Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 83 (2008)

Artikel: Le groupoïde de Galois de P1 et son irréductibilité

Autor: Casale, Guy

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-99038

Comment. Math. Helv. 83 (2008), 471–519 **Commentarii Mathematici Helvetici**

Le groupoïde de Galois de P_1 et son irréductibilité

Guy Casale*

Résumé. Dans cet article, nous calculons le groupoïde de Galois de la première équation de Painlevé. Nous proposons ensuite une définition de réductibilité pour les feuilletages holomorphes singuliers et montrons que la réductibilité peut se lire sur le groupoïde de Galois du feuilletage. Nous obtenons un résultat d'irréductibilité du feuilletage sous-jacent à la première équation de Painlevé.

Abstract. In this article, the Galois groupoid of the first Painlevé equation is computed. This computation uses É. Cartan's classification of structural equations of pseudogroups acting on $\mathbb{C}^2$ and the degeneration of the first Painlevé equation on an elliptic equation ($y'' = 6y^2$). Moreover a definition of reducibility for singular holomorphic foliations is proposed and a characterization of reducible foliations on theirs Galois groupoids is given. It is applied to prove the foliation-irreducibility of the first Painlevé equation.

Mathematics Subject Classification (2000). Primary 34M55; Secondary 12H05, 22A22.

Keywords. Painlevé equations, Galois groupoid, Lie pseudogroups.

Table des matières

*This work was done when the author was supported by JSPS Postdoctoral Fellowship for Foreign Researchers (FY2004). The author is supported by EIF Marie Curie fellowship.

Introduction

Le groupoïde de Galois d'un feuilletage a été introduit par B. Malgrange dans [18]. Cette définition concerne les feuilletages holomorphes (singuliers) sur une variété $\mathbb{C}$-analytique lisse. Cet objet est la « clôture de Zariski » du pseudo-groupe d'holonomie du feuilletage dans le sens suivant. Soient $(X, \mathcal{F})$ une variété $\mathbb{C}$-analytique lisse portant un feuilletage $\mathcal{F}$. Les champs de vecteurs locaux tangents à $\mathcal{F}$ forment un faisceau en algèbres de Lie de champs de vecteurs. Le pseudo-groupe de transformations de X engendré par ces champs de vecteurs est appelé le pseudo-groupe tangent du feuilletage et noté $\mathcal{T}an(\mathcal{F})$. Ce pseudo-groupe intervient notamment dans la construction des transports holonomes. Le pseudo-groupe tangent n'est pas décrit par un système d'équations aux dérivées partielles, ceci malgré le fait que le faisceau de champs de vecteurs dont il est issu soit décrit par un système d'équations aux dérivées partielles linéaires. Ce phénomène est bien connu sur les groupes algébriques où le groupe de Lie intégrant une sous-algèbre de Lie n'est pas toujours un groupe algébrique. La définition proposée par B. Malgrange est basée sur l'absence de « troisième théorème de Lie » pour les $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie (pseudo-groupes décrits par des e.d.p. algébriques ; définition 1.16). La définition du groupoïde de Galois est la suivante (nous renvoyons en 1.25 pour une définition plus précise).

Définition. Le groupoïde de Galois d'un feuilletage est le plus petit $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie contenant le pseudo-groupe tangent du feuilletage.

Dans [18], B. Malgrange montre que cette définition généralise le groupe de Galois différentiel d'une connexion linéaire intégrable.

Dans le cas d'un germe de feuilletage de codimension un, une étude complète des relations entre le groupoïde de Galois, la transcendance des intégrales premières et les structures géométriques singulières transverses au feuilletage est faite dans [5]. L'outil principal de cette étude est la construction de suites de Godbillon–Vey méromorphes spéciales.

Énoncé des résultats. Dans cet article, nous étudions le feuilletage de la variété algébrique $\mathbb{C}^3$ (muni de son anneau structural $\mathbb{C}[x, y, y']$) donné par la première équation de Painlevé :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x.$$

Nous noterons P_1 cette équation et

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + x)\frac{\partial}{\partial y'}$$

le champ de vecteurs décrivant le feuilletage associé. Dans un premier temps, nous calculons son groupoïde de Galois et obtenons le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Le groupoïde de Galois de P_1 est le groupoïde d'invariance de la forme $\gamma = i_{X_1}dx \wedge dy \wedge dy'$. Ses solutions sont les germes de transformations de $\mathbb{C}^3$, Γ, satisfaisant les équations $\Gamma^*\gamma = \gamma$.*

Sans précisions supplémentaires, le groupoïde de Galois de P_1 désignera toujours le groupoïde de Galois de X_1 sur $\mathbb{C}^3$ d'anneau de coordonnées $\mathbb{C}[x, y, y']$.

Remarque. Considérons $\mathbb{C}^3$ muni de l'anneau des fonctions entières. Le groupoïde de Galois de X_1 sur cette espace est strictement plus petit que celui de X_1 sur $\mathbb{C}[x, y, y']$. Calculé sur une transversale, il est réduit aux identités.

Nous donnons ensuite un résultat de type irréductibilité de X_1 dont la preuve utilise de manière essentielle la connaissance du groupoïde de Galois de X_1. Les feuilletages plus simples que les feuilletages de codimension deux sont les feuilletages donnés par des équations linéaires et les feuilletages de codimension un. Nous dirons qu'un feuilletage de codimension deux est réductible si l'on peut construire deux intégrales premières locales en utilisant seulement des intégrales premières locales de feuilletages plus simples (définition 3.3). Plus précisement, pour la première équation de Painlevé, le théorème 2.1 nous permet d'obtenir le résultat d'irréductibilité suivant :

Théorème 3.4. *Il n'existe pas d'extension différentielle K_n de $\left(\mathbb{C}(x, y, y'), \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y'}\right)$ contenant une intégrale première de X_1, construite de la manière suivante :*

$$\mathbb{C}(x, y, y') = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$$

avec

- *K_{i+1} algébrique sur K_i,*
- *ou $K_{i+1} = K_i(h_1, \dots, h_p)$ avec $dh_j = \sum h_k\omega_j^k$, $\omega_j^k \in K_i \otimes \Omega^1_{\mathbb{C}^3}$ et $d\omega_j^k = -\sum \omega_\ell^k \wedge \omega_j^\ell$,*
- *ou $K_{i+1} = K_i(\langle h \rangle)$ avec $dh \wedge \omega = 0$, $\omega \in K_i \otimes \Omega^1_{\mathbb{C}^3}$ et $\omega \wedge d\omega = 0$.*

Le corps $K(h)$ désigne le corps engendré par h et $K(\langle h \rangle)$ le corps différentiel engendré par h. Le théorème que nous montrons est en fait un peu plus général que celui-ci mais nécessite la mise en place du vocabulaire approprié.

Théories de Galois différentielles et irréductibilité. À la fin du dix-neuvième siècle, les idées d'É. Galois ont été étendues aux équations différentielles linéaires par É. Picard [26] puis ont été complétées par E. Vessiot [36]. Dans les années 1950, E. Kolchin développe cette théorie du point de vue des extensions de corps différentiels [1], [15].

Dans [7], J. Drach avance une théorie de Galois pour les équations différentielles non-linéaires. Malgré les erreurs qui invalident la plupart de ses définitions, il donne des indications pour calculer le groupoïde de Galois de divers feuilletages [9], [10] et notament [8] dont cet article suit la démarche. Dans [37], E. Vessiot esquisse une définition semblable à celle de B. Malgrange. Elle est à l'origine de la définition du groupe de Galois infinitésimal de H. Umemura [32], [33]. Bien qu'ils aient un « ancêtre » commun, l'équivalence du groupoïde de Galois et du groupe de Galois infinitésimal n'est encore qu'une conjecture.

Les premières tentatives de calcul du groupoïde de Galois de la première équation de Painlevé sont dûs à P. Painlevé [25] et J. Drach [8]. Utilisant une définition basée sur des résultats érronés, J. Drach donne les directions à suivre pour prouver le théorème 2.1. En faisant appel à la classification locale des pseudo-groupes de Lie agissant sur $\mathbb{C}^2$, établie par S. Lie, il affirme que la nature du groupoïde de Galois est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles (dit « résolvant ») admettant une solution rationnelle. Il affirme ensuite que la dégénérescence de P_1 sur l'équation elliptique $y'' = 6y^2$ peut servir à montrer l'absence de solutions rationnelles aux équations résolvantes. Le premier point n'est pas justifié et le deuxième est entaché d'erreurs.

Dans les articles précédemment cités, les auteurs affirment que le théorème 2.1 implique l'irréductibilité « absolue » de l'équation sans même définir cette irréductibilité. Dans les Leçons de Stockholm [23], P. Painlevé définit une notion de réductibilité d'une solution d'une équation différentielle. Une équation est dite réductible si toutes ses solutions le sont. Il donne ensuite une caractérisation des équations sans singularités mobiles du second ordre réductibles : la solution générale dépend semi-transcendentalement des constantes d'intégrations. En d'autres termes, l'équation admet une intégrale première rationnelle en les variables dépendantes.

Cette définition est très restrictive comme le montre P. Painlevé dans la remarque 28 de [24]. Elle a néanmoins l'intérêt de faire apparaître les différences entre la réductibilité d'une équation (ou du feuilletage sous-jacent) et celle d'une solution particulière. L'étude de la réductibilité des solutions particulières des équations de Painlevé est l'œuvre de l'école japonaise. H. Umemura [31] et K. Nishioka [21] donnent un critère permettant de trouver les familles à un paramètre de solutions réductibles d'une équation du second ordre et l'appliquent à l'étude de la première équation de Painlevé. À la suite de ces articles, Murata [20], Watanabe [38], [39], Noumi–Okamoto [22] et Umemura–Watanabe [34], [35] trouvent les solutions réductibles non algébriques des autres équations de Painlevé.

Ces résultats prouvent l'irréductibilité (au sens des Leçons de Stokholm) des solutions des équations de Painlevé pour des valeurs génériques des paramètres. Dans [24], P. Painlevé souligne la nature restrictive de sa définition et pose la question des rapports entre une définition de l'irréductibilité du feuilletage sous-jacent à l'équation et la tentative de théorie de Galois de J. Drach.

Dans cet article, nous proposons une définition de feuilletages réductibles. La définition porte sur les feuilletages de codimension deux mais il est facile de l'étendre aux feuilletages de codimension quelconque. Elle met l'accent sur la nature de certaines intégrales premières du feuilletage. Les intégrales premières les moins « transcendantes » permettent de comprendre grossièrement la manière dont la solution générale dépend des constantes d'intégration. Un des intérêts de cette définition est de pouvoir se lire sur le groupoïde de Galois du feuilletage. Nous suivons les résultats partiels de J. Drach pour calculer le groupoïde de Galois de P_1 et prouver son irréductibilité.

Dans l'état actuel, la réductibilité au sens des feuilletages ne permet pas de définir la réductibilité d'une solution particulière. D'une manière plus générale, les relations entre le type de transcendance d'une solution et celui des intégrales premières sont difficiles à saisir. Pour les feuilletages de codimension un, un théorème de M. Singer [30] dit que si une feuilletage du plan admet une solution Liouvillienne alors soit elle est algébrique soit le feuilletage admet une intégrale première Liouvillienne.

Organisation de l'article. Dans la première partie, nous rappelons les définitions nécessaires à la compréhension des résultats et des preuves présentés. Nous commençons par un rapide rappel de la construction des espaces de jets et des plus importantes des propriétés de leurs sous-variétés. Pour plus de détails, nous renvoyons aux livres de J.F. Ritt [28] et de J.-F. Pommaret [27] dans le cadre algébrique et à B. Malgrange [19] dans le cadre analytique.

Nous rappelons ensuite les définitions de $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie et de leurs algèbres de Lie. Ces objets formalisent les notions de pseudo-groupes de Lie algébriques de transformations et de leurs algèbres de Lie de champs de vecteurs. Ils sont étudiés depuis S. Lie et É. Cartan sous le nom de « groupes infinis de Lie » ou de « pseudo-groupes de Lie » sous des hypothèses supplémentaires de régularité. L'étude de la structure d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie passe par la compréhension de sa forme de Maurer–Cartan. Cette forme généralise la forme de Maurer–Cartan d'un groupe de Lie et satisfait des équations de structures semblables [13], [29].

Enfin, nous donnons la définition du groupoïde de Galois d'un feuilletage. Nous définissons les formes invariantes transverses du groupoïde de Galois d'un feuilletage et montrons comment construire des suites de Godbillon–Vey « spéciales » à partir de ces formes. Cette partie se termine avec l'énoncé d'un résultat (théorème 1.36) donnant une description sommaire des suites de Godbillon–Vey possibles pour un feuilletage défini par une 2-forme fermée. Ce résultat est une conséquence de la preuve donnée par É. Cartan de la classification des pseudo-groupes agissant sur $\mathbb{C}^2$.

Nous redonnons la preuve de Cartan en annexe.

Dans la deuxième partie, nous calculons le groupoïde de Galois de P_1. D'après le théorème 1.36, le théorème 2.1 est vrai si trois conditions sont vérifiées. Premièrement, il n'existe pas d'intégrale première rationnelle du feuilletage. Deuxièmement, il n'existe pas de feuilletage de codimension un contenant le feuilletage. Troisièmement, il n'existe pas de sl_2-connexion sur le fibré conormal au feuilletage. Chacune de ces conditions se réécrit sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles ne devant pas avoir de solutions algébriques. Pour montrer que ces équations n'ont pas de solutions, nous utilisons la dégénérescence de X_1 sur $X_0 = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + 6y^2\frac{\partial}{\partial y'}$ à travers la famille $X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + \alpha^5 x)\frac{\partial}{\partial y'}$. La famille de champs de vecteurs X_α étant triviale pour $\alpha \in \mathbb{C} - 0$, les équations à étudier se prolongent rationnellement au paramètre. En les développant le long de $\{\alpha = 0\}$, on obtient une suite de systèmes d'équations aux dérivées partielles plus simples. Chacun des trois systèmes d'e.d.p. donné par le théorème 1.36 est étudié dans un paragraphe propre.

Dans la dernière partie, nous définissons une propriété de réductibilité pour les feuilletages. Cette propriété signifie que l'on peut construire un système d'intégrales premières du feuilletage en utilisant successivement des intégrales premières de feuilletages plus simples. Dans le cas d'un feuilletage de codimension deux, les extensions de corps différentiels que nous considèrerons comme plus simples que l'extension du corps des fonctions rationnelles par un système de deux intégrales premières indépendantes seront :

– les extensions algébriques,
– les extensions fortement normales (au sens de Kolchin [15]),
– les extensions par une intégrale première d'un feuilletage de codimension un,
– les extension fortement normales relatives en codimension un (voir définition 3.1 et [6])

Ce dernier type d'extension signifie de manière grossière que relativement à la projection sur $\mathbb{C}$ donnée par une intégrale première, le feuilletage que l'on considère est de codimension un et qu'il admet une intégrale première dans une extension fortement normale. Nous utilisons le type d'une extension de corps différentiels introduit par Kolchin ([15]) à partir d'un analogue différentiel du polynôme de Hilbert pour mesurer la taille de la partie transverse du groupoïde de Galois d'un feuilletage réductible. Nous montrons que les feuilletages réductibles de codimension deux ont un groupoïde de Galois « petit » (*i.e* sa partie transverse est de type linéaire) et que le groupoïde de Galois de P_1 est plus « gros » (*i.e.* de type quadratique).

Remerciements. Ce travail a été effectué pendant un séjour post-doctoral à l'Université de Tokyo, je remercie Kazuo Okamoto et Hitedaka Sakai pour leur accueil. Je remercie également Hiroshi Umemura pour son invitation à Nagoya, son enthousiasme et son intérêt pour ce travail et Bernard Malgrange dont les nombreux commentaires ont été précieux.

1. Le groupoïde de Galois d'un feuilletage algébrique

La notion de $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie introduite par B. Malgrange dans [18] formalise l'idée de pseudo-groupe de Lie singulier. Ces objets, sous certaines conditions de régularité, ont été étudiés par divers auteurs [16], [12], [13], [29] à la suite de S. Lie et É. Cartan.

Dans cette partie, nous rappelons les résultats élémentaires sur les $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie. Pour les détails nous renvoyons à B. Malgrange [18] et à J.-F. Pommaret [27].

1.1. Espaces de jets et $\mathcal{D}$-variétés. Avant de donner les constructions algébriques de ces espaces, rappelons ce qu'est le jet (d'ordre q) d'un germe de section d'un fibré. Considérons $p\colon \mathbb{C}^{n+p} \to \mathbb{C}^n$ la projection sur les n premières coordonnées. Une section locale de p est donnée par une fonction analytique $s : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. En un point $x_0 \in \mathbb{C}^n$, cette fonction s'écrit

$$s = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} s^\alpha \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

avec $s^\alpha \in \mathbb{C}^p$, $(x-x_0)^\alpha = \prod_{i=1}^n (x_i - x_{0,i})^{\alpha_i}$ et $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$. Le jet d'ordre q de s en x_0 est la série tronquée :

$$j_q s = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n\\ |\alpha|\le q}} s^\alpha \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}.$$

L'espace des jets d'ordre q de sections $\mathcal{J}_q$ a pour coordonnées les s^α. Les propriétés essencielles de ces espaces seront rappelées dans le cadre algébrique.

Cette construction géométrique permet d'obtenir les espaces de jets de sections de submersions $p\colon Z \to X$ entre variétés lisses que nous noterons $\mathcal{J}_q(Z_{/X})$. Pour élargir cette construction dans certaines situations singulières, on procède de la manière suivante.

Soit X une variété algébrique lisse sur $\mathbb{C}$ et $Z \to X$ une variété algébrique sur X. Nous dirons « Z sur X », ou indifféremment « Z au-dessus de X », pour une variété Z munie d'une application dominante $Z \to X$. Nous noterons $J_q(Z_{/X})$ l'espace des jets d'ordre q de sections de Z sur X. Ces espaces sont des espaces affines au-dessus de Z. Rappelons brièvement comment on les construit.

Commençons par construire $J_q(X \times \mathbb{C}^N_{/X})$ où X est affine de dimension n telle qu'il existe un revêtement d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ par X non ramifié. Nous noterons $x_1, \dots, x_n$ des coordonnées sur $\mathbb{C}^n$ et celles induites sur X et $y_1, \dots, y_N$ celles de $\mathbb{C}^N$. L'espace $J_q(X \times \mathbb{C}^N_{/X})$ est alors défini comme l'espace $X \times \mathbb{C}^N$ muni du faisceau d'anneaux

$$\mathcal{O}_{J_q(X\times\mathbb{C}^N_{/X})} = \mathcal{O}_{X\times\mathbb{C}^N}[y_i^\alpha],\ 1 \le i \le N,\ \alpha \in \mathbb{N}^n,\ 1 \le |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le q.$$

Ces espaces de jets sont munis de dérivations D_i de $\mathcal{O}_{J_q(X\times\mathbb{C}^N_{/X})}$ dans $\mathcal{O}_{J_{q+1}(X\times\mathbb{C}^N_{/X})}$ définies par

$$D_j(x_i) = \delta_{ij}\ ,\quad D_j y_i^\alpha = y_i^{\alpha+\epsilon_j},$$

ϵ_j étant le multi-indice de poids 1 dont la seul composante non nulle est la j-ième.

Soit Z une variété affine au-dessus de X (plongée dans $X \times \mathbb{C}^N$) décrite par un idéal I. L'espace des jets $J_q(Z_{/X})$ est le sous-espace de $J_q(X \times \mathbb{C}^N_{/X})$ défini au-dessus de Z par l'idéal $\sum_{|\alpha|\leq q} D^\alpha I$. Nous noterons $\mathcal{O}_{J_q(Z_{/X})}$ le faisceau quotient sur Z. C'est le faisceau des équations aux dérivées partielles d'ordre q portant sur les sections de Z sur X. Ces espaces ne dépendent ni des coordonnées choisies sur X ni du plongement de Z. Lorsque X et Z ne sont pas affines, on construit les espaces de jets par recollement des constructions locales. Ces espaces sont munis de projections naturelles

$$\pi_q^{q+s} : J_{q+s}(Z_{/X}) \to J_q(Z_{/X}).$$

Lorsque Z est le fibré trivial $X \times Y$, nous noterons $J_q(X \to Y)$ l'espace des jets de sections de $X \times Y$ sur X *i.e.* d'applications $X \to Y$.

Exemple 1.1. L'équation $x^2 - y^2 = 0$ décrit $Z \subset \mathbb{C}^2$ qui se projete sur $X = \{y = 0\}$. L'espace $J_1(Z_{/X})$ est décrit, dans $\mathbb{C}^3$, par les équations $x^2 - y^2 = 0$ et $x - yy' = 0$. Dans $\mathcal{O}_{J_1(Z_{/X})}$ on a $y^2(y'^2 - 1) = 0$. L'espace $J_2(Z_{/X})$ est décrit, dans $\mathbb{C}^4$, par les équations précédentes plus $1 - y'^2 - yy'' = 0$. On a $y^3 y'' = 0$ dans l'anneau $\mathcal{O}_{J_2(Z_{/X})}$. Plus généralement on montre que dans $\mathcal{O}_{J_q(Z_{/X})}$ on a $y^{q+1} y^{(q-1)} = 0$.

Remarque 1.2. Dans le cas lisse, la construction usuelle des espaces de jets donne des variétés algébriques $\mathcal{J}_q(Z_{/X})$ munis de leurs faisceaux structuraux $\mathcal{O}_{\mathcal{J}_q(Z_{/X})}$. Dans ce cas, les dérivations D_i de $\mathcal{O}_{J_q}$ dans $\mathcal{O}_{J_{q+1}}$ s'interprètent comme champs de vecteurs sur $\mathcal{J}_q$. La distribution engendrée par ces champs est appelée ditribution de contact.

Ici suivant [18], nous considérons comme espace de jets $J_q(Z_{/X})$ l'espace Z annelé par l'image direct du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{J}_q(Z_{/X})}$ par la projection $\mathcal{J}_q(Z_{/X}) \to Z$.

Lemme 1.3. *Les constructions des espaces de jets et du tangent relatif (ou « vertical ») commutent i.e. il existe un isomorphisme canonique*

$$T\left(J_q(Z_{/X})\right)_{/X} \simeq J_q\left((TZ_{/X})_{/X}\right).$$

Preuve. Cette formule n'est qu'une version de la commutativité des dérivations partielles. Vérifions la lorsque Z est affine au-dessus de X. La construction du tangent relatif se fait de la manière suivante. On plonge Z dans $X \times \mathbb{C}^N$ et on note I l'idéal définissant l'image de Z. Soient $z_1, \dots, z_N$ des coordonnées sur $\mathbb{C}^N$, le tangent relatif de $X \times \mathbb{C}^N$ est l'espace vectoriel trivial sur cet espace : $(X \times \mathbb{C}^N) \times \mathbb{C}^N$ avec les coordonnées $dz_1, \dots, dz_N$ sur les fibres. Pour $f \in \mathcal{O}_X[z_1, \dots, z_N]$ on notera df la fonction $\sum \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i$. Le tangent relatif de Z sur X est l'espace vectoriel sur Z défini par l'idéal $I + dI$.

Quand X est un revêtement non ramifié d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$, l'espace $J_1((TZ_{/X})/X)$ est défini par les équations suivantes :

$$D_j d\, f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial z_i} dz_i + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial z_i} z_k^{\epsilon_j} dz_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} (dz_i)^{\epsilon_j}$$

pour toutes les équations $f \in I$. D'un autre coté, l'espace $T(J_1(Z_{/X}))_{/X}$ est définie par les équations :

$$d\, D_j f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial z_i} dz_i + \sum_{i,k} \frac{\partial^2 f}{\partial z_k \partial z_i} z_k^{\epsilon_j} dz_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} d(z_i^{\epsilon_j}).$$

L'isomorphisme pour $q = 1$ est donné par $(dz_i)^{\epsilon_j} = d(z_i^{\epsilon_j})$. Des formules analogues donnent les isomorphismes pour $q > 1$. $\square$

On définit l'espace des jets (d'ordre infini) de sections de Z sur X comme la pro-variété affine sur Z

$$J(Z_{/X}) = \lim_{\leftarrow \pi} J_q(Z_{/X}),$$

c'est-à-dire Z annelée par $\mathcal{O}_{J(Z_{/X})} = \lim_{\rightarrow \pi} \mathcal{O}_{J_q(Z_{/X})}$. Ces anneaux sont filtrés par l'ordre des équations et sont munis d'une connexion

$$D\colon \mathcal{O}_{J(Z_{/X})} \to \mathcal{O}_{J(Z_{/X})} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$$

définie en coordonnées locales par $Df = \sum D_i f \otimes dx_i$.

On a alors la définition suivante de « *systèmes d'équations différentielles portant sur les sections de Z sur X* » appelés par la suite $\mathcal{D}$-sous-variétés de $J(Z_{/X})$ ou plus brièvement $\mathcal{D}$-variétés.

Définition 1.4. Une $\mathcal{D}$-(sous)-variété de $J(Z_{/X})$ est une sous-variété $\mathcal{Y}$ définie par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J(Z_{/X})}$ tel que :

(1) $\mathcal{I}$ est *pseudo-cohérent*, *i.e.* les idéaux $\mathcal{I}_q = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_q(Z_{/X})}$ sont cohérents,

(2) $\mathcal{I}$ est différentiel, *i.e.* $D\mathcal{I} \subset \mathcal{I}\Omega^1_X$.

Le faisceau d'anneaux de $\mathcal{Y}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{O}_{J(Z_{/X})}/\mathcal{I}$ est donc muni d'une connexion induite $D\colon \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$. On pourra définir les $\mathcal{D}$-variétés générales : on recollera des espaces définis comme ci-dessus en respectant les connexions. Nous n'en aurons pas besoin.

Une solution locale (resp. formelle) de $\mathcal{Y}$ en un point $x \in X$ est un morphisme f de $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}$ dans $\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{X,x}$ (resp. $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$) au-dessus de la restriction $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{X,x}$ (resp. $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$)

et différentiel *i.e.* $d \circ f = f \circ D$. Les solutions correspondent aux sections de Z vérifiant les équations différentielles définissant $\mathcal{Y}$.

L'exemple 1.1 donne un premier exemple de $\mathcal{D}$-variété, elle est définie par une équation d'ordre 0. La $\mathcal{D}$-variété suivante est définie par une équation d'ordre 1.

Exemple 1.5. L'espace Z sur X est $\mathbb{C}^2$ de coordonnées x, y que l'on projete sur l'axe des x. Soit $\mathcal{Y} \subset J(Z_{/X})$ définie par l'idéal différentiellement engendré par $xy' - y$. Parmi les équations de $\mathcal{Y}$, on trouve $xy'' = 0$ ainsi que $y''^2 = 0$. Dans $\mathcal{O}_\mathcal{Y}$, y'' est un nilpotent et est un élément de $\mathcal{O}_X$-torsion. En fait, tous les $y^{(q)}$ sont de torsion et de carré nul. La $\mathcal{D}$-variété réduite de $\mathcal{Y}$ est décrite par l'idéal différentiellement engendré par $xy' - y$ et y''. Les solutions de ces deux espaces sont $y(x) = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit Y_q une sous-variété de $J_q(Z_{/X})$ définie par un idéal I_q. Le prolongement d'ordre 1 de Y_q est la sous-variété de $J_{q+1}(Z_{/X})$ définie par l'idéal $I_q + \sum D_i I_q$. Cette variété sera notée $\mathrm{pr}_1 Y_q$ et son idéal $\mathrm{pr}_1 I_q$. On définit par itération les prolongements d'ordre k, $\mathrm{pr}_k I_q$. Les prolongement successifs de Y_q et la $\mathcal{D}$-variété $\mathcal{Y}$ définie par $\bigcup_k \mathrm{pr}_k I_q$ sont en général assez difficile à comprendre à partir de l'idéal I_q. Ceci essentiellement parce que $\pi_q^{q+s} \mathrm{pr}_s I_q$ n'est pas toujours égal à I_q comme le montre l'exemple classique suivant.

Exemple 1.6. Prenons $Z = \mathbb{C}^4$ de coordonnées x_1, x_2, x_3, y et $Z \to \mathbb{C}^3$ la projection sur les trois premières coordonnées. Considérons l'idéal I_1 engendré par les deux équations $X_1 y = y^{(1,0,0)}$ et $X_2 y = y^{(0,1,0)} + x_1 y^{(0,0,1)}$. Contrairement à I_1, $\pi_1^2 \mathrm{pr}_1 I_1$ contient $y^{(0,0,1)}$.

Pour finir, rappelons les résultats suivants sur les $\mathcal{D}$-variétés.

Lemme 1.7 (Ritt [28]). *Si $\mathcal{I}$ est un idéal différentiel alors son radical $\mathcal{I}^{\mathrm{red}}$ est aussi différentiel.*

Lemme 1.8 ([18]). *Si $\mathcal{Y}$ est une $\mathcal{D}$-variété réduite, $\mathcal{O}_\mathcal{Y}$ est sans torsion sur $\mathcal{O}_X$.*

Théorème 1.9 (Ritt–Raudenbush [28]). *Soit $\mathcal{Y}$ une $\mathcal{D}$-variété réduite définie par $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}_q = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_q(Z_{/X})}$ l'idéal des équations d'ordre q. Il existe un entier q tel que $\mathcal{I}$ soit l'idéal différentiel réduit engendré par $\mathcal{I}_q$.*

Théorème 1.10 ([28]). *Soit $\mathcal{Y}$ une $\mathcal{D}$-variété réduite définie par $\mathcal{I}$ et $\mathcal{Y}_q$ l'espace défini par $\mathcal{I}_q = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_q(Z_{/X})}$. Il existe un entier q et une hypersurface $S \subset \mathcal{Y}_q$ tels que par chaque points de $\mathcal{Y}_q - S$ passe une solution convergente.*

Dans le cas où la $\mathcal{D}$-variété est définie par des équations différentielles ordinaires, *i.e.* $X = \mathbb{C}$, une hypersurface S décrite par le théorème précédent est donnée par l'hypersurface des conditions initiales ne satisfaisant pas les hypothèses du théorème d'existence de solutions de Cauchy.

Ces théorèmes ont été généralisés par B. Malgrange dans la situation mixte d'une variété analytique Z sur X analytique lisse et $\mathcal{Y}$ définie par des équations aux dérivées partielles polynomiales en les dérivées. Nous n'utiliserons pas ce résultat ici et nous renvoyons le lecteur intéressé à [27] ainsi qu'à [19].

1.2. $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie algébriques et $\mathcal{D}$-algèbres de Lie

1.2.1. $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie algébriques. Nous allons maintenant rappeler la définition de $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie algébrique sur une variété algébrique lisse X sur $\mathbb{C}$. L'espace $J_q(X \to X)$ et son ouvert $J_q^*(X \to X)$ des jets inversibles (défini par $\det(y_i^{\epsilon_j}) \neq 0$) seront notés J_q et J_q^* lorsqu'aucune confusion ne pourra être faite sur X.

Ces espaces sont naturellement munis de deux projections sur X, la *source* s et le *but* t, correspondant aux projections de $X \times X$ sur le premier et le deuxième facteur, d'une *composition* partielle associative

$$c\colon (J_q, t) \times_X (J_q, s) \to J_q$$

induite par la composition des applications formelles de X dans elle-même et d'une application *identité*

$$e\colon X \to J_q$$

donnée par les jets d'ordre q de l'identité. L'espace des jets inversibles est de plus muni d'une *inversion*

$$i\colon J_q^* \to J_q^*$$

induite par l'inversion des difféomorphismes formels de X. Ces applications font de J_q^* un groupoïde agissant sur X. Elles sont compatibles aux projections naturelles π_q^{q+s} et donne une structure de groupoïde sur $J^* = \varprojlim J_q^*$, c'est-à-dire sur $X \times X$ muni de l'anneau $\mathcal{O}_{J^*} = \varinjlim \mathcal{O}_{J_q^*}$.

Définition 1.11. Un sous-groupoïde de J_q^* est une sous-variété Y_q donnée par un faisceau cohérent d'idéaux I_q satisfaisant :

(1) $I_q \subset \ker e^*$ (Y_q contient les éléments neutres) ;

(2) $i^* I_q \subset I_q$ (Y_q est stable par inversion) ;

(3) $c^* I_q \subset \pi_1^* I_q + \pi_2^* I_q$ (Y_q est stable par composition) ;

π désignant les projections de $(J_q, t) \times_X (J_q, s)$ sur J_q.

L'exemple 1.5 est un sous-groupoïde de J_1^*. La troisième inclusion est donnée par l'égalité

$$c^*(xz' - z) = xy'z' - z = (xy' - y)z' + (yz' - z).$$

Exemple 1.12. La sous-variété de J_2^* décrite par $\frac{y''}{y'} = 0$ est aussi un sous-groupoïde car

$$c^*\left(\frac{z''}{z'}\right) = \frac{z''}{z'}y' + \frac{y''}{y'}.$$

Une variante de cet exemple est la variété décrite par $\frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} = 0$ qui donne un sous-groupoïde de $J_1^*(\mathbb{C} - 0 \to \mathbb{C} - 0)$.

On a la version algébrique d'un résultat classique de géométrie différentielle.

Proposition 1.13 ([18]). *Si Y_q un sous-groupoïde de J_q^* alors $\mathrm{pr}_1 Y_q$ est un sous-groupoïde de J_{q+1}^*.*

Remarque 1.14. Soient Y_q un sous-groupoïde définie par I_q et $\mathcal{Y}$ la $\mathcal{D}$-variété définie par $\mathcal{I} = \bigcup \mathrm{pr}_s I_q$. Notons $\mathcal{Y}_q$ la sous-variété définie par $\mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_q^*}$. *A priori* $\mathcal{Y}_q$ n'est pas un sous-groupoïde de $J_q^*(X \to X)$ mais seulement en dehors d'une sous-variété S *i.e.* $\mathcal{Y}_q$ est un sous-groupoïde de $J_q^*(X - S \to X - S)$

Cette remarque montre que la définition naturelle suivante : *« une $\mathcal{D}$-variété $\mathcal{Y}$ est un sous-groupoïde de J^* s'il existe k tel que pour tout $q \geq k$ $\mathcal{Y}_q$ est un sous-groupoïde de J_q^* »* est très restrictive. De plus certains pseudo-groupes de transformations, comme les pseudo-groupes d'invariances de fonctions rationnelles, ne rentrent dans le cadre de cette définition qu'en dehors d'une sous-variété fermée de codimension au moins un (dans le cas précédent : le lieu d'indétermination).

Définition 1.15. Soit S une hypersurface de X. Un sous-groupoïde de $J_q^*(X \to X)$ à singularités sur S est une sous-variété fermée donnée par un faisceau cohérent d'idéaux I_q telle que la trace de la variété sur $J_q^*(X - S \to X - S)$ décrive un sous-groupoïde.

L'exemple 1.12 est un sous-groupoïde à singularité en 0.

Définition 1.16. Un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur X est une $\mathcal{D}$-variété réduite $\mathcal{Y}$ de J^*donnée par un idéal $\mathcal{I}$ vérifiant : il existe une hypersurface S de X et un entier k tels que pour tout $q \geq k$, $\mathcal{Y}_q$ est un sous-groupoïde de J_q^* à singularités sur S.

Remarque 1.17. Dans les conditions de la définition précedente, pour tout entier q, $\mathcal{Y}_q$ est un sous-groupoïde singulier. En effet fixons un entier q_0 tel que $\mathcal{Y}_{q_0}$ soit un groupoïde singulier sur S et prenons $q < q_0$. Par définition $\pi_q^{q_0}$ est dominant donc surjectif en dehors d'un ensemble algébrique S' de $\mathcal{Y}_q$, on a donc

$$c\big(\mathcal{Y}_q - (S' \cup \pi_1^{-1} S \cup \pi_2^{-1} S) \times_X \mathcal{Y}_q - (S' \cup \pi_1^{-1} S \cup \pi_2^{-1} S)\big) \subset \pi_q^{q_0} \mathcal{Y}_{q_0} \subset \mathcal{Y}_q.$$

Des arguments classiques (voir par exemple la preuve du lemme 4.3.3 de [18]) montrent alors que $\mathcal{Y}_q$ est un groupoïde à singularités sur une sous-variété $\widetilde{S}$ de X contenant S.

Nous allons rappeler quelques résultats sur l'action d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\mathcal{Y}$ sur J^* par composition au but. Nous noterons $c_{\mathcal{Y}}$ la restriction de c sur $(J^*, t) \times_X (\mathcal{Y}, s)$ à valeurs dans J^*.

Définition 1.18. Un invariant différentiel d'ordre q pour $\mathcal{Y}$ est une fonction rationnelle F sur J_q^* telle que $F \circ c_{\mathcal{Y}} = F \circ \pi$ (π désignant la première projection de $J_q^* \times_X \mathcal{Y}_q$ sur J_q^*).

Remarque 1.19. N'importe quelle fonction sur X que l'on remonte sur J_q^* par la projection source est un invariant.

Pour le groupoïde de l'exemple 1.5, $\frac{y}{y'}$ est un invariant différentiel. Pour ceux de l'exemple 1.12, la fraction $\frac{y''}{y'}$ (resp. $\frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y}$) est un invariant différentiel du premier (resp. deuxième) groupoïde.

On dira qu'un ensemble d'invariants différentiels $\{F_i\}_{1 \leq i \leq p}$ définis sur un ouvert de Zariski U forment un système complet d'invariants pour $\mathcal{Y}$ si $\mathcal{Y}$ est la $\mathcal{D}$-variété réduite définie par l'adhérence de Zariski de la $\mathcal{D}$-variété définie par les équations $F_i - F_i \circ e \circ s$ au-dessus de U.

Le théorème suivant est prouvé d'une manière analogue au théorème de Chevalley–Kolchin dans ([27], pp. 467–469, proposition 2.36 du chapitre 3). Il résulte aussi de l'existence d'un quotient générique pour une relation d'équivalence ([11], théorème 8.1).

Théorème 1.20 ([27], [11]). *Si $\mathcal{Y}$ est un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie agissant sur une variété X alors il admet un système complet d'invariants différentiels.*

Dans le contexte de cet article, le théorème 8.1 de [11] s'applique comme suit. On se place sur J_q^* (q assez grand pour que $\mathcal{Y}_q$ satisfasse aux hypothèses du théorème de Ritt–Raudenbush) et on considère la relation d'équivalence $\alpha \sim \beta$ si $s(\alpha) = s(\beta)$ et $\beta \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{Y}_q$. Le résultat précédent donne l'existence d'un ouvert de Zariski $U \subset J^*$ et d'une variété quotient de U par la relation d'équivalence. En tirant en arrière des fonctions rationnelles du quotient, on obtient un système complet d'invariants différentiels.

1.2.2. $\mathcal{D}$-algèbres de Lie. Une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie sur X est un faisceau d'algèbres de Lie de champs de vecteurs défini par un système d'équations aux dérivées partielles. La définition que nous allons rappeler met l'accent sur les équations définissant l'algèbre.

Un espace vectoriel V sur X est défini de la manière suivante. Lorsque X est affine, un espace vectoriel est un sous-espace d'un espace vectoriel trivial $X \times \mathbb{C}^n$ défini par des équations linéaires sur les fibres. Lorsque X n'est pas affine, on demande que V soit localement de la forme précédente et que les recollements soient linéaires sur les fibres. Cette définition autorise les fibres à changer de dimension.

Les espaces $J_q(TX_{/X})$ sont des espaces vectoriels sur X. Nous noterons $\mathcal{L}in(J_q(TX_{/X}))$ le $\mathcal{O}_X$-module des fonctions linéaires sur les fibres. Nous allons construire un crochet sur les sections des espaces $J_q(TX_{/X})$ généralisant le crochet de Lie des sections de TX. Ce crochet est le crochet de Spencer et la construction que nous allons donner est celle de [18].

Nous noterons $R_q(X)$ (ou juste R_q) l'espace des repères d'ordre q sur X qui s'identifie au sous-espace de J_q^* défini en fixant une valeur à l'application *source*. Cet espace est un fibré principal sur X via la projection *but* de groupe structural le groupe des jets d'ordre q de biholomorphismes de $(\mathbb{C}^n, 0)$ noté Γ_q^n. L'application $\lambda\colon R_q \times R_q \to J_q^*$ qui à deux repères r_q et s_q associe le jet $s_q \circ r_q^{-1}$ s'identifie au quotient sous l'action diagonale de Γ_q^n sur les deux facteurs. L'application tangente relativement à la première projection est $T\lambda\colon T(R_q \times R_q)_{/R_q} \to T(J_q^*)_{/X}$. Sa restriction le long de la diagonale, *i.e.* sur $T(R_q \times R_q)_{/R_q}|_{\mathrm{diag}}$, est à valeurs dans $T(J_q^*)_{/X}|_{\mathrm{id}}$. Faisons les identifications suivantes, $T(R_q \times R_q)_{/R_q}|_{\mathrm{diag}} \sim TR_q$ par la deuxième projection et $T(J_q^*)_{/X}|_{\mathrm{id}} \sim J_q(TX_{/X})$ par le lemme 1.3. On obtient ainsi une flêche $\underline{\lambda}\colon TR_q \to J_q(TX_{/X})$. C'est le quotient de TR_q sous l'action induite de Γ_q^n. Ceci permet de projeter le crochet de Lie de TR_q sur un crochet sur les sections de $J_q(TX_{/X})$. C'est le crochet de Spencer. On a les formules suivante pour ce crochet ([16]) :

$$[fj_qu, gj_qv] = fgj_q[u, v] + f\, L_u(g)\, j_qv - g\, L_v(f)\, j_qu$$

avec f et g dans $\mathcal{O}_X$, u et v des germes de champs de vecteurs sur X, j_q désigne la prise de jet d'ordre q et L_u la dérivée de Lie le long de u.

Définitions 1.21. Une sous-algèbre de Lie de $J_q(TX_{/X})$ est un sous-espace vectoriel dont les sections analytiques locales sont stables sous le crochet de Spencer.

Un $\mathcal{D}$-(sous)-espace vectoriel $\mathcal{L}$ de $J(TX_{/X})$ est une $\mathcal{D}$-variété définie par des équations linéaires, *i.e.* dans $\mathcal{L}in(J_q(TX_{/X}))$.

Une $\mathcal{D}$-(sous)-algèbre de Lie $\mathcal{L}$ de $J(TX_{/X})$ est un $\mathcal{D}$-espace vectoriel tel que les espaces $\mathcal{L}_q$ soient des sous-algèbres de Lie de $J_q(TX_{/X})$.

On construit une algèbre de Lie LY_q à partir d'un groupoïde de Lie singulier Y_q en considérant le tangent relatif à la projection source $TY_{q/X}|_{\mathrm{id}}$ ou son image dans

$J_q(TX_{/X})$ (par le lemme 1.3). La stabilité des sections du linéarisé sous le crochet de Spencer est une conséquence de la stabilité de la variété Y_q sous la composition. Nous renvoyons à [18] pour les détails ainsi que pour la preuve de la proposition suivante.

Proposition 1.22 ([18]). *Si $\mathcal{Y}$ est un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie, son tangent vertical le long de l'identité $T\mathcal{Y}_{/X}|_{\mathrm{id}} \subset J(TX_{/X})$ est une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie. Elle sera notée $L\mathcal{Y}$.*

1.2.3. Le groupoïde de Galois d'un feuilletage

Définition 1.23. Un feuilletage (singulier) de X est une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie $\mathcal{F}$ sans torsion sur X dont l'idéal $\mathcal{I}$ est différentiellement engendré par les équations $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_0(TX_{/X})}$ d'ordre 0.

Remarque 1.24. Une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie n'est pas toujours la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie. Prenons par exemple un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension d. D'après le théorème 1.20, s'il existe un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie dont $\mathcal{F}$ est la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie alors le feuilletage admet d intégrales premières rationnelles indépendantes.

Un feuilletage sans intégrales premières rationnelles est donc un exemple de $\mathcal{D}$-algèbre de Lie ne provenant pas d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie.

La définition suivante généralise le groupe de Galois différentiel d'une équation linéaire.

Définition 1.25 ([18]). Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur X. Le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ est le plus petit $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie dont la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie contient le feuilletage. Il sera noté $Gal(\mathcal{F})$.

Autrement dit $Gal(\mathcal{F})$ est le plus petit $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie contenant le pseudo-groupe $\mathcal{T}an(F)$. Par commodité, nous posons la définition suivante.

Définition 1.26. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur X. Un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie préservant le feuilletage dont la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie contient le feuilletage sera dit admissible pour $\mathcal{F}$.

Les $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie admissibles pour $\mathcal{F}$ sont les $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie contenant $Gal(\mathcal{F})$. La connaissance d'équations aux dérivées partielles satisfaites par les intégrales premières du feuilletage permet de construire des majorants de $Gal(\mathcal{F})$. Ce type de construction de $\mathcal{D}$-groupoïdes admissibles sera expliquée et utilisée dans la dernière partie de cet article.

Il existe toujours un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie admissible pour $\mathcal{F}$: le groupoïde $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ des transformations préservant le feuilletage. Celui-ci est aussi appelé pseudo-groupe des transformations basiques ou groupoïde basique. Si $\mathcal{F}$ est décrit par les 1-formes

$\omega_i = \sum w_i^k(x)dx_k, i = 1, \ldots, p$, les équations engendrant différentiablement l'idéal de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ sont :

$$\sum_{\sigma\in\Sigma(E)} \operatorname{sign}(\sigma)\Big(\sum w_\ell^j(y)y_j^{\epsilon_{\sigma(1)}}\Big)w_1^{\sigma(2)}(x)\ldots w_1^{\sigma(p+1)}(x) = 0$$

où $\ell = 1, \ldots, p$, E parcourt les sous-ensembles de cardinalité $p+1$ de $\{1, \ldots, n\}$ et $\Sigma(E)$ est le groupe des permutations de E. La notation $\sigma(i)$ désigne l'image sous σ du i-ème plus petit élément de E et sign est la signature.

Nous préfèrerons l'écriture plus synthétique $y^*\omega_\ell \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0$.

1.3. Forme de Maurer–Cartan d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie et suites de Godbillon–Vey d'un feuilletage. La forme de Maurer–Cartan d'un groupoïde de Lie est une 1-forme sur le groupoïde invariant sous l'action du groupoïde sur lui-même par composition au but. Pour un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie, la forme de Maurer–Cartan provient de la restriction de celle de J^*.

1.3.1. Forme de Maurer–Cartan de J^*. L'espace J_q^* n'agit pas sur son espace tangent et la forme de Maurer–Cartan provient de l'action de J_{q+1}^* sur le tangent de J_q^*.

Plus précisement, la structure de groupoïde de J_q^* donnée par la composition

$$c : (J_q^*, t) \times_X (J_q^*, s) \to J_q^*.$$

se prolonge en une structure de groupoïde sur l'espace $J_1^*(J_{q\,/\mathrm{source}}^*)$ des jets de sections de la projection *source* se projetant sur les sections de $J_1^*(X \times X_{/\mathrm{source}})$. Ce groupoïde agit naturellement sur $TJ_{q\,/\mathrm{source}}^*$. Cette action se comprend plus facilement en utilisant la présentation suivante. Soit φ une section analytique locale de $J_{q\,/\mathrm{source}}^*$ sur un ouvert U dont la composante φ_0 d'ordre 0 est inversible. Par les formules de composition, elle induit un difféomorphisme de l'ouvert de J_q^* des jets de but dans U sur l'ouvert des jets de but dans $\varphi_0(U)$. Le difféomorphisme induit sur le tangent de J_q^* ne dépend que du premier jet de la section et donne l'action.

Nous noterons Tc cette action :

$$Tc : (TJ_{q\,/\mathrm{source}}^*, t) \times_X (J_1^*(J_{q\,/\mathrm{source}}^*), s) \to TJ_{q\,/\mathrm{source}}^*.$$

Cette action induit une action de J_{q+1}^* sur $TJ_{q\,/\mathrm{source}}^*$ par l'inclusion canonique $J_{q+1}^* \subset J_1^*(J_{q\,/\mathrm{source}}^*)$ et donne un isomorphisme

$$TJ_{q\,/\mathrm{source}}^*|_{\mathrm{id}} \times_X J_{q+1}^* \to TJ_{q\,/\mathrm{source}}^*.$$

Après identification de $TJ^*_{q\,/\mathrm{source}}|_{\mathrm{id}}$ avec $J_q(TX_{/X})$, l'image de la première projection donne une application

$$\Theta : TJ^*_{q\,/\mathrm{source}} \to J_q(TX_{/X})$$

invariante sous J^*_{q+1}.

Définition 1.27. Cette forme est la forme de Maurer–Cartan de J^*_{q+1}.

Les formes construites ainsi étant compatibles aux projections π_q^{q+k}, la forme induite sur J^* sera appelée forme de Maurer–Cartan de J^*.

Remarque 1.28. Fixons un point $x_0 \in X$ et identifions la sous-variété des jets de source x_0 avec l'espace des repères, $R_q(X)$ ainsi que $J_q(TX_{/X})|_{x_0}$ avec $J_q(\chi(\mathbb{C}^n, 0))$ l'espace des jets d'ordre q de champs de vecteurs en 0. On obtient alors une forme sur $R_q(X)$ à valeurs dans $J_q(\chi(\mathbb{C}^n, 0))$ invariante sous l'action de J^*_{q+1}. Nous noterons

$$\Theta|_{x_0} : TR_q(X) \to J_q(\chi(\mathbb{C}^n, 0))$$

cette forme.

Il existe un second crochet sur $J_q(TX_{/X})$ différent du crochet de Spencer. Il est à valeurs dans $J_{q-1}(TX_{/X})$. C'est le crochet fibre à fibre. Il est défini en coordonnées locales par les formules

$$\{u, v\} = j_{q-1}[\tilde{u}, \tilde{v}]$$

où u et v sont des jets en un point $x \in X$, $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ sont des champs formels en x les prolongeant, [,] est le crochet de Lie et j_{q-1} est la prise du jet d'ordre $q-1$.

La forme de Maurer–Cartan vérifie des équations de structure reliant la différentielle relative à la projection *source* et le crochet fibre à fibre sur $J_q(TX_{/X})$:

$$d_{/s}\pi^q_{q-1}\Theta = -\frac{1}{2}\{\Theta, \Theta\},$$

où π^q_{q-1} est la projection de $J_q(TX_{/X})$ sur $J_{q-1}(TX_{/X})$. Nous renvoyons à [13], [29] pour plus de détails.

Ces équations se restreignent aux espaces de jets de source fixée. En choisissant une base de l'espace vectoriel des jets d'ordre q de champs de vecteurs en x_0 et en écrivant $\Theta|_{x_0}$ en coordonnées, on obtient une famille de 1-formes invariantes sur $R_q(X)$. En choisissant la base monomiale $\frac{x^\alpha}{\alpha!}\frac{\partial}{\partial x_i}$, on obtient une suite de formes θ_i^α satisfaisant aux identités différentielles :

$$d\theta_i^\alpha = \sum_j \theta_j^0 \wedge \theta_i^{\alpha+\epsilon_j} + \sum_{j,|\beta|\geq 1} \binom{\alpha}{\beta}\theta_j^\beta \wedge \theta_i^{\alpha-\beta+\epsilon_j}$$

pour $|\alpha| \leq q-1$ et $\binom{\alpha}{\beta} = \prod \binom{\alpha_i}{\beta_i}$ si $\alpha_i \geq \beta_i$ et zéro sinon. Nous les appellerons formes de Cartan d'ordre q et les identités précédentes équations de structures d'ordre q.

Le groupe algébrique des jets d'ordre $q+1$ de source et but x_0, Γ^n_{q+1}, agit sur $R_q(X)$ par composition à la source. La composition au but commutant avec la composition à la source, Γ^n_{q+1} transforme des formes invariantes en des formes invariantes satisfaisant les mêmes identités différentielles. Soit φ un élément de Γ^n_{q+1}, notons s_φ l'action par composition à la source sur $R_q(X)$ et φ^* celle sur $J_q(\chi(\mathbb{C}^n, 0))$. On a la formule suivante :

$$s^*_\varphi \Theta|_{x_0} = \varphi^* \circ \Theta|_{x_0}.$$

1.3.2. Forme de Maurer–Cartan de $\mathcal{Y}$. Considérons maintenant $\mathcal{Y}$ un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie agissant sur X.

Définition 1.29. La restriction de Θ sur $\mathcal{Y}_{q+1}$ est à valeurs dans le sous-espace vectoriel $L\mathcal{Y}_q$:

$$\Theta_{\mathcal{Y}} \colon T\mathcal{Y}_{q/X} \to L\mathcal{Y}_q \subset J_q(TX_{/X}).$$

C'est la forme de Maurer–Cartan d'ordre q de $\mathcal{Y}$.

Dans la suite nous nous restreindrons à l'étude des $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie transitifs et travaillerons dans le cadre de la définition suivante.

Définition 1.30. Soit $\mathcal{Y}$ un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur X transitif. Fixons une source x_0 régulière pour $\mathcal{Y}$ (*i.e.* hors du lieu singulier donné dans la définition 1.16) et notons $R_q(\mathcal{Y})$ l'espace des jets de $\mathcal{Y}$ de source x_0. On définit une forme invariante sur $R_q(\mathcal{Y})$ en restreignant la forme de Maurer–Cartan :

$$\Theta_{\mathcal{Y}}|_{x_0} \colon TR_q(\mathcal{Y}) \to J_q(\chi(\mathbb{C}^n, 0)).$$

Les orbites de l'action de $\mathcal{Y}_{q+1}$ sur $R_q(X)$ sont les sous-variétés décrites par le théorème 1.20. Une orbite particulière est donnée par $R_q(\mathcal{Y})$ mais le groupe Γ^n_{q+1} agissant par composition en x_0 mélangent ces orbites. La restriction de Θ sur une orbite permet de construire un système de formes invariantes satisfaisant des équations de structures particulières.

1.3.3. Suites de Godbillon–Vey générales

Définition 1.31. Une suite de Godbillon–Vey pour un feuilletage de codimension p est une suite de 1-formes rationnelles $\{\omega_i^\alpha; i \in \{1, \dots, p\}, \alpha \in \mathbb{N}^p\}$ telles que $\{\omega_i^0; i \in \{1, \dots, p\}\}$ définissent le feuilletage et

$$d\omega_i^\alpha = \sum_j \omega_j^0 \wedge \omega_i^{\alpha+\epsilon_j} + \sum_{j, |\beta| \geq 1} \binom{\alpha}{\beta} \omega_j^\beta \wedge \omega_i^{\alpha-\beta+\epsilon_j}$$

avec $\binom{\alpha}{\beta} = \prod \binom{\alpha_i}{\beta_i}$ si $\alpha_i \geq \beta_i$ et zéro sinon.

Proposition 1.32. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier de X. Quitte à se placer sur $\widetilde{X} \to X$ une variété finie au-dessus d'un ouvert de Zariski de X, il existe toujours une suite de Godbillon–Vey pour $\mathcal{F}$.*

Cette proposition est classique, nous allons en donner une preuve utilisant les constructions précédentes. Nous allons d'abord construire ces formes sur le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ et les descendre ensuite sur X.

Preuve. Un feuilletage $\mathcal{F}$ définit un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$: le groupoïde des transformations locales préservant le feuilletage. Pour tout entier q, $\mathcal{F}_q \subset T\mathrm{Aut}(\mathcal{F})_{q\,/\mathrm{source}}|_{\mathrm{id}}$ et l'action de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ par composition au but permet de prolonger $\mathcal{F}_q$ en un sous-espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{F}_q}$ de $T\mathrm{Aut}(\mathcal{F})_{q\,/\mathrm{source}}$.

Soit x_0 un point régulier de $\mathcal{F}$ (*i.e.* au voisinage duquel $\mathcal{F}$ est facteur direct). C'est aussi un point régulier de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$. Les jets solutions de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})_q$ de source x_0 forment une sous-variété de $R_q(X)$ noté $R_q(\mathcal{F})$.

Définition 1.33. Les formes sur $R_q(\mathcal{F})$ s'annulant sur $\widetilde{\mathcal{F}_q}$ seront dites transverses à $\mathcal{F}$.

On construit une forme transverse de la manière suivante. Soit $N_{\mathcal{F}}$ la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ et soit $\pi : N_{\mathcal{F}\,q}|_{x_0} \to V_q$ le quotient par $\mathcal{F}_q|_{x_0}$.

Définition 1.34. La projection,

$$\pi \circ \Theta_{\mathrm{Aut}(\mathcal{F})}|_{x_0} : TR_q(\mathcal{F}) \to V$$

est une forme transverse au feuilletage. Elle sera notée $\Theta_{\mathcal{F}}$

Le crochet sur la fibre de $N_{\mathcal{F}}$ en x_0 induit un crochet sur V. La forme transverse vérifie les équations de structure induites :

$$d\Theta_{\mathcal{F}} = -\frac{1}{2}\{\Theta_{\mathcal{F}}, \Theta_{\mathcal{F}}\}.$$

Soit p la codimension du feuilletage. L'espace vectoriel V_q s'identifie à $J_q(\chi(\mathbb{C}^p, 0))$. En écrivant $\Theta_{\mathcal{F}}|_{x_0}$ dans la base monomiale $\frac{x^\alpha}{\alpha!}\frac{\partial}{\partial x_i}$ sur $J_q(\chi(\mathbb{C}^p, 0))$, on obtient une suite de 1-formes invariantes transverses à $\mathcal{F}$: θ_i^α, $1 \leq i \leq p$, $\alpha \in \mathbb{N}^p$, satisfaisant les équations de structures d'ordre q en dimension p.

Soit $\widetilde{X} \to X$ une variété au-dessus d'un ouvert de Zariski dense de X tel qu'il existe une section $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X} \times_X R_q(\mathcal{F})$ de la projection *but*. Les formes θ_i^0 s'annulent sur $\widetilde{\mathcal{F}}_0$. Par construction, ce feuilletage sur $R_0(\mathcal{F}) = X$ est $\mathcal{F}$. La suite $\{\omega_i^\alpha = f^*\theta_i^\alpha\}$ est une suite de Godbillon–Vey pour $\mathcal{F}$. □

1.3.4. Suites de Godbillon–Vey spéciales

Définition 1.35. Soient $\mathcal{Y}$ un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie transitif admissible pour un feuilletage $\mathcal{F}$ et $\widetilde{X} \to X$ une variété au-dessus d'un ouvert de Zariski de X tel qu'il existe une section $f\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X} \times_X R_q(\mathcal{Y})$ de la projection *but*. Les formes $\omega_i^\alpha = f^*\theta_i^\alpha$ seront appellées suite de Godbillon–Vey spéciale associée a $\mathcal{Y}$

Dans le cas trivial $\mathcal{Y} = \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$, la suite de Godbillon–Vey obtenue est dite générale. Lorsque $\mathcal{Y} = Gal(\mathcal{F})$, nous dirons qu'elle est minimale. Les cas intermédiaires sont dits spéciaux. Dans la suite de cet article, nous regarderons particulièrement le cas $X = \mathbb{C}^3$. On peut toujours choisir une section à coefficients algébriques de la projection but et construire ainsi une suite de formes à coefficients algébriques sur $\mathbb{C}^3$.

L'objet de cet article est l'étude d'un feuilletage de codimension deux. La classification locale des pseudo-groupes de Lie réguliers agissant sur $\mathbb{C}^2$ a été donnée par S. Lie [17]. Dans [3], É. Cartan donne une preuve de la classification de S. Lie en utilisant ses équations de structure. Appliquée à la détermination des équations de structure possibles pour les formes à valeurs dans $J_q(\chi(\mathbb{C}^2, 0))$, la preuve de Cartan permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 1.36. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{C}^n$ de codimension deux, défini par une 2-forme fermée γ. Le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\mathrm{Inv}(\gamma)$ d'invariance de cette forme est un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie admissible pour $\mathcal{F}$. Si le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ est strictement plus petit que $\mathrm{Inv}(\gamma)$ alors on est dans un des cas suivant :*

- *$Gal(\mathcal{F})$ est intransitif : $\mathcal{F}$ admet une intégrale première rationnelle,*
- *$Gal(\mathcal{F})$ est imprimitif en codimension un : il existe une 1-forme à coefficients algébriques intégrable s'annulant sur $\mathcal{F}$,*
- *$Gal(\mathcal{F})$ est transversalement affine : il existe un vecteur de 1-formes à coefficients algébriques $\Omega^0 = \binom{\omega_1^0}{\omega_2^0}$ définissant le feuilletage et une matrice de 1-formes à coefficients algébriques Ω^1 de trace nulle telle que :*

$$d\Omega^0 = \Omega^1 \wedge \Omega^0 \quad \text{et} \quad d\Omega^1 = \Omega^1 \wedge \Omega^1.$$

Un tel feuilletage induit en dehors du lieu singulier de $Gal(\mathcal{F})$ un feuilletage admettant un atlas dont les recollements transverses sont des transformations affines preservant le volume. Une telle suite sera appelée suite de Godbillon–Vey de type asl_2 ou encore asl_2-suite.

Nous donnons en annexe la preuve de Cartan de ce théorème.

2. Le groupoïde de Galois de P_1

Le feuilletage associé à la première équation de Painlevé, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x$, est donné par le champ de vecteurs

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + x)\frac{\partial}{\partial y'}$$

sur $\mathbb{C}^3$ avec les coordonnées (x, y, y').

Ce champ de vecteurs étant de divergence nulle, le feuilletage est défini par la 2-forme fermée $\gamma = i_{X_1} dx \wedge dy \wedge dy'$.

Théorème 2.1. *Le groupoïde de Galois de P_1 est le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie* Inv(γ) *laissant la forme γ invariante.*

On considèrera la déformation triviale suivante du champ X_1 :

$$X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + \alpha^5 x)\frac{\partial}{\partial y'}, \quad \alpha \neq 0.$$

Ce champ est de poids -1 sous l'action de

$$\Sigma = x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y} - 3y'\frac{\partial}{\partial y'} - \alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}$$

c'est-à-dire que $[\Sigma, X_\alpha] = -X_\alpha$. Le flot de Σ donne une équivalence orbitale entre les différents champs X_α tant que $\alpha \neq 0$. Lorsque $\alpha = 0$, la première équation de Painlevé dégénère sur une équation particulièrement simple.

L'organisation des calculs se fera suivant les idées de J. Drach [8]. Soit π_α la projection algébrique de $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_\alpha$ sur $\mathbb{C}^3$ donnée par le flot de Σ :

$$\pi_\alpha(x, y, y', \alpha) = \left(\alpha x, \frac{y}{\alpha^2}, \frac{y'}{\alpha^3}, 1\right).$$

Supposons qu'un des trois systèmes d'équations aux dérivées partielles donné par le théorème 1.36 admette une solution algébrique. En considérant leurs images inverses par π_α et en développant les équations et la solution en puissances de α, on obtient une suite de systèmes plus simples ayant encore des solutions algébriques. Ces équations sont de la forme $X_0 R = *$. On les étudiera dans les coordonnées adaptées $x, y, u = y'^2 - 4y^3$.

Nous noterons $p_\Sigma(\,.\,)$ le poids d'une fonction ou d'une forme homogène sous Σ et $\deg_{a,b,\ldots}$ les degrés par rapport aux variables $a, b, \ldots$ ayant chacune le degré 1.

Un polynôme $P(x, y, y')$ se prolonge en une fraction de poids nul sur $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_\alpha$ par

$$\pi_\alpha^* P = P\left(\alpha x, \frac{y}{\alpha^2}, \frac{y'}{\alpha^3}\right) \in \mathbb{C}(x, y, y', \alpha)$$

et en un polynôme en x, y, y' et α homogène pour Σ en multipliant par une puissance convenable de α. Nous prolongerons les formes de $\mathbb{C}^3$, $a\,dx + b\,dy + c\,dy'$, à $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_\alpha$ par $(\pi_\alpha^* a)\alpha dx + (\pi_\alpha^* b)\frac{dy}{\alpha^2} + (\pi_\alpha^* c)\frac{dy'}{\alpha^3}$. Une forme intégrable ne se prolongera pas en une forme intégrable mais seulement intégrable modulo $d\alpha$.

Le feuilletage donné par le champ X_1 est défini par les deux 1-formes $y'dy' - (6y^2 + x)dy$ et $\frac{dy}{y'} - dx$. Nous noterons

$$\omega_1^0 = y'dy' - (6y^2 + \alpha^5 x)dy \text{ et } \omega_2^0 = \frac{dy}{y'} - dx$$

leurs prolongements au paramètre α et $\omega_1^0|_0$, $\omega_2^0|_0$ (resp. $\omega_1^0|_1$, $\omega_2^0|_1$) les restrictions à $\{\alpha = 0\}$ (resp. à $\{\alpha = 1\}$). Ces formes forment les vecteurs Ω^0, $\Omega^0|_0$ et $\Omega^0|_1$.

2.1. Étude préliminaire de l'équation réduite X_0. Le champ de vecteurs

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + 6y^2\frac{\partial}{\partial y'}$$

admet une intégrale première rationnelle $u = y'^2 - 4y^3$ et une autre transcendante $x - \int \frac{1}{4y^3+u}dy$. Nous utiliserons souvent les formules suivantes :

$$\begin{aligned} X_0\left(\left(x + 2\frac{y}{y'}\right)^{n+1}\right) &= \left(x + 2\frac{y}{y'}\right)^n \frac{(n+1)3u}{y'^2} \\ X_0\left(\left(7x + 20\frac{y}{y'} - 24\frac{y^4}{y'^3}\right)^{n+1}\right) &= \left(7x + 20\frac{y}{y'} - 24\frac{y^4}{y'^3}\right)^n \frac{(n+1)27u^2}{y'^4}. \end{aligned} \tag{1}$$

Lemme 2.2. *Si η_0 est une 1-forme polynomiale, intégrable, telle que $\eta_0(X_0) = 0$ et $i_{X_0}d\eta_0 = 0$ alors*

$$\eta_0 = f(u)du \quad ou \quad \eta_0 = f(u)\Big(udx - (2xy^2 + y')dy + \frac{1}{3}(xy' + 2y)dy'\Big).$$

Preuve. Écrivons $\eta_0 = a\,du + b\,(dy - y'dx)$. Si $b = 0$, on trouve la première expression. Sinon, en écrivant la condition d'intégrabilité de η_0, on obtient l'équation

$$-X_0\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{6y^2}{y'}\frac{a}{b} - \frac{1}{2y'} = 0.$$

En utilisant les formules (1), on intègre cette équation. On trouve

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{6u}(xy' + 2y).$$

On en déduit que $\eta_0 = f\big((\frac{x+2y/y'}{6u})du - \frac{1}{y'}(dy - y'dx)\big)$. En écrivant la condition $i_{X_0}d\eta_0 = 0$, on trouve que $X_0 f = 0$, donc f est une fonction de u. En développant η_0, on trouve la seconde expression. □

Lemme 2.3. *Le feuilletage défini par X_0 n'admet pas de suite de Godbillon–Vey rationnelle de type asl_2 commençant par $\omega_1^0|_0$ et $\omega_2^0|_0$.*

Preuve. Supposons qu'il existe une matrice de 1-formes $\Omega^1|_0$ de trace nulle satisfaisant :

$$\begin{aligned} d\Omega^0|_0 &= \Omega^1|_0 \wedge \Omega^0|_0, \\ d\Omega^1|_0 &= \Omega^1|_0 \wedge \Omega^1|_0. \end{aligned}$$

On peut supposer en toute généralité que ces formes sont homogènes sous Σ. La première égalité donne

$$\Omega^1|_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{y'^3} & 0 \end{pmatrix} dy + A\,\omega_1^0|_0 + B\,\omega_2^0|_0$$

avec $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et trace A = trace $B = 0$.
La deuxième égalité donne un premier système d'équations que nous allons résoudre :

$$i_{X_0} d\Omega^1|_0 = \left[\Omega^1|_0(X_0), \Omega^1|_0\right],$$

où $[M_1, M_2]$ est le crochet de Lie $M_1M_2 - M_2M_1$. Calculons les deux membres de cette égalité :

- $i_{X_0} d\Omega^1|_0 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/y'^4 & 0 \end{pmatrix} + X_0A + \frac{1}{y'^2}B\right)\omega_1^0|_0 + X_0B\,\omega_2^0|_0$;
- $\left[\Omega^1|_0(X_0), \Omega^1|_0\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/y'^2 & 0 \end{pmatrix}, A\right]\omega_1^0|_0 + \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/y'^2 & 0 \end{pmatrix}, B\right]\omega_2^0|_0.$

En identifiant les coefficients de $\omega_1^0|_0$ et ceux de $\omega_2^0|_0$, on obtient les deux systèmes suivants,

$$X_0A = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{y'^2} & 0 \end{pmatrix}, A\right] - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{y'^4} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{y'^2}B \tag{2a}$$

$$X_0B = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{y'^2} & 0 \end{pmatrix}, B\right]. \tag{2a}$$

Si $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right)$, on écrit puis résout le système (2a) en utilisant les formules (1) :

$$\begin{aligned} X_0b &= 0 && \Rightarrow && b = b(u), \\ X_0a &= \frac{-b}{y'^2} && \Rightarrow && a = \frac{-b}{3u}(x + 2y/y'), \\ X_0c &= \frac{2a}{y'^2} && \Rightarrow && c = \frac{-b}{9u^2}(x + 2y/y')^2, \end{aligned} \tag{3}$$

sous l'hypothèse $b \neq 0$ (les résultats sont analogues lorsque b est nul). On résout ensuite l'équation (2a). Si $A = \begin{pmatrix} -c & a \\ d & c \end{pmatrix}$, le système donne

$$X_0 d = \frac{-3c}{y'^2} - 3\frac{1}{y'^4} \Rightarrow d = \frac{b}{27u^3}(x + 2y/y')^3 - \frac{1}{9u^2}\left(7x + 20\frac{y}{y'} - 24\frac{y^4}{y'^3}\right).$$

On obtient une contradiction en considérant l'équation suivante :

$$i_{\frac{\partial}{\partial x}} d\Omega^1|_0 = \left[\Omega^1|_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \Omega^1|_0\right].$$

En identifiant les coefficients de $\omega_1^0|_0$ dans cette équation, on obtient

$$\frac{1}{y'}\frac{\partial B}{\partial y'} + \frac{\partial A}{\partial x} = [A, B],$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{y'}\frac{\partial a}{\partial y'} + \frac{\partial c}{\partial x} = ac - db, \tag{4a}$$

$$\frac{1}{y'}\frac{\partial b}{\partial y'} + \frac{\partial a}{\partial x} = -2(bc + a^2), \tag{4b}$$

$$\frac{1}{y'}\frac{\partial c}{\partial y'} + \frac{\partial d}{\partial x} = 2(da - c^2). \tag{4c}$$

L'équation (4b) s'écrit $2b'(u) - \frac{1}{3u}b(u) = 0$. La seule solution rationnelle est $b = 0$. Dans ce cas $a = a(u)$ et l'équation (4b) donne $a = 0$. Les équations (3) impliquent $c = c(u)$ et $d = \frac{-3c}{y'^2} - \frac{1}{9u^3}\left(7x + 20\frac{y}{y'} - 24\frac{y^4}{y'^3}\right)$. L'équation (4c) se réécrit alors

$$2c'(u) - \frac{7}{9u^3} = -2c^2.$$

Une solution de cette équation ne pouvant pas avoir de pôle d'ordre entier en 0, elle ne peut pas avoir de solution rationnelle. On aboutit à une contradiction qui prouve le lemme. □

2.2. Le groupoïde de Galois de X_1 est transitif. Le résultat suivant provient de [24], on pourra aussi consulter [8], [14].

Proposition 2.4. *Le champ X_1 n'a pas d'intégrale première rationnelle.*

Preuve. Si H_1 est une telle intégrale, prolongeons-la en une intégrale du champ X_α. On peut écrire $H_\alpha = H_0 + H_1\alpha + \cdots$ après avoir fait une division suivant les puissances croissantes et multiplié par une puissance convenable de α. On peut supposer que H_0 n'est pas constante. En développant l'équation $X_\alpha H_\alpha = 0$ suivant les puissances de α, on obtient pour $0 \leq i \leq 4$

$$X_i H_i = 0,$$

qui implique $H_i = f_i(u)$ où $u = y'^2 - 4y^3$ et f_i est rationnelle. Le coefficient de α^5 donne

$$X_0 H_5 + x\frac{\partial f_0(u)}{\partial y'} = 0.$$

Dans les coordonnées x, y, u, cette dernière équation s'écrit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{4y^3+u}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(H_5^0 + \sqrt{4y^3+u}\, H_5^1\right) = -2xf_0'(u)\sqrt{4y^3+u}$$

où $H_1 = H_5^0 + \sqrt{4y^3+u}\, H_5^1$ et $H_5^i \in \mathbb{C}(x, y, u)$. En identifiant les termes libres de radicaux des deux membres, d'une part, et ceux contenant le radical, d'autre part, on obtient les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial H_5^0}{\partial y} + \frac{\partial H_5^1}{\partial x} = -2xf_0'(u), \tag{5a}$$

$$\frac{\partial H_5^0}{\partial x} + (4y^3+u)\frac{\partial H_5^1}{\partial y} + 6y^2 H_5^1 = 0. \tag{5b}$$

En dérivant (5b) par rapport à x et en utilisant (5a), on obtient

$$\frac{\partial^2 H_5^0}{\partial x^2} - (4y^3+u)\frac{\partial^2 H_5^0}{\partial y^2} - 6y^2\frac{\partial H_5^0}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Supposons que H_5^0 ait un pôle d'ordre n par rapport à y en $a \in \overline{\mathbb{C}[x,u]}^{\mathrm{alg}}$, la clôture algébrique de $\mathbb{C}[x, u]$. En développant H_5^0 en série autour de a, on obtient une série d'équations différentielles. La première,

$$\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 - (4a^3+u) = 0,$$

implique $4a^3 = -u$. La suivante donne $12(n+1) = -6a^2$. Ainsi H_5^0 est un polynôme. En écrivant $H_5^0 = \alpha_n y^n + \cdots$ dans (6), on obtient $n = 0$ puis

$$H_5^0 = a(u)x + b(u).$$

L'équation (5a) donne $\frac{\partial H_5^1}{\partial x} = -2xf_0'(u)$. En dérivant (5b) par rapport à x, on obtient $\frac{\partial H_5^1}{\partial x} = 0$, ce qui implique $f_0' = 0$. Ceci contredit le choix de H et prouve la proposition. $\square$

Corollaire 2.5. *Le champ X_1 n'admet pas d'hypersurface algébrique invariante.*

Preuve. Soit P l'équation d'une hypersurface invariante. Prolongeons P au paramètre α. On obtient un polynôme satisfaisant

$$X_\alpha P = LP.$$

On a $p_\Sigma(L) = -1$ d'une part et d'autre part comme $deg_{\{x,y,y'\}}(X_\alpha) = 1$ on a $deg_{\{x,y,y'\}}(L) \leq 1$ et un calcul direct donne $deg_{\{x\}}(L) \leq 0$. Tout ceci implique que L est nul et donc que P aussi. □

2.3. Le groupoïde de Galois de X_1 est transversalement primitif.

Proposition 2.6. *Le feuilletage donné par X_1 n'est inclus dans aucun feuilletage de codimension un donné par une 1-forme algébrique.*

Supposons qu'il existe une 1-forme algébrique η intégrable, $\eta \wedge d\eta = 0$ et telle que $\eta(X_1) = 0$.

Lemme 2.7. *Une telle forme peut être choisie polynomiale.*

Preuve. Soit η une telle forme que nous normalisons $\eta = dx + a\,dy + b\,dy'$. Soit Z le lieu de ramification de cette forme sur $\mathbb{C}^3$. D'après le corollaire 2.5, Z est transverse aux trajectoires de X_1. Plaçons-nous au voisinage analytique d'un point de Z. N'importe quelle intégrale première au voisinage d'un point de la trajectoire passant par p se prolonge de manière univaluée sur un voisinage de p. La forme η est donc univaluée sur ce voisinage. Le lieu de ramification Z est vide et la forme est rationnelle. □

Choisissons une de ces formes et prolongeons-la au paramètre α.

Lemme 2.8 ([8]). *La forme η_α peut être choisie telle que $i_{X_\alpha} d\eta_\alpha = 0$.*

Preuve. Choisissons

$$\eta_\alpha = -(Py' + Q(6y^2 + \alpha^5 x))dx + Pdy + Qdy'$$

avec P et Q premiers entre eux. En écrivant la condition d'intégrabilité, on obtient :

$$QXP - PXQ + 12yQ^2 - P^2 = 0.$$

D'après le théorème de Bezout, il existe donc un polynôme L tel que :

$$\begin{cases} XP + 12yQ = LP, \\ XQ + P = LQ. \end{cases}$$

En calculant les degrés, on obtient que L doit être de degré 1 en x, y, y' et de poids -1 par rapport à Σ. Donc $L = c\alpha^2 x$ où c est une constante. En calculant les degrés en x, on obtient $c = 0$. Un calcul direct montre que ceci implique le lemme. $\square$

Preuve de la proposition 2.6. Quitte à multiplier par un facteur convenable, nous pouvons supposer que η_α s'écrit $\eta_0 + \alpha\eta_1 + \cdots$ avec η_i des formes polynomiales et $\eta_0 \neq 0$. Les équations

$$\begin{aligned} \eta_\alpha(X_\alpha) &= 0, \\ i_{X_\alpha} d\eta_\alpha &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

relient les formes η_0 et η_1. Écrivons la forme η_1 de la manière suivante

$$\eta_1 = a\,dx + b\,\omega_1^0|_0 + c\,\omega_2^1|_0.$$

Le terme d'ordre 0 dans les équations (7) donne $\eta_0(X_0) = 0$ et $i_{X_0} d\eta_0 = 0$. Ces équations sont résolues par le lemme 2.2. Celles d'ordre 1 donne $\eta_0(x\frac{\partial}{\partial y'}) + \eta_1(X_0) = 0$ et $i_{x\frac{\partial}{\partial y'}} d\eta_0 + i_{X_0} d\eta_1 = 0$. En écrivant toutes ces équations dans la base $(dx, \omega_1^0|_0, \omega_2^1|_0)$, on obtient

$$\begin{aligned} a &= -x\,\eta_0(\frac{\partial}{\partial y'}), \\ i_{x\frac{\partial}{\partial y'}} d\eta_0 &= g\,\omega_2^0|_0, \\ X_0 c &= X_0 a - \frac{\partial a}{\partial x} - g, \\ X_0 b &= -\frac{c}{y'^2} + \frac{1}{y'}\frac{\partial a}{\partial y'}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dans chacun des cas du lemme 2.2, nous allons prouver qu'il n'existe pas de triplet (a, b, c) solution de ces équations tel que la forme η_1 soit polynomiale. Ces deux cas seront traités suivant le poids de η_α.

Premier cas, $p_\Sigma \eta_\alpha \equiv 0 \mod 6$. D'après le lemme 2.2, $\eta_0 = f(u)du$. Les équations portant sur les coefficients de η_1 deviennent

$$a = -2f(u)y'x, \tag{9a}$$

$$g = 0, \tag{9b}$$

$$X_0 c = -12 f(u) x y^2, \tag{9c}$$

$$X_0 b = -\frac{c}{y'^2} - \frac{2f(u)x}{y'} - 4f'(u)xy'. \tag{9d}$$

On résout (9c) : $c = 2f(u)(y - xy')$. On obtient ensuite pour l'équation (9d) :

$$X_0 b = -4f'(u)xy' - \frac{2f(u)y}{4y^3 + u}.$$

Dans les coordonnées x, y, u, où $b = b_0 + \frac{1}{\sqrt{4y^3+u}} b_1$ avec b_0 et b_1 des polynômes et $X_0 = \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{4y^3 + u}\frac{\partial}{\partial y}$, l'équation ci-dessus se réécrit :

$$\frac{\partial b_0}{\partial x} + \frac{\partial b_1}{\partial y} - \frac{6y^2}{4y^3 + u} b_1 = -\frac{2f(u)y}{4y^3 + u}, \tag{10a}$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial x} + (4y^3 + u)\frac{\partial b_0}{\partial y} = -4f'(u)x(4y^3 + u). \tag{10b}$$

En dérivant (10a) par rapport à x et en tenant compte de la dérivée de (10b) par rapport à y, on obtient

$$\frac{\partial^2 b_0}{\partial x^2} - (4y^3 + u)\frac{\partial^2 b_0}{\partial y^2} - 6y^2 \frac{\partial b_0}{\partial y} = 24f'(u)y^2 x. \tag{11}$$

On en déduit que b_0 est un polynôme d'ordre 1 en y puis

$$b_0 = 4f'(u)xy + a(u)x + b(u)\ ;\ \frac{\partial b_1}{\partial x} = 0.$$

En reportant b_0 dans (10a), on obtient

$$(4y^3 + u)\frac{\partial b_1}{\partial y} - 6y^2 b_1 = -16f'(u)y^4 - 4a(u)y^3 + (f(u) - 4uf'(u))y - ua(u),$$

ce qui implique que le degré de b_1 en y est inférieur à deux. En posant $b_1 = \alpha_2 y^2 + \alpha_1 y^1 + \alpha_0$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} -16f'(u) = 2\alpha_2, \\ -4a(u) = -2\alpha_1, \\ 0 = -6\alpha_0, \\ f(u) - 4uf'(u) = 2\alpha_2 u, \\ ua(u) = u\alpha_1. \end{cases}$$

Ce système implique l'existence d'une constante c telle que $f = \frac{c}{u^{1/12}}$. Or f est un polynôme donc f est nul, ce qui contredit le choix de la forme η_α.

Deuxième cas, $p_\Sigma \eta_\alpha \equiv 1 \mod 6$. On a $\eta_0 = f(u)\big(\frac{1}{3}\big(x + 2\frac{y}{y'}\big)\omega_1^0|_0 - u\,\omega_2^0|_0\big)$ d'après le lemme 2.2. Les équations (8) donnent

$$a = -\frac{f(u)}{3}(y'x^2 + 2yx), \tag{12a}$$

$$g = -2f(u)uy' - \frac{5f(u)}{3}y', \tag{12b}$$

$$X_0 c = -2f(u)y^2x^2 - \left(\frac{7}{3}f(u) - 2f'(u)u\right)y'x, \tag{12c}$$

$$X_0 b = -\frac{c}{y'^2} - \frac{f(u)}{3}\frac{x^2}{y'} - \frac{2f'(u)}{3}y'x^2. \tag{12d}$$

Étudions l'équation (12c). Le second membre étant d'ordre 2 en x, c est d'ordre au plus 3. Par homogénéité, c est en fait d'ordre 2. Posons $c = c_2x^2 + c_1x + c_0$. On obtient le système suivant

$$\begin{cases} X_0c_2 = -2f(u)y^2, \\ X_0c_1 = -\left(\dfrac{7}{3}f(u) - 2f'(u)u\right)y' - 2c_2, \\ X_0c_0 = -c_1. \end{cases}$$

On les résout successivement, $c_2 = \frac{-1}{3}f(u)y'$, $c_1 = -\big(\frac{5}{3}f(u) - 2f'(u)u\big)y$ et $X_0c_0 = \big(\frac{5}{3}f(u) - 2f'(u)u\big)y$. Cette dernière équation n'a pas de solution polynomiale comme le montre le lemme suivant. Ceci prouve que f doit être nulle, en contradiction avec le choix de η_α. Ceci prouve la proposition. □

Lemme 2.9. *Il n'existe pas de polynôme R satisfaisant $X_0R = y$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un tel polynôme. Comme le second membre est d'ordre 0 en x, R s'écrit $\alpha_1(u)x + \alpha_0(y, y')$. En écrivant l'équation dans les coordonnées (x, y, u) on a

$$\frac{\partial R^0}{\partial y} + \frac{\partial R^1}{\partial x} = 0,$$

$$\partial R^0 \partial x + (4y^3 + u)\frac{\partial R^1}{\partial y} + 6y^2R^1 = y.$$

Ces équations impliquent $(4y^3+u)\frac{\partial R^1}{\partial y} + 6y^2R^1 = y - \alpha_1(u)$. Si R était un polynôme de degré n, le premier membre de cette égalité serait de degré $n + 2$. Ceci est incompatible avec le second membre, cette équation n'a donc pas de solution polynomiale. □

2.4. Le groupoïde de Galois n'est pas transversalement affine

Lemme 2.10. *Soit $\widetilde{\Omega}^0|_1$, $\widetilde{\Omega}^1|_1$ une suite de Godbillon–Vey de type asl_2 pour le feuilletage donné par X_1. Pour tout vecteur de formes vérifiant $\omega_1^0|_1 \wedge \omega_2^0|_1 = i_{X_1} dx \wedge dy \wedge dy'$, il existe une unique suite asl_2 commençant par $\Omega^0|_1 = \begin{pmatrix} \omega_1^0|_1 \\ \omega_2^0|_1 \end{pmatrix}$.*

Preuve. Les formes $\widetilde{\Omega}^0|_1$ et $\widetilde{\Omega}^1|_1$ satisfont les relations suivantes :

$$\begin{cases} \widetilde{\Omega}^0|_1(X_1) = 0, \\ \quad d\widetilde{\Omega}^0|_1 = \widetilde{\Omega}^1|_1 \wedge \widetilde{\Omega}^0|_1, \\ \quad d\widetilde{\Omega}^1|_1 = \widetilde{\Omega}^1|_1 \wedge \widetilde{\Omega}^1|_1, \\ \text{trace}\, \widetilde{\Omega}^1|_1 = 0. \end{cases}$$

En écrivant $\Omega^0|_1 = F\widetilde{\Omega}^0|_1$ et $\Omega^1|_1 = dFF^{-1} + F\widetilde{\Omega}^1|_1 F^{-1}$, on construit une nouvelle suite de Godbillon–Vey. De plus $\omega_1^0|_1 \wedge \omega_2^0|_1$ et $\widetilde{\omega}_1^0|_1 \wedge \widetilde{\omega}_2^0|_1$ sont deux formes volumes transverses invariantes sous le flot des champs de vecteurs tangents. On en déduit que

$$\omega_1^0|_1 \wedge \omega_2^0|_1 = c\, \widetilde{\omega}_1^0|_1 \wedge \widetilde{\omega}_2^0|_1$$

où c est une intégrale première rationnelle donc une constante. Calculons la trace de $\Omega^1|_1$:

$$\text{trace}\, \Omega^1|_1 = \text{trace}\, dFF^{-1} = \frac{d(\det F)}{\det F} = \frac{dc}{c} = 0$$

et $\Omega^0|_1$, $\Omega^1|_1$ forme une asl_2-suite.

Supposons maintenant qu'il existe deux asl_2-suites : $\Omega^0|_1$, $\Omega^1|_1$ et $\Omega^0|_1$, $\widetilde{\Omega}^1|_1$. Le groupoïde de Galois du feuilletage est un sous-groupoïde de Lie du groupoïde définie par une de ces suites. Or le lemme A.4 montre qu'un tel feuilletage est contenu dans un feuilletage de codimension un, ce qui contredit la proposition 2.6. □

Proposition 2.11. *Le feuilletage donné par X_1 n'admet pas de suite de Godbillon–Vey de type asl_2.*

Le lemme 2.10 affirme que si le feuilletage donné par X_1 admet une asl_2-suite alors celle-ci est rationnelle. Le lemme suivant montre qu'il en existerait une polynomiale.

Lemme 2.12. *Si elle existe, la asl_2-suite commençant par $\widetilde{\Omega}^0|_1 = \begin{pmatrix} dy' - (6y^2 + x)dx \\ dy - y'dx \end{pmatrix}$ doit être polynomiale.*

Preuve. Nous allons montrer que le lieu des pôles de la forme $\widetilde{\Omega}^1|_1$ est une hypersurface invariante pour le feuilletage. Le lemme 2.5 permettra de conclure. Soit Z l'hypersurface des pôles de $\widetilde{\Omega}^1|_1$. On construit un système d'intégrales premières locales (en dehors de Z) en résolvant les systèmes différentiels suivant :

$$\begin{cases} dH = \partial H \widetilde{\Omega}^0|_1, \\ d\partial H = -\partial H \widetilde{\Omega}^1|_1, \end{cases}$$

où $H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$ et ∂H est une matrice 2×2. Si Z est transverse aux feuilles, les intégrales premières se prolongent à Z. Comme de plus $dH_1 \wedge dH_2 = (\det \partial H)\, \widetilde{\omega}_1^0|_1 \wedge \widetilde{\omega}_2^0|_1$, le lieu d'annulation de $\det \partial H$ doit être invariant par le feuilletage. Ceci contredit le corollaire 2.5. □

Corollaire 2.13. *Si elle existe, la asl_2-suite commençant par*

$$\Omega^0|_1 = \begin{pmatrix} y'dy' - (6y^2 + x)dy \\ \frac{dy}{y'} - dx \end{pmatrix}$$

est composée de 1*-formes à coefficients dans* $\mathbb{C}[x, y, y', 1/y']$.

Soit $\Omega^0|_1$, $\Omega^1|_1$ cette suite. On la prolonge au paramètre α de manière à avoir une asl_2-suite, Ω^0, Ω^1 pour X_α. Ces 1-formes vérifient

$$d\Omega^0 = \Omega^1 \wedge \Omega^0, \tag{13}$$

$$d\Omega^1 = \Omega^1 \wedge \Omega^1. \tag{14}$$

On a $p_\Sigma(\Omega^0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $p_\Sigma(\Omega^1) = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice Ω^1 que nous obtenons ainsi possède *a priori* un pôle le long de $\alpha = 0$. Nous allons montrer que ce pôle est nécessairement d'ordre 0 puis conclure avec le lemme 2.3. Développons la matrice Ω^1 en puissance de α :

$$\Omega^1 = \frac{1}{\alpha^n} \Xi_n + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \Xi_{n-1} + \cdots .$$

Lemme 2.14. *Si $n > 0$ alors on est dans un des deux cas suivants :*

(1) $\Xi_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ -\frac{a}{b} & -1 \end{pmatrix} (a\, \omega_1^0|_0 + b\, \omega_2^0|_0)$ *avec* $a = \frac{c}{9} u^{k-2} (x + 2y/y')^2$ *et* $b = -\frac{c}{3} u^{k-1} (x + 2y/y')$ *où* $c \in \mathbb{C}$ *et* $k = \frac{5n+8}{6} \in \mathbb{Z}$;

(2) $\Xi_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cu^k & 0 \end{pmatrix} \omega_1^0|_0$ *avec* $k = \frac{5n-13}{6} \in \mathbb{Z}$.

Remarque 2.15. Si $n > 0$ alors $n > 1$; en effet, la seule possibilité pour $n = 1$ est le cas (2) avec $k = -2$. En posant $\beta = \alpha^5$, on obtient un champs $X_{\beta^{1/5}}$ donnant X_1 en $\beta = 1$ et une asl_2-suite donnée par $\Omega^1 = \frac{1}{\beta^{n/5}}\Xi_n + \cdots$. Le corollaire 2.13 implique que n est divisible par 5.

De même, l'unicité de la asl_2-suite pour X_1 assure que $\Xi_p = 0$ si $p \not\equiv 1 \mod 5$.

Preuve. Posons $\Xi_n = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & -\eta_{11} \end{pmatrix}$. Nous allons distinguer deux cas suivant que η_{11} est nulle ou non nulle.

Premier cas, $\eta_{11} \neq 0$. L'égalité $\Xi_n \wedge \Xi_n$ donne $\Xi_n = \begin{pmatrix} 1 & f \\ g & -1 \end{pmatrix} \eta_{11}$. Comme de plus $\Xi_n \wedge \Omega^0|_0 = 0$,

$$\Xi_n = \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ -a/b & -1 \end{pmatrix} (a\,\omega_1^0|_0 + b\,\omega_2^0|_0).$$

Considérons ensuite l'égalité

$$i_{X_\alpha} d\Omega^1 = \left[\Omega^1(X_\alpha), \Omega^1\right] \tag{15}$$

avec $\Omega^1|_\alpha(X_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha y' \\ \frac{1}{y'^2} & 0 \end{pmatrix}$. En calculant le coefficient de $1/\alpha^n$, on obtient

$$i_{X_0} d\,\Xi_n = \frac{1}{y'^2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Xi_n\right].$$

Calculons les deux membres de l'égalité

- $i_{X_0} d\,\Xi_{-n} = \begin{pmatrix} 0 & X_0\frac{b}{a} \\ -X_0\frac{a}{b} & 0 \end{pmatrix} (a\,\omega_1^0|_0 + b\,\omega_2^0|_0)$
$$+ \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ -\frac{a}{b} & -1 \end{pmatrix} ((X_0 a + \tfrac{b}{y'^2})\omega_1^0|_0 + X_0 b\,\omega_2^0|_0);$$
- $\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Xi_n\right] = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & 0 \\ 2 & \frac{b}{a} \end{pmatrix} (a\,\omega_1^0|_0 + b\,\omega_2^0|_0).$

En identifiant les coefficients de $\omega_1^0|_0$ et $\omega_2^0|_0$ de ces matrices, on obtient le système

$$\begin{cases} X_0 a = \dfrac{-2b}{y'^2}, \\ X_0 b = -\dfrac{b^2}{a}\dfrac{1}{y'^2}. \end{cases}$$

On en déduit que $\frac{b^2}{a}$ est une intégrale première homogène de X_0 donc $\frac{b^2}{a} = cu^k$ avec $c \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On résout le système en utilisant les formules (1). En calculant le poids de Ξ_n à partir des formules d'un coté et à partir du poids de Ω_α de l'autre, on obtient la condition sur l'ordre du pôle en α.

Deuxième cas, $\eta_{11} = 0$. Comme $\Xi_n \wedge \Xi_n = 0$ et $\Xi_n \wedge \Omega^0|_0 = 0$, on a soit $\Xi_n = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{smallmatrix}\right) \omega_1^0|_0$, soit $\Xi_n = \left(\begin{smallmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \omega_2^0|_0$. En reprenant les équations différentielles données par (15), on obtient le résultat annoncé. □

Preuve de la proposition 2.11. Nous allons maintenant calculer Ξ_{n-5} et aboutir à une contradiction.

Premier cas, $\eta_{11} \neq 0$. Dans ce cas, Ξ_n est égale à $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b/a \\ -a/b & -1 \end{smallmatrix}\right) \eta_{11}$. En écrivant le coefficient de $\frac{1}{\alpha^{n-5}}$ dans (13), on obtient

$$\Xi_{n-5} \wedge \Omega^0|_0 + \Xi_n \wedge \begin{pmatrix} -x\,dy \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Ceci implique que

$$\Xi_{n-5} = A\,\omega_1^0|_0 + B\,\eta_{11} - \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{a^2}{b} & -a \end{pmatrix} x\,dy$$

avec $A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + B \left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right) = 0$. En écrivant le coefficient de $\frac{1}{\alpha^{2n-5}}$ dans (14), on obtient

$$\Xi_n \wedge \Xi_{n-5} + \Xi_{n-5} \wedge \Xi_n = 0$$

Ceci donne $\left[A, \left(\begin{smallmatrix} 1 & b/a \\ -a/b & -1 \end{smallmatrix}\right)\right] = 0$, c'est-à-dire

$$A = \ell \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ -a/b & -1 \end{pmatrix}$$

avec ℓ une fonction quelconque. On en déduit ensuite que

$$B = \ell \begin{pmatrix} 0 & -b/a^2 \\ -1/b & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ -a/b & -1 \end{pmatrix}$$

avec t fonction quelconque. Considérons maintenant l'équation différentielle portant sur Ξ_{n-5} que l'on déduit de (15) :

$$i_{X_0} d\,\Xi_{n-5} + i_{x\frac{\partial}{\partial y'}} d\,\Xi_n = \frac{1}{y'^2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Xi_{n-5}\right] - y' \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Xi_n\right].$$

Calculons les termes ci-dessus :

- $i_{X_0} d\,\Xi_{n-5} = \begin{pmatrix} X_0\ell + aX_0t & -\left(\frac{b}{a}\right)^2\frac{\ell}{y'^2} + bX_0t \\ -2\frac{a}{b}X_0\lambda + \frac{\ell}{y'^2} - \frac{a^2}{b}X_0t & -X_0\ell - aX_0t \end{pmatrix}\omega_1^0|_0$

$$+\begin{pmatrix} bX_0t - ay' & -\left(\frac{b}{a}\right)^2 X_0\ell - \ell\left(\frac{b}{a}\right)^3\frac{1}{y'^2} + \frac{b^2}{a}X_0t - by' \\ -X_0\ell - aX_0t + \frac{a^2}{b}y' & -bX_0t + ay' \end{pmatrix}\omega_2^0|_0$$

$$+\begin{pmatrix} 2b & \frac{b^2}{a} \\ -3a & -2b \end{pmatrix}\frac{x}{y'^2}dy + xy'\begin{pmatrix} da & db \\ -d\left(\frac{a^2}{b}\right) & -da \end{pmatrix} + t\, i_{X_0} d\Xi_n;$$

- $i_{x\frac{\partial}{\partial y'}} d\,\Xi_n = x\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial y'} & \frac{\partial b}{\partial y'} \\ -\frac{\partial(a^2/b)}{\partial y'} & -\frac{\partial a}{\partial y'} \end{pmatrix}\omega_1^0|_0 + x\begin{pmatrix} \frac{\partial b}{\partial y'} & \frac{\partial(b^2/a)}{\partial y'} \\ -\frac{\partial a}{\partial y'} & -\frac{\partial b}{\partial y'} \end{pmatrix}\omega_2^0|_0$

$$+\begin{pmatrix} -b & -\frac{b^2}{a} \\ a & b \end{pmatrix}\frac{x}{y'^2}dy - xy'\begin{pmatrix} da & db \\ -d\left(\frac{a^2}{b}\right) & -da \end{pmatrix};$$

- $\left[\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \Xi_{n-5}\right] = \ell\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\omega_1^0|_0 + \ell\begin{pmatrix} \left(\frac{b}{a}\right)^2 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \end{pmatrix}\omega_2^0|_0$

$$+\left(\begin{smallmatrix} b & 0 \\ -2a & -b \end{smallmatrix}\right)xdy + t\left[\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \Xi_n\right];$$

- $\left[\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \Xi_n\right] = \left(\begin{smallmatrix} -a/b & -2 \\ 0 & a/b \end{smallmatrix}\right)(a\omega_1^0|_0 + b\omega_2^0|_0).$

Parmi les équations que l'on obtient en identifiant les coefficients, on trouve les deux équations suivantes

$$\begin{cases} X_0t = 2\dfrac{a}{b}y' + \dfrac{b}{a^2}\dfrac{\ell}{y'^2} - \dfrac{\partial b}{\partial y'}\dfrac{x}{b} \\ X_0\ell = -\dfrac{b}{a}\dfrac{\ell}{y'^2} - \dfrac{a^2}{b}y' - b\dfrac{\partial}{\partial y'}\left(\dfrac{a}{b}\right)x \end{cases}$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs (lemme 2.14), on obtient l'équation suivante pour ℓ :

$$X_0\ell = \frac{3u}{x + 2\frac{y}{y'}}\frac{\ell}{y'^2} + \frac{c}{27}u^{k-3}\left(x + 2\frac{y}{y'}\right)^3 y'$$
$$+ \frac{2c}{9}u^{k-3}x\left(x + 2\frac{y}{y'}\right)^2 y' + \frac{2c}{9}u^{k-2}x\left(x + 2\frac{y}{y'}\right)\frac{y}{y'^2}.$$

On résout cette dernière équation en posant $\ell = \lambda \frac{x+2\frac{y}{y'}}{3u} \frac{9}{cu^{k-2}}$. On a alors

$$X_0\lambda = 7y'x^2 + \left(16y + 6u\frac{y}{y'^2}\right)x + \frac{4y^2}{y'}.$$

La fonction λ est donc un polynôme en x de degré inférieur à trois. Par homogénéité sous Σ, λ est de degré 2. On résout les équations portant sur les coefficients de λ et on obtient finalement

$$\ell = \frac{x+2\frac{y}{y'}}{3u} \frac{9}{cu^{k-2}} \left(7yx^2 + 4\frac{y^2}{y'}x + d\right)$$

où d est constante. L'équation satisfaite par t est alors

$$X_0t = -\left(\frac{y^3}{y'^2} + d\right) \frac{1}{y'^2} \frac{1}{\left(x+2\frac{y}{y'}\right)^2} + \left(28\frac{y^2}{y'}\right) \frac{1}{y'^2} \frac{1}{x+2\frac{y}{y'}}$$
$$+ 4(k-1)\frac{y}{u} - 9\frac{y}{y'^2} - (2k - \frac{8}{3})\frac{y'}{u}\left(x + 2\frac{y}{y'}\right).$$

Puisque X_0t a un pôle d'ordre 2 le long de $x + 2\frac{y}{y'} = 0$, t doit avoir un pôle d'ordre 1 :

$$t = \frac{t_{-1}}{x+2\frac{y}{y'}} + t_0 + t_1\left(x + 2\frac{y}{y'}\right) + t_2\left(x + 2\frac{y}{y'}\right)^2$$

On a alors $t_{-1} = -\frac{1}{3u}\left(48\frac{y^3}{y'} + d\right)$ et $X_0t_{-1} = \frac{28}{y'^2}\frac{y^2}{y'}$, ce qui est impossible. Il n'y a pas de solution polynomiale à l'équation portant sur t. Il n'existe donc pas de asl_2-suite pour le feuilletage avec $\eta_{11} \neq 0$.

Deuxième cas, η_{11} est nulle. Dans ce cas, $\Xi_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cu^k & 0 \end{pmatrix} \omega_1^0|_0$. Calculons Ξ_{n-5}. Les conditions $\Xi_n \wedge \Xi_{n-5} + \Xi_{n-5} \wedge \Xi_n = 0$ et $\Xi_{n-5} \wedge \omega^0|_0 + \Xi_n \wedge \begin{pmatrix} -xdy \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ donnent

$$\Xi_{n-5} = \begin{pmatrix} -e & 0 \\ d & e \end{pmatrix} \omega_1^0|_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} \omega_2^1|_0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cu^k & 0 \end{pmatrix} xdy.$$

En reprenant l'équation (15) et en remarquant que Ξ_n est fermée, on obtient

$$i_{X_0}d\,\Xi_{n-5} = \frac{1}{y'^2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Xi_{n-5}\right] - y'\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Xi_n\right]$$

qui donne

$$\begin{pmatrix} -X_0e & 0 \\ X_0d & X_0e \end{pmatrix} \omega_1^0|_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X_0e & 0 \end{pmatrix} \omega_2^0|_0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{y'^2}\omega_1^0|_0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cu^k & 0 \end{pmatrix} y'\omega_2^0|_0$$
$$= y'\begin{pmatrix} -cu^k & 0 \\ 0 & cu^k \end{pmatrix} \omega_1^0|_0 + \frac{1}{y'^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2e & 0 \end{pmatrix} \omega_1^0|_0.$$

Ceci donne les équations suivantes $X_0 e = cu^k y'$ et $X_0 d = \frac{3e}{y'^2}$, c'est-à-dire $c = cu^k y$ et $X_0 d = 3cu^k \frac{y}{y'^2}$.

Lemme 2.16. *L'équation $X_0 R = \frac{y}{y'^2}$ n'a pas de solution rationnelle.*

Preuve. On déduit de cette équation que $X_0 \frac{\partial R}{\partial x} = 0$. D'un autre coté le poids sous Σ de R doit être égale à 4 donc $\frac{\partial R}{\partial x} = 0$. En écrivant l'équation dans les coordonnées x, y, u, on obtient :

$$(4y^3 + u)\frac{\partial R_1}{\partial y} + 6y^2 R_1 = \frac{y}{4y^3 + u},$$

où $R = R_0(y, u) + y' R_1(y, u)$. Si cette équation admet une solution rationnelle, elle s'écrit $R_1 = \frac{P}{4y^3+u}$ avec P polynomiale. En calculant le coefficient du terme de plus haut degré en y dans l'équation satisfaite par P, on vérifie que P ne peux pas être polynomiale. □

L'équation sur d n'a de solution rationnelle que si c est nul, ce qui contredit le choix de n. La matrice de 1-formes $\Omega^1|_\alpha$ ne peux donc pas avoir de pôle en α. Mais d'après le lemme 2.3, elle ne peux pas ne pas avoir de pôle. Il n'existe donc pas de matrice de formes à coefficients rationnels satisfaisant les équations de $\Omega^1|_\alpha$. Ceci prouve qu'il n'existe pas de asl_2-suite pour le feuilletage donné par la première équation de Painlevé. □

3. Irréductibilité de P_1

Dans cette section, nous allons utiliser le groupoïde de Galois du feuilletage défini par P_1 pour montrer son irréductibilité. Nous commencerons par définir ce que nous entendons par feuilletage réductible. En utilisant les notions de « type différentiel » et de « degré typique de transcendance différentielle » de Kolchin, nous montrerons ensuite que le groupoïde de Galois d'un feuilletage réductible est plus petit que le groupoïde de Galois de P_1.

3.1. Feuilletages réductibles. Dans [31], une solution particulière d'une équation différentielle d'ordre 2 est dite réductible si on peut l'exprimer rationnellement après avoir résolu successivement des équations différentielles linéaires (ou associées à un groupe algébrique) et des équations d'ordre 1. Cette définition d'irréductibilité ne concerne que les solutions particulières de l'équation indépendemment de l'équation. Dans l'esprit de la définition du groupoïde de Galois, nous allons définir une notion de réductibilité « globale » du feuilletage *i.e.* de réductibilité de la solution générale.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension deux. Les feuilletages que nous considèrerons comme plus simples que $\mathcal{F}$ sont les feuilletages de codimension un d'une part et les feuilletages donnés par une connexion linéaire (ou associés à un groupe algébrique) de l'autre ainsi que leurs versions relatives le long d'un feuilletage de codimension un. Dans un autre contexte, ce type d'extensions est étudié dans [6].

Soient $(K, \partial_1, \dots, \partial_n)$ un corps différentiel. On notera T_K le K-espace vectoriel engendré par les dérivations, T_K^* son dual et $\{d_1, \dots, d_n\}$ la base duale de $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$.

Définition 3.1 ([6]). On dira qu'une extension différentielle $K \subset L$ est une extension fortement normale de K relative en codimension q s'il existe un sous-corps Q de K engendré par q éléments fonctionnellement indépendants tel qu'en notant $\underline{K}$ le corps K muni des dérivations $T_{\underline{K}} = \cap_{h \in Q} \ker dh$ et $\overline{Q}^{\mathrm{alg}}$ la clôture algébrique de Q, l'extension $\underline{K} \otimes \overline{Q}^{\mathrm{alg}} \subset \underline{L} \otimes \overline{Q}^{\mathrm{alg}}$ est fortement normale.

Une extension fortement normale a un groupe de Galois. Dans [6], les dérivations n'appartenant pas à $T_{\underline{K}}$ sont prises en considération pour étudier l'extension. Ceci permet de définir un groupe de Galois pour l'extension $K \subset L$, c'est un groupe algébrique différentiel.

Exemple 3.2. Considérons le champ de vecteurs $X_0 = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + 6y^2 \frac{\partial}{\partial y'}$. Ce champ admet une intégrale première rationnelle $u = y'^2 - 4y^3$ et une intégrale première dans une extension fortement normale relative en codimension un de $\mathbb{C}(x, y, y')$: $H = x - \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3+u}}$. Son groupe de Galois classique est $\mathbb{G}_a(\overline{\mathbb{C}(u)}^{\mathrm{alg}})$. Son groupe de Galois au sens de [6] est un sous-groupe algébrique différentiel de $\mathbb{G}_a(\overline{\mathbb{C}(u)}^{\mathrm{diff}})$ isomorphe à $(\mathbb{C}, +)^2$.

Définition 3.3. Un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension deux sur $\mathbb{C}^n$ est dit réductible s'il existe deux integrales premières dans une extension différentielle K_p de $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ construite par extension successives

$$\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n) = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_p$$

où les extensions intermédiaires $K_i \subset K_{i+1}$ sont

- des extensions algébriques,
- des extension fortement normales [15],
- des extensions fortement normales relatives en codimension un,
- des extensions par une intégrale première non constante d'un feuilletage de codimension un, *i.e.* $K_{i+1} = K_i(\langle H \rangle)$ avec $dH \wedge \omega = 0$ pour une 1-forme intégrable à coefficients dans K_i.

Cette définition se généralise aisément aux feuilletages de codimension quelconque. Par exemple un feuilletage de codimension un est réductible s'il admet une intégrale première dans une extension fortement normale. Ces feuilletages sont rationnellement transversalement projectifs.

Dans le cadre de cet article, le théorème que nous allons prouver est le suivant.

Théorème 3.4. *Le feuilletage défini par P_1 est irréductible.*

La preuve est donnée dans la section suivante. Dans un premier temps nous prouvons que les feuilletages reductibles admettent des intégrales premieres satisfaisant un « gros » système d'équations aux dérivées partielles. La taille de « l'espace des solutions » de ce système est mesuré par le « type d'une extension différentielle » défini dans la section suivante. Le pseudo-groupe d'holonomie du feuilletage fixant les intégrales premières locales (lorsque cela a un sens), ses élements satisfont aussi un sytème d'e.d.p. La taille du groupoïde de Galois nous donne une borne inférieure à la taille de ce système d'e.d.p. Dans le cas du feuilletage donné par P_1, cette borne est supérieure à la taille de l'espace des intégrales premières particulières d'un feuilletage réductible.

Dans [7] et [36] apparait une notion d'irréductibilité basée sur les considérations précédentes.

Définition 3.5. Soient $\mathcal{F}$ feuilletage définie par une 2-forme fermée γ sur $\mathbb{C}^n$ et $IP(\mathcal{F})$ la $\mathcal{D}$-sous-variété de $J(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2)$ définie par les composantes de la forme $dH_1 \wedge dH_2 - \gamma$, H_1 et H_2 étant des coordonnées au but. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit réductible au sens de Drach–Vessiot ou D.V.-réductible si $IP(\mathcal{F})$ admet une D-sous-variété propre.

La preuve de l'irréductibilité du feuilletage défini par la première équation de Painlevé passe par la preuve de sa D.V.-irréductibilité.

3.2. Types d'une extension différentielle et preuve du théorème 3.4. La définition du type d'une extension de corps différentiels est basée sur un analogue différentiel du polynôme de Hilbert pour les $\mathcal{D}$-variétés introduit par Kolchin sous le nom de « polynôme de transcendance différentielle » ([15], chapitre II). Rappellons d'abord la définition du type d'une $\mathcal{D}$-variété de sections de Z sur X.

Définition 3.6. Soient Z une variété sur X et $\mathcal{Y}$ une $\mathcal{D}$-variété irréductible de $J(Z_{/X})$. On définit la croissance de $\mathcal{Y}$ comme la suite d'entiers $c_\ell = \dim_X \mathcal{Y}_\ell$. Le type de $\mathcal{Y}$ est le monome $a\ell^b$ tel que $c_\ell \sim_\infty a\ell^b$.

Dans [15], chapitre II-12, le polynôme interpolant la suite c_ℓ pour de grandes valeurs de ℓ est appellé « polynôme de transcendance différentielle ». Dans [15], chapitre II-13, les entiers a et b sont appelés respectivement « degré typique de transcendance différentielle » et « type différentiel ». Nous utiliserons la terminologie de la définition 3.6 sans explorer les propriétés particulières de a ou b.

Exemple 3.7. La croissance de la $\mathcal{D}$-variété $J(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p)$ est $c_\ell = p\frac{(n+\ell)!}{n!\ell!}$. Son type est $\frac{p}{n!}\ell^n$.

Exemple 3.8. Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un de $\mathbb{C}^n$ défini par une 1-forme ω et $IP(\mathcal{F})$ la $\mathcal{D}$-variété des intégrales premières *i.e.* la sous-$\mathcal{D}$-variété de $J(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C})$ définie par l'idéal différentiel engendré par les composantes de $dH \wedge \omega$. La croissance de $IP(\mathcal{F})$ est $c_\ell = \ell + 1$.

Exemple 3.9. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension deux de $\mathbb{C}^n$ donné par deux formes ω_1 et ω_2. La $\mathcal{D}$-variété $IP(\mathcal{F})$ des intégrales premières de $\mathcal{F}$ est la sous-$\mathcal{D}$-variété de $J(\mathbb{C}_n \to \mathbb{C}^2)$ dont l'idéal est différentiablement engendré par les composantes de $dH_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$ et de $dH_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2$. Sa croissance est $c_\ell = (\ell+2)(\ell+1)$. Si de plus le feuilletage préserve une forme volume transverse, la croissance de la $\mathcal{D}$-variété des couples d'intégrales premières compatibles au volume est $c_\ell = \frac{1}{2}(\ell+2)(\ell+1) + \ell + 1$.

Exemple 3.10. Soit V un espace vectoriel muni d'une connexion ∇ intégrable sur X. En coordonnées locales, $\nabla = \sum \big(\frac{\partial}{\partial x_i} + A_i\big) dx_i$ et la $\mathcal{D}$-variété des sections plates de V sur X est définie par l'idéal différentiel engendré par les équations $y_j^{\epsilon_i} + \sum_k (A_i)_j^k y_k = 0$ Sa croissance est constante $c_\ell = \dim_X V$. Elle est indépendante de ℓ.

La définition donnée par Kolchin dans le cadre des extensions de corps différentiels se déduit de la définition précédente de la manière suivante. Soient $(K, \partial_1, \dots, \partial_n)$ un corps différentiel et L une extension différentielle de K. Choisissons p éléments $y_1, \dots, y_p$ engendrant différentiellement L sur K. Soit $\mathcal{I}$ le noyau du morphisme $K\langle Y_1, \dots, Y_p\rangle \to L$. Le corps L est alors le corps des fractions de la $\mathcal{D}$-variété au-dessus de K définie par $\mathcal{I}$. Notons $\mathcal{Y}$ cette $\mathcal{D}$-variété.

Lemme-Définition 3.11 ([15]). *Le type $t_{L/K}$ de $K \subset L$ est le type de $\mathcal{Y}$. Il ne dépend que de l'extension $K \subset L$.*

Preuve. Soient $y_1, \dots, y_p$ et $z_1, \dots, z_q$ deux systèmes générateurs de L sur K. Notons $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$ les $\mathcal{D}$-variétés au-dessus de K qu'ils définissent. Par définition, il existe des fractions différentielles telles que $y_j = y_j(z)$. Soit i l'ordre maximal de ces fractions. Elles définissent une application rationnelle dominante de $\mathcal{Y}_i$ sur $\mathcal{Z}_0$. Par dérivations on obtient des applications dominantes de $\mathcal{Y}_{i+\ell}$ sur $\mathcal{Z}_\ell$, ce qui implique $c(\mathcal{Y})_{i+\ell} \geq c(\mathcal{Z})_\ell$. De la même manière, $c(\mathcal{Z})_{j+\widetilde{\ell}} \geq c(\mathcal{Y})_\ell$. Ceci prouve le lemme. □

Exemple 3.12. Le type d'une extension fortement normale est fini.

Exemple 3.13. Soient $(K, \partial_1, \dots, \partial_n)$, ω une 1-forme sur K (*i.e.* un élément du dual du K-espace vectoriel engendré par les dérivations) et $L = K(\langle H\rangle)$ une extension différentielle engendrée par une indéterminée H satisfaisant $dH \wedge \omega = 0$. Le type $t_{L/K}$ est linéaire.

Exemple 3.14. Soient $K \subset L$ une extension fortement normale en codimension un et $\partial_1, \dots, \partial_n$ une base des derivations telle que $T_{\underline{K}} = K\partial_1 + \dots + K\partial_{n-1}$. L'extension étant fortement normale par rapport à $T_{\underline{K}}$, on peut trouver une base $\{H_1, \dots, H_p\}$ de L sur K telle que $\partial_j H_i$ soit algébrique sur $K(H_1, \dots, H_p)$ pour tout i et $1 \le j \le n-1$. Le type de L/K est donc linéaire.

De la même manière que pour le lemme 3.11, on prouve le lemme suivant.

Lemme 3.15. *Soit $K \subset K_1 \subset K_2$ une suite d'extensions différentielles. On a l'égalité suivante :*

$$t_{K_2/K} \sim_\infty t_{K_2/K_1} + t_{K_1/K}.$$

Preuve. Soient $y_1, \dots, y_p$ une base différentielle de K_1 sur K et $z_1, \dots, z_m$ une base différentielle de K_2 sur K_1 ; les y et les z forment une base differentielle de K_2 sur K. Notons $\mathcal{Y}$ la $\mathcal{D}$-variété sur K définie par la base des y, $\mathcal{Z}$ celle sur K_1 definie par les z et $\mathcal{T}$ celle sur K definie par les y et les z. Ces bases ne sont pas les bonnes pour prouver le théorème, nous allons en construire d'autres. D'après le théorème de Ritt–Raudenbush, il existe un entier q telle que l'idéal de $\mathcal{Z}_\ell$ pour $\ell > q$ soit engendre par les derivées d'ordre $\ell - q$ des éléments de l'idéal de $\mathcal{Z}_q$. Les éléments de cet idéal sont des polynômes différentiels d'ordre inférieur à q en les z à coefficients dans K_1. Soit r l'ordre maximal des dérivées des y intervenant dans l'écriture d'une base de l'idéal de $\mathcal{Z}_q$. Choisissons comme nouvelle base de K_2 sur K_1 les z et leurs dérivées jusqu'à l'ordre q et pour base de K_1 sur K les y et leurs dérivées jusqu'à l'ordre r. Notons $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{T}$ les $\mathcal{D}$-variétés obtenues avec ses nouvelles bases. L'égalité

$$c(\mathcal{T})_\ell = c(\mathcal{Y})_\ell + c(\mathcal{Z})_\ell$$

prouve le lemme. □

Lemme 3.16. *Un feuilletage de codimension deux réductible est D.V.-réductible.*

Preuve. L'existence de deux intégrales premières indépendantes dans une extension différentielle du type réductible (définition 3.3) assure l'existence d'un idéal différentiel dans $\mathcal{O}_{IP(\mathcal{F})}$. En effet, considérons une telle extension $\mathbb{C}(x, y, y') \subset K$ et l'application $\mathcal{O}_{IP(\mathcal{F})} \to K$ qui envoie H_1, H_2 sur les deux intégrales premières. Le lemme 3.15 nous assure que le type de K est linéaire. Le type de $IP(\mathcal{F})$ étant quadratique, l'application précédente a un noyau non trivial que nous noterons $\mathcal{I}$. Le type de la $\mathcal{D}$-variété définie par $\mathcal{I}$ est linéaire. □

Preuve du théorème 3.4. Nous allons prouver que le feuilletage n'est pas réductible au sens de Drach et Vessiot. Considérons l'espace $J(\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2)$. Le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $J^*(\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3)$ agit sur cet espace par composition à la source. Soit $\mathcal{I}$ un idéal différentiel réduit de $\mathcal{O}_{J(\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2)}$ définissant une sous-$\mathcal{D}$-variété $\mathcal{Y}$ de cet espace. Nous appellerons stabilisateur de $\mathcal{I}$ (ou de $\mathcal{Y}$) et noterons $\mathrm{Stab}(\mathcal{I})$ (ou $\mathrm{Stab}(\mathcal{Y})$) le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie maximal laissant $\mathcal{Y}$ invariante. Notons c_{source} la composition à la source :

$$c_{\text{source}} : \big(J^*(\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3), t\big) \times_{\mathbb{C}^3} \big(J(\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2), s\big) \to J(\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2),$$

l'idéal du stabilisateur de $\mathcal{I}$ est le plus petit idéal différentiel $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{J^*(\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3)}$ tel qu'en dehors d'une hypersurface $S \subset \mathbb{C}^3$ on ait les inclusions suivantes

$$c^*_{\text{source}}\mathcal{I} + \mathcal{J} \subset \mathcal{I} + \mathcal{J} \text{ et } c^*_{\text{source}}\mathcal{I} + i^*\mathcal{J} \subset \mathcal{I} + \mathcal{J}.$$

À partir de ces inclusions, on montre que J est l'idéal d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie (voir par exemple [4]). Considérons $IP(\mathcal{F})$ la $\mathcal{D}$-variété des intégrales premières du feuilletage $\mathcal{F}$ défini par P_1. C'est la sous-$\mathcal{D}$-variété de $J(\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2)$ décrivant les couples d'intégrales premières. Elle est donnée par l'idéal différentiel réduit engendré par les deux équations X_1H_1 et X_1H_2 où (H_1, H_2) sont des coordonnées sur l'espace but. Le stabilisateur de $IP(\mathcal{F})$ est le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ dont les solutions sont les difféomorphismes formels Γ satisfaisant les équations différentielles $\Gamma^*X_1 \wedge X_1 = 0$. Soit $\mathcal{I}$ un idéal différentiel premier de $\mathcal{O}_{IP(\mathcal{F})}$ et $\widetilde{\mathcal{I}}$ sa préimage dans $\mathcal{O}_{J(\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2)}$. Le stabilisateur de $\mathcal{I}$ est par définition le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\mathrm{Stab}(\widetilde{\mathcal{I}}) \cap \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$. Plaçons nous au voisinage d'un point régulier de X_1 et choisissons une coordonnée tangente z et deux coordonnées transverses t_1 et t_2. Dans ces coordonnées analytiques, l'idéal $\mathcal{I}$ admet un système de générateurs ne dépendant pas de z ([4], [5]). Tous les flots locaux de X_1 laissent donc $\mathcal{I}$ invariant. Autrement dit, $\mathrm{Stab}(\mathcal{I})$ est localement admissible, donc admissible. On obtient l'inclusion suivante

$$Gal(\mathcal{F}) \subset \bigcap_{\mathcal{I} \in \mathrm{spec}^{\mathrm{diff}}(\mathcal{O}_{IP(\mathcal{F})})} \mathrm{Stab}(\mathcal{I})$$

où $\mathrm{spec}^{\mathrm{diff}}(\mathcal{O}_{IP(\mathcal{F})})$ est l'ensemble des idéaux différentiels premiers de $\mathcal{O}_{IP(\mathcal{F})}$. Nous avons déjà calculé le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $Gal(\mathcal{F})$. Les stabilisateurs des idéaux différentiels de $\mathcal{O}_{IP(\mathcal{F})}$ doivent donc contenir le groupoïde de Lie d'invariance de la 2-forme fermée définissant le feuilletage.

Si le feuilletage est reductible, le lemme précédent nous donne une idéal différentiel I dans $\mathcal{O}_{IP(\mathcal{F})}$ de type linéaire. Considérons le stabilisateur de $\mathcal{I}$, $\mathrm{Stab}(\mathcal{I})$, et le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie des transformations de $\mathbb{C}^3$ fibrées sur l'identité en x, $\mathrm{Inv}(x)$. La projection sur l'axe des x étant transverse au feuilletage, le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}) \cap \mathrm{Inv}(x)$ agit simplement transitivement sur la $\mathcal{D}$-variété $IP(\mathcal{F})$. Par conséquence le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $\mathrm{Stab}(\mathcal{I}) \cap \mathrm{Inv}(x)$ agit simplement sur la $\mathcal{D}$-variété définie par $\mathcal{I}$. Son type est donc linéaire. Le groupoïde $\mathrm{Stab}(\mathcal{I}) \cap \mathrm{Inv}(x)$ est donc strictement plus petit que $Gal(\mathcal{F}) \cap \mathrm{Inv}(x)$, ce qui est impossible d'après la définition du groupoïde de Galois. Ceci prouve le théorème. □

Annexe. Classification de Cartan ; preuve du théorème 1.36

Dans cette annexe, nous reprenons les arguments de [3], pp. 134 –194, pour prouver le théorème suivant.

Théorème 1.36. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{C}^n$ de codimension deux, défini par une 2-forme fermée γ. Le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie* $\mathrm{Inv}(\gamma)$ *d'invariance de cette forme est un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie admissible pour $\mathcal{F}$. Si le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ n'est pas* $\mathrm{Inv}(\gamma)$ *alors on est dans un des cas suivant :*

- *$\mathcal{F}$ admet une intégrale première rationnelle ;*
- *il existe une 1-forme algébrique intégrable s'annulant sur $\mathcal{F}$;*
- *il existe un vecteur de 1-formes $\Omega^0 = \begin{pmatrix} \omega_1^0 \\ \omega_2^0 \end{pmatrix}$ définissant le feuilletage et une matrice de 1-formes Ω^1 de trace nulle tels que*
$$d\Omega^0 = \Omega^1 \wedge \Omega^0 \quad et \quad d\Omega^1 = \Omega^1 \wedge \Omega^1.$$

Soient x_0 un point régulier du feuilletage, $\Theta_{\mathcal{F}}|_{x_0}$ la forme transverse d'ordre q de $\mathcal{F}$ et $\theta_i^{a,b}$ ses composantes dans la base monomiale sur $J_q(\chi(\mathbb{C}^2, 0))$. Les équations de structures s'écrivent

$$d\theta_i^{a,b} = \sum_{\substack{a_1+a_2=a \\ b_1+b_2=b}} \binom{a}{a_1}\binom{b}{b_1} \theta_1^{a_1,b_1} \wedge \theta_2^{a_2+1,b_2} + \sum_{\substack{a_1+a_2=a \\ b_1+b_2=b}} \binom{a}{a_1}\binom{b}{b_1} \theta_2^{a_1,b_1} \wedge \theta_2^{a_2,b_2+1}.$$

pour $a + b \leq q - 1$. Nous complétons ces formes en une base des formes transverses au feuilletage sur $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})_{q+1}|_{x_0} = R_{q+1}(\mathcal{F})$ avec des formes $\omega_i^{a,b}$ pour $a+b = q+1$ et $i = 1, 2$ satisfaisant les équations de structures d'ordre $q + 1$:

$$d\theta_i^{a,b} = \omega_i^{a+1,b} \wedge \theta_1^{0,0} + \omega_i^{a,b+1} \wedge \theta_2^{0,0} + \cdots, \quad a + b = q.$$

Ces formes ω ne sont bien définies que modulo les formes d'ordre 0. Les formes θ étant invariantes, les formes ω ne le sont que modulo les formes d'ordre 0. Soit $\mathcal{Y}$ un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie transitif admissible pour $\mathcal{F}$ et p l'entier minimal tel que $\mathcal{Y}_p \neq \mathrm{Inv}(\gamma)_p$. Nous allons examiner les équations de structures satisfaites par les formes invariantes sur certaines orbites de $\mathcal{Y}_p|_{x_0}$ et en déduire successivement que

- $p \leq 2$,
- si $p = 2$, les équations de structure sont de type asl_2,

– si $p = 1$ il existe une combinaison linéaire des formes transverse d'ordre 0 intégrable en restriction à une orbite.

Lemme A.1. *Quitte à modifier la suite des formes de Cartan, les restrictions des formes sur une orbite de* $\mathrm{Inv}(\gamma)|_{x_0}$ *satisfont* $\theta_1^{a+1,b} + \theta_2^{a,b+1} = 0$.

Preuve. La forme $t^*\gamma$ est une forme invariante d'ordre 0. Elle est donc égale à $h\,\theta_1^{0,0} \wedge \theta_2^{0,0}$ où h est un invariant différentiel d'ordre 1 de $\mathrm{Inv}(\gamma)$ donc constant en restriction à une orbite. La forme $\theta_1^{0,0} \wedge \theta_2^{0,0}$ est donc fermé ce qui implique $\theta_1^{1,0} + \theta_2^{0,1} = h\theta_1^{0,0} + k\theta_2^{0,0}$ avec h et k des constantes. En faisant agir le difféomorphisme $f(x_1, x_2) = (x_1 + hx_1^2, x_2 + kx_2^2)$ par composition à la source en x_0, on trouve une nouvelle suite de formes invariantes commençant par les mêmes formes d'ordre 0 et dont les formes d'ordre 1 sont

$$\theta_1^{1,0} - h\theta_1^{0,0}, \theta_1^{0,1} + k\theta_1^{0,0}, \theta_2^{1,0} + h\theta_2^{0,0}, \theta_2^{0,1} - k\theta_2^{0,0}.$$

La nouvelle suite que nous noterons encore θ vérifie donc $\theta_1^{1,0} + \theta_2^{0,1} = 0$. La restriction à $\mathrm{Inv}(\gamma)|_{x_0}$ de la différentielle extérieure de cette forme est aussi nulle. Celle-ci est égale à

$$(\theta_1^{2,0} + \theta_2^{1,1}) \wedge \theta_1^{0,0} + (\theta_1^{1,1} + \theta_2^{0,2}) \wedge \theta_2^{0,0}.$$

On en déduit que $\theta_1^{2,0} + \theta_2^{1,1} = h\theta_2^{0,0}$ et $\theta_1^{1,1} + \theta_2^{0,2} = -h\theta_1^{0,0}$. En faisant agir le difféomorphisme $f(x_1, x_2) = (x_1 + \frac{h}{2}x_2x_1^2, x_2 - \frac{h}{2}x_1x_2^2)$ en x_0, on trouve une nouvelle suite de formes invariantes satisfaisant les identités annoncées à l'ordre 2. On construit la suite par récurrence. Comme

$$d(\theta_1^{a+1,b} + \theta_2^{a,b+1}) = (\theta_1^{a+2,b} + \theta_2^{a+1,b+1}) \wedge \theta_1^{0,0} + (\theta_1^{a+1,b+1} + \theta_2^{a,b+2}) \wedge \theta_2^{0,0} + \cdots,$$

si le premier membre est nul, on a $\theta_1^{a+2,b} + \theta_2^{a+1,b+1} = h\theta_2^{0,0}$ et $\theta_1^{a+1,b+1} + \theta_2^{a,b+2} = -h\theta_1^{0,0}$. L'action d'un difféomorphisme en x_0 tangent à l'ordre $a + b + 2$ à l'identité permet de construire une suite vérifiant les identités anoncées à l'ordre $a + b + 2$. $\square$

Soit maintenant $\mathcal{Y}$ un sous-$\mathcal{D}$-groupoïde de Lie transitif strict de $\mathrm{Inv}(\gamma)$ admissible pour $\mathcal{F}$.

Lemme A.2. *Si un tel* $\mathcal{D}$*-groupoïde de Lie n'admet pas d'équation du premier ordre supplémentaire alors il admet quatre équations supplementaires d'ordre* 2.

Preuve. Soit q l'ordre minimale des équations supplémantaires. Considérons sur $J_q^*|_{x_0}$ la base θ_j^α, $1 \leq j \leq n$ $0 \leq |\alpha| \leq q - 1$ des formes (d'ordre $q - 1$) invariantes et ω_j^α, $1 \leq j \leq n$ $|\alpha| = q$ des formes complétant les θ en une base de formes transverses. La condition $\theta_1^{a+1,b} + \theta_2^{a,b+1} = 0$ sur $\mathrm{Inv}(\gamma)|_{x_0}$ implique que l'on peut choisir des formes ω satisfaisant $\omega_1^{a+1,b} + \omega_2^{a,b+1} = 0$ pour $a + b = q - 1$.

Soit E un invariant différentiel d'ordre $q > 1$. La forme $dE = B\omega_2^{q,0} + \sum_{i=0}^{q} A_i \omega_1^{i,q-i} + \cdots$ (en n'écrivant pas les formes d'ordre $q - 1$) est invariante sous l'action de $\mathcal{Y}_{q+1}$. Les formes ω étant invariantes modulo $\theta_1^{0,0}$ et $\theta_2^{0,0}$, les coefficients B et A_i sont des invariants différentiels de $\mathcal{Y}$. Nous allons maintenant calculer certains termes de la forme ddE restreint à $\mathcal{Y}_q|_{x_0}$ à partir des équations de structures. Dans un premier temps, regardons les termes contenant des formes d'ordre 1. Ils sont de la forme $\gamma_1 \wedge \theta_1^{1,0} + \gamma_2 \wedge \theta_1^{1,0} + \gamma_3 \wedge \theta_2^{1,0}$. Les formes γ_i s'expriment en fonctions des formes θ et ω. Les termes d'ordre q de ces formes proviennent de la différentielle des termes d'ordre q de dE que l'on calcule grace aux équations de structures. On obtient :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= (q+1)B\omega_2^{q,0} + (q-1)A_q\omega_1^{q,0} \\
&\qquad + \sum (2i - q - 1)A_i\omega_1^{i,q-i} - (q+1)A_0\omega_1^{0,q} + \cdots, \\
\gamma_2 &= -A_q\omega_2^{q,0} + 2A_{q-1}\omega_1^{q,0} \\
&\qquad + \sum (q - i + 2)A_{i-1}\omega_1^{i,q-i} + (q+1)A_0\omega_1^{1,q-1} + \cdots, \\
\gamma_3 &= -(q+1)B\omega_1^{q,0} + \sum (i+1)A_i\omega_1^{i,q-i} + A_1\omega_1^{0,q} + \cdots.
\end{aligned}$$

Comme $ddE = 0$, on en déduit l'existence de trois formes identiques au formes γ_i modulo les formes d'ordre 0 et 1 s'annulant sur $\mathcal{Y}_q|_{x_0}$. Comme elles sont indépendantes de dE, elles proviennent d'invariants différentiels supplémentaires. En refaisant le même calcul pour chacune de ces nouvelles formes, on obtient qu'il existe une forme s'annulant sur $\mathcal{Y}_q|_{x_0}$ ayant un A_i non nul. On en déduit ensuite que l'on peut supposer que ce coefficient est A_0 puis qu'il existe $q+2$ formes s'annulant sur $\mathcal{Y}_q|_{x_0}$ donc $q + 2$ invariants différentiels d'ordre q ($q + 3$ invariants d'ordre q donnent un invariant d'ordre $q - 1$). Montrons maintenant que q est inférieur ou égal à deux. Considérons les $q + 2$ invariants différentiels d'ordre q, E_i, et leurs différentielles $dE_i = \sum A_i^j \omega_1^{j,q-j} + B_i\omega_2^{q,0} + \cdots$ où les A_i^j sont des invariants différentiels de $\mathcal{Y}$. Choisissons les combinaisons linéaires de ces formes :

$$\gamma_i = \omega_1^{i,q-i} + \cdots \quad \text{et} \quad \gamma_{-1} = \omega_2^{q,0} + \cdots.$$

Elles forment un système complètement intégrable de formes s'annulant sur les orbites de $\mathcal{Y}$ et sont de plus invariantes sous l'action de $\mathcal{Y}$. Ces deux conditions impliquent que $d\gamma_i = \sum c_i^{j,k}\gamma_j \wedge \gamma_k$. En réduisant cette égalité modulo les formes d'ordre inférieur ou égal à $q-1$, on obtient $0 = \sum c_i^{j,k}\omega_1^{j,q-j} \wedge \omega_1^{k,q-k} + \sum c_i^{j,-1}\omega_1^{j,q-j} \wedge \omega_2^{q,0}$. Ces formes étant indépendantes, les coefficients c sont tous nuls. Les formes γ sont donc fermées. Regardons maintenant la différentielle de γ_q. Cette forme contient le terme

$\theta_2^{2,0} \wedge \frac{(q-1)(q-2)}{2}\theta_1^{q-2,1}$. La deuxième forme de ce produit extérieur ne se représente dans $d\gamma_q$ que multipliée par une forme d'ordre 1. La forme γ_q étant fermée, ce produit extérieur doit être nul. Ceci implique que q est inférieur ou égal à deux. S'il existe un invariant différentiel il est donc d'ordre inférieur à deux et s'il est d'ordre 2, il y en a quatre. □

Lemme A.3. *S'il existe un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie admissible pour $\mathcal{F}$ ayant un invariant d'ordre 2 alors le feuilletage est défini par un vecteur de formes Ω^0 et il existe une matrice de formes Ω^1 de trace nulle telle que $d\Omega^0 = \Omega^1 \wedge \Omega^0$ et $d\Omega^1 = \Omega^1 \wedge \Omega^1$.*

Preuve. D'après le lemme précédent, il y a quatre invariants différentiels d'ordre 2. Considérons les formes données par le lemme précédent et décrivant $\mathcal{Y}_2|_{x_0}$.

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \omega_2^{2,0} + a_1\theta_2^{1,0} + b_1(\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1}) + c_1\theta_1^{0,1} + \cdots,\\
\gamma_2 &= \omega_1^{2,0} + a_2\theta_2^{1,0} + b_2(\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1}) + c_2\theta_1^{0,1} + \cdots,\\
\gamma_3 &= \omega_1^{1,1} + a_3\theta_2^{1,0} + b_3(\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1}) + c_3\theta_2^{1,0} + \cdots,\\
\gamma_4 &= \omega_1^{0,2} + a_4\theta_2^{1,0} + b_4(\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1}) + c_4\theta_2^{1,0} + \cdots.
\end{aligned}$$

Ces formes étant invariantes, les coefficients a, b, c sont des invariants différentiels de $\mathcal{Y}$. Ces formes formant un système complètement intégrable, elles doivent être fermées comme nous l'avons montré au cours de la preuve du lemme précédent. En calculant $d\gamma_1$ modulo les formes d'ordre 0, on obtient

$$\begin{aligned}
d\gamma_1 = \frac{3}{2}(\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1}) \wedge \omega_2^{2,0} - 3\,\theta_2^{1,0} \wedge \omega_1^{2,0} + a_1(\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1}) \wedge \theta_2^{1,0}\\
+ da_1 \wedge \theta_2^{1,0} + 2b_1\theta_2^{1,0} \wedge \theta_1^{0,1} + db_1 \wedge (\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1})\\
+ c_1\theta_1^{0,1} \wedge (\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1}) + dc_1 \wedge \theta_1^{0,1}.
\end{aligned}$$

En examinant les termes contenant des formes d'ordre 2, on obtient les égalités $da_1 = -3\gamma_2$, $db_1 = \frac{3}{2}\gamma_1$ et $dc_1 = 0$. En remplaçant ceci dans l'égalité précédente, on obtient les égalités $c_1 = 0$, $b_2 = \frac{-1}{6}a_1$ et $c_2 = \frac{-2}{3}b_1$. Les mêmes manipulations sur

- $d\gamma_2$ donnent $da_2 = 2\gamma_3$, $db_2 = \frac{1}{2}\gamma_2$ et $dc_2 = -\gamma_1$ puis $b_3 = \frac{-1}{4}a_2$ et $c_3 = \frac{-2}{3}a_1$,
- $d\gamma_3$ donnent $da_3 = \gamma_4$, $db_3 = \frac{-1}{2}\gamma_2$ et $dc_3 = 2\gamma_2$ puis $a_4 = 0$, $b_4 = \frac{-3}{2}a_3$ et $c_4 = \frac{3}{2}a_2$.

On en déduit que, en restriction à la sous-variété invariante $Z_2 = \{a_1 = b_1 = a_2 = a_3 = 0\}$, les coefficients a, b et c sont nuls. En faisant un bon choix des formes ω, les formes restreintes s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \omega_2^{2,0},\\
\gamma_2 &= \omega_1^{2,0} + h_2\theta_1^{0,0},\\
\gamma_3 &= \omega_1^{1,1} + h_3\theta_1^{0,0},\\
\gamma_4 &= \omega_1^{0,2} + h_4\theta_1^{0,0}.
\end{aligned}$$

Les formes θ restreintes satisfont les équations :

$$\begin{aligned}
d(\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1}) &= 2\theta_2^{1,0} \wedge \theta_1^{0,1} + (h_2 - h_1)\theta_2 \wedge \theta_1,\\
d\theta_1^{0,1} &= \theta_1^{0,1} \wedge (\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1}) + h_3\theta_2 \wedge \theta_1,\\
d\theta_2^{1,0} &= -\theta_2^{1,0} \wedge (\theta_1^{1,0} - \theta_2^{0,1}) - h_1\theta_2 \wedge \theta_1.
\end{aligned}$$

En vérifiant que ces formes sont fermées, on obtient $h_1 = h_2 = h_3 = 0$. Les formes θ restreintes sur $Z_2 = \{a_1 = b_1 = a_2 = a_3 = 0\}$ vérifient les identités annoncées dans la proposition. En choisissant ensuite une section f de Z_2 pour la projection but, on tire les formes sur $\mathbb{C}^n$: $\Omega = f^*\Theta$. □

Lemme A.4. *Si un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie admissible pour $\mathcal{F}$ admet des équations du premier ordre supplémentaires alors il laisse un feuilletage de codimension un invariant.*

Preuve. Si un $\mathcal{D}$-groupoïde admissible pour $\mathcal{F}$, $\mathcal{Y}$, est décrit par au moins une équation supplémentaire d'ordre 1, il admet, suivant le théorème 1.18 au moins un invariant d'ordre un supplémentaire.

Nous allons examiner $\mathcal{Y}_1|_{x_0}$ muni des deux formes invariantes $\theta_1^{0,0}$ et $\theta_2^{0,0}$ que l'on complète avec des formes $\omega_j^{k,\ell}$ pour $j = 1, 2$ et $k + \ell = 1$ satisfaisant les premières équations de structure.

Supposons que $\mathcal{Y}_1$ soit définie par un invariant supplémentaire E d'ordre 1. On écrit

$$dE = a\omega_2^{1,0} + b(\omega_1^{1,0} - \omega_2^{0,1}) + c\omega_1^{0,1} + h\theta_1^{0,0} + k\theta_2^{0,0}.$$

En choisissant correctement les formes ω, on peut supposer $h = k = 0$. Les coefficients a, b et c étant des invariants, la forme $\gamma = \omega_2^{1,0} + b(\omega_1^{1,0} - \omega_2^{0,1}) + c\omega_1^{0,1}$, obtenue en divisant par a, est fermée. En calculant $d\gamma$ modulo γ, on obtient $b^2 + c = 0$. En écrivant ensuite que γ est fermée, on obtient

$$0 = db + \omega_2^{1,0} + b(\omega_1^{1,0} - \omega_2^{0,1}) - b^2\omega_1^{0,1}.$$

En restriction à la sous-variété $Z_1 = \{b = 0\}$, la forme $\theta_2^{0,0}$ est intégrable. Le pull-back de cette forme par une section de Z_1 donne une forme algébrique intégrable s'annulant sur le feuilletage.

Supposons que $\mathcal{Y}_1$ soit donné par deux invariants E_1 et E_2. Les coefficients des formes ω dans les différentielles dE_1 et dE_2 sont des invariants. En prenant des combinaisons linéaires de ces formes, on trouve les deux formes invariantes

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \omega_2^{1,0} + a\,\omega_1^{0,1} + h_1\theta_1^{0,0} + k_1\theta_2^{0,0},\\ \gamma_2 &= (\omega_1^{1,0} - \omega_2^{0,1}) + b\,\omega_1^{0,1} + h_2\theta_1^{0,0} + k_2\theta_2^{0,0}.\end{aligned}$$

En choisissant correctement les formes ω, on peut supposer que $h_1 = k_1 = h_2 = k_2 = 0$. Ces formes s'annulant sur les orbites de $\mathcal{Y}$, on a $d\gamma_1 = c_1\gamma_1 \wedge \gamma_2$ et $d\gamma_2 = c_2\gamma_1 \wedge \gamma_2$. Le calcul direct à partir des formules donne

$$\begin{aligned}d\gamma_1 &= -\gamma_1 \wedge \gamma_2 + (da - 2a\gamma_2 + b\gamma_1) \wedge \omega_1^{0,1},\\ d\gamma_2 &= (db + 2\gamma_1 - b\gamma_2) \wedge \omega_1^{0,1}.\end{aligned}$$

En se plaçant sur l'hypersurface $Z_1 = \{b = 0\}$, la forme $\theta_2^{0,0}$ est intégrable.

Supposons enfin que $\mathcal{Y}_1$ soit donnée par trois invariants. En effectuant les manipulations précédentes, on obtient trois formes invariantes s'annulant sur $\mathcal{Y}_1$

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \omega_2^{1,0} + h_1\theta_1^{0,0} + k_1\theta_2^{0,0},\\ \gamma_2 &= (\omega_1^{1,0} - \omega_2^{0,1}) + h_2\theta_1^{0,0} + k_2\theta_2^{0,0},\\ \gamma_3 &= \omega_1^{0,1} + h_3\theta_1^{0,0} + k_3\theta_2^{0,0}.\end{aligned}$$

Quitte à choisir d'autres formes ω, on peut supposer $h_1 = k_1 = k_2 = k_3 = 0$. En calculant les différentielles et en vérifiant que l'on doit obtenir des formules $d\gamma_i = \sum c_i^{j,k}\gamma_j \wedge \gamma_k$, on obtient $h_2 = h_3 = 0$. En restriction à Y_1, la forme $\theta_2^{0,0}$ est intégrable (même fermée). □

Dans le cas où $\mathcal{Y}$ admet un invariant d'ordre 0, le théorème 1.20 prouve que le feuilletage admet une intégrale première.

Références

[1] A. Bialynicki-Birula, On Galois theory of fields with operators. *Amer. J. Math.* **84** (1) (1962), 89–109. Zbl 0113.03203 MR 0141663

[2] É. Cartan, Sur la structure des groupes infinis de transformations. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **22** (1905), 219–308. Zbl 36.0223.03 MR 1509054

[3] É. Cartan, Les sous-groupes des groupes continus de transformations. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **25** (1908), 57–194. JFM 39.0206.04 MR 1509090

[4] G. Casale, Sur le groupoïde de Galois d'un feuilletage. Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse ; disponible sur http ://doctorants.picard.ups-tlse.fr/theses.htm

[5] G. Casale, Feuilletages singuliers de codimension un, groupoïde de Galois et intégrales premières. *Ann. Inst. Fourier* **56** (3) (2006), 735–779. Zbl 05176557 MR 2244228

[6] P. J. Cassidy et M. F. Singer, Galois theory of parametrized differential equations and linear differential algebraic groups. Dans *Differential equations and quatum groups*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. 9, Eur. Math. Soc. Publ. House, Zurich 2005, 113–155. MR 2322329

[7] J. Drach, Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **15** (1898), 243–384. JFM 29.0349.06 MR 1508959

[8] J. Drach, Sur le groupe de rationalité des équations du second ordre de M. Painlevé. *Bull. Sci. Math.* **39** (1915), 149–166. JFM 45.1296.03

[9] J. Drach, L'équation différentielle de la balistique extérieur et son intégration par quadratures. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (1920), 1–94. JFM 47.0725.01 MR 1509221

[10] J. Drach, Sur le mouvement d'un solide qui a un point fixe. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **179** (1924) 735–737 JFM 50.0531.02

[11] P. Gabriel, Construction de préschémas quotients. Dans *Schémas en groupes* (SGA 63-64, Fasc. 2a exposé 5), Lecture Notes in Math. 151, Springer-Verlag, Berlin 1970, 250–283.

[12] V. Guillemin et S. Sternberg, An algebraic model of transitive differential geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 16–47. Zbl 0121.38801 MR 0170295

[13] V. Guillemin et S. Sternberg, Deformation theory of pseudogroup structure. *Mem. Amer. Math. Soc.* **64** (1966). Zbl 0169.53001 MR 0211421

[14] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*. Dover Publication, New York 1944. Zbl 0063.02971 MR 0010757

[15] E. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*. Pure Appl. Math. 54, Academic Press, New York, London 1973. Zbl 0264.12102 MR 0568864

[16] A. Kumpera et D. Spencer, *Lie Equations*. Ann. of Math. Stud. 73, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1972. Zbl 0258.58015 MR 0380908

[17] S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen I. *Math. Ann.* **16** (1880), 441–529 ; Transformations Groups (translated by M. Ackerman, commented by R. Hermann), dans *Lie groups : History, Frontiers and Applications*, Vol. 1, Math. Sci. Press, Brookline, MA, 1975. JFM 12.0292.01 MR 1510035

[18] B. Malgrange, Le groupoïde de Galois d'un feuilletage, Monographie 38, vol 2, de L'enseignement mathématique (2001). Zbl 1033.32020 MR 1929336

[19] B. Malgrange, *Systèmes Différentiels Involutifs*, Panor. Syntheses 19, Soc. Math. France (2005). Zbl 02233304 MR 2187078

[20] Y. Murata, Classical solutions of the third Painlevé equation. *Nagoya Math. J.* **139** (1995), 37–65. Zbl 0846.34002 MR 1355268

[21] K. Nishioka, A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent. *Nagoya Math. J.* **109** (1988), 63–67. Zbl 0613.34030 MR 0931951

[22] M. Noumi et K. Okamoto, Irreducibility of the second and fourth Painlevé equation. *Funkcial. Ekvac.* **40** (1997), 139–163. Zbl 0881.34052 MR 1454468

[23] P. Painlevé, *Leçons de Stokholm* (1875). Oeuvres complètes Tome **1**, éditions du CNRS (1972) Zbl 00048290 MR 0532682

[24] P. Painlevé, Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. *Bull. Soc. Math.* **28** (1900), 201—261. JFM 31.0337.03 MR 1508858

[25] P. Painlevé, Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation $y_{xx} = 6y^2 + x$. *C. R. Acad. Sci. Paris* **135** (1902), 641–647. Zbl 33.0347.01

[26] E. Picard, Sur les équations différentielles et les groupes algébriques de transformations. *Ann. Fac. Sci. Université de Toulouse* **1** (1887), 1–15. Zbl 19.0308.01 MR 1508053

[27] J.-F.Pommaret, *Differential Galois Theory*. Math. App. 15, Gordon & Breach Sci. Publishers, 1983. Zbl 0539.12013 MR 0720863

[28] J. F. Ritt, *Differential Algebra*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. XXXIII, Amer. Math. Soc., New York 1950. Zbl 0037.18402 MR 0035763

[29] I. M. Singer et S. Sternberg, The infinite groups of Lie and Cartan. I. The transitive groups. *J. Analyse Math.* **15** (1965), 1–114. Zbl 0277.58008 MR 0035763

[30] M. F. Singer, Liouvillian first integral of differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **333** (1992), 673–688. Zbl 0756.12006 MR 1062869

[31] H. Umemura, On the irreducibility of the first differential equation of Painlevé. Dans *Algebraic geometry and commutative algebra*, Vol. II, Kinokuniya, Tokyo 1988, 771–789. Zbl 0704.12007 MR 0977782

[32] H. Umemura, Galois theory of algebraic and differential equation. *Nagoya Math. J.* **144** (1996), 1–58 ; Zbl 0885.12004 MR 1425591

[33] H. Umemura, Differential Galois theory of infinite dimension. *Nagoya Math. J.* **144** (1996), 59–135. Zbl 0878.12002 MR 1425592

[34] H. Umemura et H. Watanabe, Solutions of the second and fourth Painlevé equation. *Nagoya Math. J.* **148** (1997), 151–198. Zbl 0934.33029 MR 1492945

[35] H. Umemura et H. Watanabe, Solution of the third Painlevé equation. *Nagoya Math. J.* **151** (1998), 1–24. Zbl 0917.34004 MR 1650348

[36] E. Vessiot, Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **21** (1904), 9–85. JFM 35.0351.03 MR 1509036

[37] E. Vessiot, Sur la réductibilité et l'intégration des systèmes complets. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **29** (1912), 209–278. JFM 43.0376.01 MR 1509149

[38] H. Watanabe, Solution of the fifth Painlevé equation. *Hokkaido Math. J.* **24** (1995), 231–267. Zbl 0833.34005 MR 1509149

[39] H. Watanabe, Birational canonical transformations and classical solutions of the sixth Painlevé equation. *Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) **27** (1998), 379–425. Zbl 0933.34095 MR 1678014

Received August 13, 2006

Guy Casale, IRMAR - UMR CNRS 6625, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

E-mail: guy.casale@univ-rennes1.fr
URL: http://perso.univ-rennes1.fr/guy.casale/