2NHD}}\right)$.

Considérons une suite $((X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{N,H,D}$ qui converge vers un espace métrique (Y, d_Y) au sens de Gromov–Hausdorff. D'après le théorème 3.8 de [Gr], l'espace (Y, d_Y) est un espace de longueur compact. De plus, la suite $(\mathrm{diam}(X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{diam}(Y, d_Y)$, qui est donc également majoré par D.

La systole de chaque espace (X_n, d_n) étant minorée par ε_0, la proposition 34 implique que Y admet un revêtement universel et que sa systole est minorée par ε_0. Le théorème 16 implique alors que, si n est suffisamment grand, le groupe $G(\widetilde{X}_n, X_n)$ est isomorphe à $G(\widetilde{Y}, Y)$. Le groupe $G(\widetilde{Y}, Y)$ est ainsi de centre réduit à zéro et possède la propriété $\mathrm{FSG}(N)$. Finalement, la proposition 38 implique que $\mathrm{Ent}(Y, d_Y)$ est la limite de la suite $(\mathrm{Ent}(X_n, d_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et est ainsi inférieure à H. L'espace-limite (Y, d_Y) appartient donc à la famille $\mathcal{M}_{N,H,D}$, qui est complète pour la distance de Gromov–Hausdorff. □

Notation : $\mathcal{M}_{m,N,H,D,V,L}$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{N,H,D}$ constitué des classes d'isométries des variétés riemanniennes compactes de dimension m, dont le volume est majoré par V et dont le revêtement universel ne possède pas de lacets géodésiques de longueur inférieure à L (cette dernière condition est une condition vide dès que la courbure sectionnelle est négative).

Il est montré dans la proposition 4.1 de [BCG1] que la famille $\mathcal{M}_{m,N,H,D,V,L}$ est précompacte pour la distance de Gromov–Hausdorff. Il découle donc du théorème 39 le corollaire suivant :

Corollaire 40. *L'adhérence de l'ensemble $\mathcal{M}_{m,N,H,D,V,L}$ est compacte dans $\mathcal{M}_{N,H,D}$ muni de la distance de Gromov–Hausdorff.*

Un problème ouvert est de caractériser les espaces métriques de longueur qui sont dans le bord de cet ensemble.

4.3. Obstructions à ce que la courbure soit arbitrairement petite. Dans les années '80, M. Gromov posait la question suivante : «Existe-t-il des obstructions topologiques ou géométriques au fait qu'une variété M de dimension n admette une métrique riemannienne dont la norme $L^{n/2}$ de la courbure soit arbitrairement petite (i.e au fait que $\inf_g \int_M |\text{courbure}(g)|^{n/2} dv_g = 0$, où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes). Dans la version faible de cette conjecture, la courbure invoquée est la courbure sectionnelle et les formules de Allendoerfer–Chern–Weil pour les classes caractéristiques montrent qu'une obstruction est que $\chi(M^n) = 0$. La question de M. Gromov concerne alors les dimensions impaires. Dans la version forte, la notion de courbure invoquée est la courbure scalaire (et la question reste alors ouverte en toute dimension $n \geq 3$), mais la même question est également ouverte lorsque la notion de courbure invoquée est la courbure de Ricci. Une réponse a été donnée par C. Lebrun pour certaines variétés de dimension 4, l'obstruction étant exprimée en terme d'invariants de Seiberg–Witten.

Proposition 41. *Soit (X, d_X) un espace de longueur compact fixé qui admet un revêtement universel et dont la systole est minorée par ε_0.*

(i) *Si $G(\widetilde{X}, X)$ est infini, parmi toutes les variétés riemanniennes compactes, connexes, de dimension m (Y, g) qui vérifient $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (Y, d_g)) = \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$, il n'en existe aucune telle que*

$$\mathrm{Ricci}(Y, g) > -(m-1)\left[\frac{\mathrm{Ent}(X, d_X)}{(m-1)}\left(1 - \frac{4\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\right]^2 g.$$

(ii) *Pour tout réel ε', il existe une constante (explicite) $C = C(m, \varepsilon', X)$ telle que, parmi toutes les variétés riemanniennes (Y, g) compactes, connexes, m-dimensionnelles qui vérifient $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (Y, d_g)) = \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{26}$, il n'en existe aucune telle que*

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(Y, g_Y)}\left(\int_Y r_-(y)^{\frac{(m+\varepsilon')}{2}} dv_g(y)\right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}} < \left(1 - \frac{13\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) C(m, \varepsilon', X)\,\mathrm{Ent}(X, d_X).$$

où $r(x)$ est la plus petite valeur propre du tenseur de courbure de Ricci sur l'espace tangent $T_x(Y)$ et où $r_-(x) = \max(0, -r(x))$ est sa partie négative.

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe une variété riemannienne (Y, g) vérifiant simultanément $d_{\mathrm{GH}}((X, d_X), (Y, d_g)) = \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$ et

$$\mathrm{Ricci}(Y, g) > -(m-1)\left[\frac{\mathrm{Ent}(X, d_X)}{(m-1)}\left(1 - \frac{4\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\right]^2 g.$$

Le point (ii) du théorème 37 implique que

$$\mathrm{Ent}(Y,g) = \mathrm{Ent}(Y,d_g) \geq \left(1 - \frac{4\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\mathrm{Ent}(X,d_X).$$

Si $\mathrm{Ent}(X,d_X) > 0$, ceci entre en contradiction avec le théorème de R. L. Bishop qui donne

$$\mathrm{Ent}(Y,g) < \left(1 - \frac{4\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)\mathrm{Ent}(X,d_X).$$

Si $\mathrm{Ent}(X,d_X) = 0$, notre hypothèse implique que $\mathrm{Ricci}(Y,g) > 0$ et, comme Y est compacte, le théorème de Myers implique que $\pi_1(Y)$ est fini. Il en découle que $G(Y^\alpha, Y)$ (pour $\alpha \in]5\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon[$) est fini, donc $G(\widetilde{X}, X)$ est fini d'après le théorème 16. Ceci termine la preuve du point (i).

Posons $\alpha_0 = \frac{3\varepsilon_0}{13}$: α_0 appartient alors à $]5\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon[$ et le point (i) du théorème 37 implique que $\mathrm{Ent}(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, \mu_{Y^{\alpha_0}}) > \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha_0}\right)\mathrm{Ent}(X,d_X)$.

Fixons un réel $\varepsilon' > 0$. Le point (ii) du théorème 1 de [Ga] (en posant $H = \{x\}$ et $s = 0$) donne l'existence d'une constante (explicite) $C' = C'(m,\varepsilon')$ telle que, pour tout point y de Y^{α_0},

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ent}(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, dv_{g_{\alpha_0}}) \\
&\quad \leq C' \limsup_{R\longrightarrow+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(B(y,R))}\int_{B(y,R)} r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}}\, dv_{g^{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}},
\end{aligned}$$

où g^{α_0} désigne la métrique riemannienne relevée de g sur Y^{α_0} et où $d_{Y^{\alpha_0}}$ et $dv_{g^{\alpha_0}}$ désignent la distance et la mesure associées.

Notons $\mathcal{D}_x = \{y \in Y^{\alpha_0} \mid \forall \gamma \in G(Y^{\alpha_0}, Y) \setminus \{\mathrm{id}\},\ d_{Y^{\alpha_0}}(x,y) < d_{Y^{\alpha_0}}(\gamma.x, y)\}$ le domaine de Dirichlet pour l'action de $G(Y^{\alpha_0}, Y)$ pointé en x, $\bar{\mathcal{D}}_y$ son adhérence et $\Sigma_R(x)$ le sous-ensemble de $G(Y^{\alpha_0}, Y)$ défini par

$$\Sigma_R(x) = \{\gamma \in G(Y^{\alpha_0}, Y), d_{Y^{\alpha_0}}(x, \gamma.x) < R\}.$$

Si $D = \mathrm{diam}(X, d_X)$, comme $d_{\mathrm{GH}}((X,d_X),(Y,d_Y)) < \varepsilon$, pour tout point y de Y^{α_0} on a $\mathrm{diam}\,\mathcal{D}_y = \mathrm{diam}(Y,d_Y) < D + \varepsilon$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ent}(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, dv_{g_{\alpha_0}}) \\
&\quad \leq C' \limsup_{R\to+\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(B(y,R))} \sum_{\gamma\in\Sigma_{R+D+\varepsilon}(y)} \int_{\bar{\mathcal{D}}_{\gamma.y}} r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}}\, dv_{g_{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}} \\
&\quad \leq C' \limsup_{R\to+\infty} \left(\frac{N_y(R+D+\varepsilon)}{\mathrm{Vol}(B(y,R))}\int_Y r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}}\, dv_g\right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}} \\
&\quad \leq C' \limsup_{R\to+\infty} \left(\frac{N_y(R+D+\varepsilon)}{N_y(R-D-\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}} \left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(Y,g)}\int_Y r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}}\, dv_g\right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}},
\end{aligned}$$

la première inégalité provenant du fait que la boule $B(y, R)$ est incluse dans la réunion $\bigcup_{\gamma\in\Sigma_{R+D+\varepsilon}(y)} \bar{\mathcal{D}}_{\gamma.y}$; la deuxième inégalité provenant du fait que le bord d'un domaine de Dirichlet est de mesure nulle pour la mesure riemannienne et que la projection de revêtement est une isométrie de chaque domaine de Dirichlet sur son image ; la dernière inégalité provenant du fait que la réunion disjointe $\bigcup_{\gamma\in\Sigma_{R-D-\varepsilon}(y)} \mathcal{D}_{\gamma.y}$ est incluse dans la boule $B(y, R)$ et du fait que tout domaine de Dirichlet a pour volume $\mathrm{Vol}(Y, g)$.

Comme l'application $g\colon R \to \log(N_y(R + 2(D + \varepsilon)))$ est sous-additive (c'est une conséquence directe de la proposition 1.4.10 de [Ro] dont une preuve est rappelée dans [Re], lemme 2.6), on a par ailleurs $\frac{N_y(R+D+\varepsilon)}{N_y(R-D-\varepsilon)} \leq N_y(3D)^2$. Il en résulte que

$$\mathrm{Ent}(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, dv_{g^{\alpha_0}}) \leq C' \left(N_y(3D)\right)^{\frac{2}{m+\varepsilon'}} \left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(Y,g)} \int_Y r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}} dv_g\right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}}.$$

On montre alors, comme dans la preuve du théorème 37, que

$$N_y(3D) < \sup_{\tilde{x}\in\tilde{X}} N_{\tilde{x}}\left(6D + \frac{\varepsilon_0}{26}\right) = N_{\sup}\left(X, 6D + \frac{\varepsilon_0}{26}\right).$$

Par ailleurs, comme d'une part l'action de $G(Y^{\alpha_0}, Y)$ est discontinue et cocompacte, d'autre part les mesures $dv_{g^{\alpha_0}}$ et $\mu_{Y^{\alpha_0}}$ sont invariantes sous l'action de $G(Y^{\alpha_0}, Y)$, on a $\mathrm{Ent}(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, dv_{g^{\alpha_0}}) = \mathrm{Ent}(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, \mu_{Y^{\alpha_0}})$ (voir, par exemple, [Re] propriété 2.3). On obtient ainsi

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ent}(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, \mu_{Y^{\alpha_0}})\\ &\quad\leq C' \left(N_{\sup}(X, 6D + \frac{\varepsilon_0}{26})\right)^{\frac{2}{m+\varepsilon'}} \left(\frac{1}{\mathrm{Vol}(Y,g)} \int_Y r_-(x)^{\frac{m+\varepsilon'}{2}} dv_{g^{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}}.\end{aligned}$$

Si à présent

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathrm{Vol}(Y, g_Y)} \left(\int_Y r_-(y)^{\frac{(m+\varepsilon')}{2}} dv_g(y)\right)^{\frac{1}{m+\varepsilon'}}\\ &\qquad < \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha_0}\right) \frac{\mathrm{Ent}(X, d_X)}{C' N_{\sup}(X, 6D + \frac{\varepsilon_0}{26})^{\frac{2}{m+\varepsilon'}}},\end{aligned}$$

on obtient $\mathrm{Ent}(Y^{\alpha_0}, d_{Y^{\alpha_0}}, \mu_{Y^{\alpha_0}}) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2\alpha_0}\right)\mathrm{Ent}(X, d_X)$, ce qui contredit le point (i) du théorème 37. Ceci termine la preuve du point (iii). □

4.4. Semi-continuité du volume et précompacité. Si le volume est un invariant continu sur $(\mathcal{R}_{m,K,D}, d_{\mathrm{GH}})$, rappelons que ce n'est plus le cas sur $(\mathcal{M}_{N,H,D}, d_{\mathrm{GH}})$ (voir la remarque 2).

Nous montrons en particulier le résultat de semi-continuité inférieure suivant :

Corollaire 42. *Fixons une variété riemannienne compacte (M_0^m, g_0) de dimension m, dont la systole est minorée par ε_0 et dont la courbure sectionnelle vérifie $\sigma_0 \leq -k^2$.*

Si (Y, h_0) est une variété riemannienne compacte de dimension m, qui est un $K(\pi, 1)$ et telle que $\mathrm{sys}(Y, h_0) \geq \varepsilon_0$ *et* $d_{\mathrm{GH}}((Y, g), (M_0, g_0)) = \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$, *alors*

$$\mathrm{Vol}(Y, h_0) \geq \left(\frac{(m-1)k}{\mathrm{Ent}(M_0, g_0)}\right)^m \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \mathrm{Vol}(M_0, g_0).$$

De plus, pour toute métrique g sur Y, on a

$$\mathrm{Ent}(Y, g)^m \mathrm{Vol}(Y, g) \geq ((m-1)k)^m \mathrm{Vol}(M_0, g_0)$$

En particulier, si $\sigma_0 = -k^2$ et si Y vérifie les hypothèses du corollaire 42, on a

$$\mathrm{Vol}(Y, h_0) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \mathrm{Vol}(M_0, g_0).$$

Preuve. Comme (M_0, g_0) et (Y, h_0) sont deux variétés dont la systole est minorée par ε_0 et qui vérifient $d_{\mathrm{GH}}((M_0, g_0), (Y, g)) < \frac{\varepsilon_0}{13}$, le théorème 16 implique que les groupes fondamentaux de Y et M_0 sont isomorphes. Comme M_0 et Y sont toutes les deux des $K(\pi, 1)$, elles ont même type d'homotopie et il existe une application de degré 1 entre Y et M_0. La deuxième inégalité du corollaire 42 découle donc du résultat suivant, démontré mais énoncé de manière moins générale dans le théorème 1.5 de [BCG2] : si (X, g_X) est une variété riemannienne compacte de dimension m dont la courbure sectionnelle vérifie $\sigma \leq -k^2$ et si (Y, g_Y) est n'importe quelle variété riemannienne compacte de dimension m telle qu'il existe une application $f : Y \to X$ de degré 1, alors,

$$\mathrm{Ent}(Y, g)^m \mathrm{Vol}(Y, g) \geq ((m-1)k)^m \mathrm{Vol}(M_0, g_0).$$

Cette inégalité étant vérifiée en particulier par la métrique h_0, il suffit ensuite d'appliquer le théorème 37 pour obtenir la première inégalité du corollaire. □

Notation : Soient $k > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$, notons $\mathcal{R}^k_{m,\varepsilon_0}$ l'ensemble des classes d'isométrie des variétés riemanniennes compactes de dimension m dont la systole est supérieure à ε_0 et dont la courbure sectionnelle vérifie $\sigma \leq -k^2$.

Corollaire 43. *Soit (M_0, g_0) une variété compacte de dimension m qui est un $K(\pi, 1)$ et telle que* $\mathrm{sys}(M_0, g_0) > \varepsilon_0$. *Si (Y, g) est une variété riemannienne compacte qui appartient à $\mathcal{R}^k_{m,\varepsilon_0}$ et telle que $d_{\mathrm{GH}}((Y, g), (M_0, g_0)) < \frac{\varepsilon_0}{13}$, alors*

$$\mathrm{Vol}(Y, g) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-m} \mathrm{Vol}(M_0, g_0).$$

Preuve. Ce corollaire est une conséquence quasi-directe du résultat suivant, démontré mais énoncé de manière moins générale dans le théorème 1.4 de [BCG2] : si (Y, g_Y) est une variété riemannienne compacte dont la courbure sectionnelle est inférieure à $-k^2$ et si (X, g_X) est n'importe quelle autre variété riemannienne compacte telle qu'il existe une application continue $f : (X, g_X) \to (Y, g_Y)$, alors

$$\mathrm{Ent}(X, g_X)^m \mathrm{Vol}(X, g_X) \geq |\deg f| \, \mathrm{Ent}(Y, g)^m \mathrm{Vol}(Y, g_Y).$$

Puisque M_0 et Y sont des $K(\pi, 1)$ et que leur groupes fondamentaux sont isomorphes d'après le théorème 16, M_0 et Y sont homotopiquement équivalentes ; il existe alors une application continue de degré 1 entre ces deux variétés. De plus, d'après le théorème 37,

$$\mathrm{Ent}(M_0, g_0) \leq \mathrm{Ent}(Y, g_Y) \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{-1},$$

ce qui termine la preuve du corollaire 43. □

Corollaire 44. *Toute boule de rayon $\frac{\varepsilon_0}{26}$ dans l'ensemble $(\mathcal{R}^k_{m,\varepsilon_0}, d_{\mathrm{GH}})$ est précompacte.*

Preuve. Soit B une boule non vide de rayon $\frac{\varepsilon_0}{26}$ dans l'ensemble $(\mathcal{R}^k_{m,\varepsilon_0}, d_{\mathrm{GH}})$. Fixons une variété riemannienne (M_0, g_0) dans cette boule et considérons une autre variété (Y, g) de B, le corollaire 43 implique que $\mathrm{Vol}(Y, g)$ est uniformément majoré par $\left(\frac{\mathrm{Ent}(M_0, g_0}{(m-1)k}\right)^m \mathrm{Vol}(M_0, g_0)$. Par ailleurs, comme (Y, g) est de courbure sectionnelle négative, le volume de toute boule de (Y, g) de rayon $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$ est uniformément minoré par celui de la boule euclidienne de rayon ε. Il résulte de la proposition 5.2 de [Gr] que l'ensemble B est précompact pour la distance de Gromov–Hausdorff. □

On rappelle que le volume de toute variété compacte de dimension m, localement symétrique dont la courbure sectionnelle est comprise entre -4 et -1 est minoré par une constante universelle *que nous noterons* c_m qui ne dépend que de m (voir, par exemple, le théorème 37.1.1 de [BZ]). On établit alors la proposition suivante :

Proposition 45. *Considérons une variété compacte (X, g_0) de dimension m, localement symétrique de rang 1 (normalisée de sorte que le maximum de sa courbure sectionnelle soit égal à -1), de diamètre majoré par D. Notons*

$$\delta_0 = \frac{(m-1)2^{m-2} c_m}{\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(\mathbb{S}^{m-2})(\sinh 2D)^{m-1}}, \quad N_0 = E\left[\frac{4}{\delta_0}\right]$$

et

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{N_0 . H_0} \log\left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{5}{2} N_0 H_0 D}}\right).$$

Toute variété riemannienne compacte (Y, g) de dimension m, qui est un $K(\pi, 1)$, qui appartient à $\mathcal{M}_{N_0, 2m, \frac{5}{4}D}$ et telle que $d_{\mathrm{GH}}((X, g_0), (Y, g)) = \varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{13}$, est homotopiquement équivalente à X et vérifie

$$\mathrm{Vol}(Y, g) \geq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m \mathrm{Vol}(X, g_0).$$

Si, de plus, la courbure sectionnelle de (Y, g) est majorée par $-k^2$, on a

$$\mathrm{Vol}(Y, g) \leq \left(\frac{\mathrm{Ent}(X, g_0)}{(m-1)k}\right)^m \mathrm{Vol}(X, g_0).$$

Remarque 46. (i) La condition $\mathrm{diam}(Y, g) \leq \frac{5}{4}D$ est nécessairement vérifiée lorsque $d_{\mathrm{GH}}((X, g_0), (Y, g)) < \frac{\varepsilon_0}{13}$.

(ii) Rappelons que $\mathrm{Ent}(X, g_0)$ est égale à $(m-1)$ (resp. m, resp. $(m+2)$, resp. $(m+6)$) lorsque (X, g_0) est hyperbolique réel (resp. complexe, resp. quaternionnien, resp. de Cayley).

Preuve de la proposition 45. Commençons par vérifier que $\mathrm{inj}(X, g_0) \geq \delta_0$. La courbure sectionnelle de (X, g_0) est supérieure ou égale à -4. Notons l la longueur de la plus courte géodésique périodique de (X, g_0), le théorème de J. Cheeger (voir [BZ], corollaire 34.1.9) donne alors

$$\mathrm{Vol}(X, g_0) \leq l.\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(\mathbb{S}^{m-2}) \int_0^D \cosh(2t) \left(\frac{\sinh(2t)}{2}\right)^{m-2} dt,$$

ce qui assure que

$$c_m \leq \frac{l.\mathrm{Vol}_{\mathrm{eucl}}(\mathbb{S}^{m-2})}{(m-1)} \left(\frac{\sinh(2D)}{2}\right)^{m-1}.$$

Donc $\mathrm{inj}(X, g_0) = \frac{l}{2} \geq \delta_0$. Le groupe fondamental de (X, g_0) est donc δ_0-épais et possède la propriété $\mathrm{FSG}(N_0)$ d'après la proposition 1.14 de [BCG1].

Par ailleurs, l'entropie volumique d'une variété riemannienne compacte localement symétrique de rang 1 est inférieure à $2m$ (voir la remarque 46). On déduit de tout ceci que (X, g_0) appartient à $\mathcal{M}_{N_0, 2m, \frac{5}{4}D}$ et donc que $\mathrm{sys}(X, g_0) \geq \varepsilon_0$. Le premier point de la proposition 45 découle ainsi du corollaire 42.

Par ailleurs, si la courbure sectionnelle de (Y, g) est majorée par $-k^2$, le corollaire 42 implique $\mathrm{Vol}(X, g_0)\mathrm{Ent}(X, g_0)^m \geq ((m-1)k)^m \mathrm{Vol}(Y, g)$, ce qui prouve la deuxième inégalité de la proposition 45. □

Références

[BBI] D. Burago, Y.-D. Burago, S. Ivanov, *A course in metric geometry*. Grad. Stud. in Math. 33, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2001. Zbl 0981.51016 MR 1835418

[BCG1] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, Un lemme de Margulis sans courbure et ses applications. *Prépublication de l'Institut Fourier* **595** (2003), 1–59.

[BCG2] G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, *Lemme de Schwarz réel et applications géométriques. Acta Math.* **183** (1999), 145–169. Zbl 1035.53038 MR 1738042

[BZ] Y.-D. Burago, V.-A. Zalgaller, *Geometric inequalities*. Grundlehren Math. Wiss. 285, Springer-Verlag, Berlin 1988. Zbl 0633.53002 MR 0936419

[CC1] J. Cheeger, T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below I. J. Differential Geom.* **46** (1997), 406–480. Zbl 0902.53034 MR 1484888

[CC2] J. Cheeger, T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below II. J. Differential Geom.* **54** (2000), 13–35. Zbl 1027.53042 MR 1815410

[CC3] J. Cheeger, T. H. Colding, *On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below III. J. Differential Geom.* **54** (2000), 37–74. Zbl 1027.53043 MR 1815411

[CG] C. Champetier, V. Guirardel *Monoïdes libres dans les groupes hyperboliques*. In *Semin. Theor. Spectr. Geom.* 18, Université de Grenoble I, Institut Fourier, Saint-Martin-d'Hères 2000, 157–170. Zbl 0973.20036 MR 1812218

[Co1] T. H. Colding, *Aspects of Ricci curvature*. In *Comparison geometry* (Berkeley, CA, 1993–94), Math. Sci. Res. Inst. Publ. 30, Cambridge University Press, Cambridge 1997, 83–98. Zbl 0898.53034 MR 1452868

[Co2] T. H. Colding, Ricci curvature and volume convergence. *Ann. of Math.* **145** (1997), 477–501. Zbl 0879.53030 MR 1454700

[CV] Y. Colin de Verdière, Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I. *Compositio Math.* **27** (1973), 83–106. Zbl 0272.53034 MR 0348798

[Fu] K. Fukaya, A boundary of the set of the riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters. *J. Differential Geom.* **28** (1986), 1–21. Zbl 0652.53031 MR 0950552

[Ga1] S. Gallot, Inégalités isopérimétriques et analytiques sur les variétés riemanniennes. *Astérisque* **163–164** (1988), 31–91. Zbl 0674.53001 MR 0999971

[Ga2] S. Gallot, Isoperimetric inequalities based on integral norms of Ricci curvature. *Astérisque* **157–158** (1988), 191–216. Zbl 0665.53041 MR 0976219

[Ga3] S. Gallot, Volume, courbure de Ricci et convergence de variétés. *Astérisque* **252** (1998), 7–32. Zbl 0976.53038 MR 1685585

[Go] C. Godbillon, *Eléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris 1971. Zbl 0218.55001 MR 0301725

[Gr] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Edited by J. Lafontaine and P. Pansu, Prog. Math. 152, Birkhäuser, Boston, MA, 2001. Zbl 0953.53002 MR 1699320

[KS] A. Karrass, D. Solitar, The free product of two groups with a malnormal amalgamated subgroup. *Canad. J. Math* **23** (1971), 933–959. Zbl 0247.20028 MR 0314992

[Pa] P. Pansu, Effondrement des variétés riemanniennes (d'après les travaux de J. Cheeger et M. Gromov). *Astérisque* **121–122** (1985), 63–82. Zbl 0551.53020 MR 0768954

[Pe] P. Petersen, Convergence theorem in Riemannian geometry. In *Comparison geometry* (Berkeley, CA, 1993–94), Math. Sci. Res. Inst. Publ. 30, Cambridge University Press, Cambridge 1997 167–202. Zbl 0898.53035 MR 1452874

[Pet] P. Petersen, Gromov-Hausdorff convergence of metric spaces. In *Differential geometry : Riemannian geometry* (Los Angeles 1990), Proc. Sympos. Pure Math. 54 Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1993, 489–504. Zbl 0788.53037 MR 1216641

[Pl] C. Plaut, Geometrizing infinite-dimensional locally compact groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 941–962. Zbl 0860.53052 MR 1348156

[Re] G. Reviron, Espaces de longueur d'entropie majorée : rigidité topologique, adhérence des variétés, noyau de la chaleur. Thèse, 2005. http ://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00009203

[Ro] G. Robert, Invariants topologiques et géométriques reliés aux longueurs des géodésiques et aux sections harmoniques de fibrés. Thèse, 1994.

[Sak] T. Sakai, *Riemannian geometry*. Transl. Math. Monogr. 149, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1996. Zbl 0886.53002 MR 1390760

[Sp] E.-H. Spanier, *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York 1966. Zbl 0145.43303 MR 0210112

[SW] C. Sormani, G. Wei, Hausdorff convergence and universal covers. *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 3585–3602. Zbl 1005.53035 MR 1837249

[Tu1] W. Tuschmann, Hausdorff convergence and the fundamental group. *Math. Z.* **218** (1995), 207–211. Zbl 0814.53036 MR 1318154

[Tu2] W. Tuschmann, Erratum : "Hausdorff convergence and the fundamental group". *Math. Z.* **224** (1997), 493. MR 1439204

[Zu] F. Zuddas, Quelques relations entre propriétés algébriques des groupes de transformations et géométrie des espaces. Thèse, 2005. http ://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00011158

Received November 7, 2006

Guillemette Reviron, Institut de Mathématiques et Modélisation de Montpellier, Case courier 52, Université Montpellier II, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 05, France
E-mail: greviron@gmail.com