Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 83 (2008)

Artikel: Cohomologie Lp et pincement
Autor: Pansu, Pierre
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-99031

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 83 (2008), 327–357 **Commentarii Mathematici Helvetici**
© Swiss Mathematical Society

Cohomologie L^p et pincement

Pierre Pansu*

Résumé. On donne un critère optimal d'annulation de la torsion en cohomologie L^p pour les variétés riemanniennes à courbure sectionnelle négative pincée. Il en résulte que certains espaces homogènes à courbure négative ne sont pas quasiisométriques à des variétés plus pincées qu'eux.

Abstract. A sharp vanishing theorem for the L^p cohomology torsion of Riemannian manifolds with pinched negative curvature is given. It follows that certain negatively curved homogeneous spaces cannot be quasiisometric to better pinched manifolds.

Mathematics Subject Classification (2000). 43A15, 43A80, 46E35, 53C20, 53C30, 58A14.

Mots clés. Cohomologie L^p, courbure négative, espace homogène, espace de Besov.

Keywords. L^p-cohomology, negative curvature, homogeneous space, Besov space.

1. Introduction

1.1. Motivation : un problème de pincement. D'un théorème de M. Berger et W. Klingenberg, [Be], il résulte que si V est un espace symétrique de rang un de type compact à courbure non constante (i.e. un espace projectif complexe $\mathbb{C}P^m$, $m \geq 2$, un espace projectif quaternionien $\mathbb{H}P^m$, $m \geq 2$, ou le plan projectif des octaves de Cayley $\mathbf{Ca}P^2$), V n'admet pas de métrique à courbure comprise entre δ et 1 si $\delta > \frac{1}{4}$.

On se pose un problème analogue en courbure négative. Si $-1 \leq \delta < 0$, on dit qu'une variété riemannienne est *δ-pincée* s'il existe $a > 0$ tel que sa courbure soit comprise entre $-a$ et δa.

Par exemple, l'espace hyperbolique réel est -1-pincé. Les espaces symétriques de rang un de type non compact à courbure non constante sont $-\frac{1}{4}$-pincés. Il s'agit des espaces hyperboliques complexes $\mathbb{C}H^m$, $m \geq 2$, des espaces hyperboliques quaternioniens $\mathbb{H}H^m$, $m \geq 2$, et du plan hyperbolique des octaves de Cayley $\mathbf{Ca}H^2$.

Le problème du pincement optimal consiste à déterminer quel est le meilleur pincement possible pour une métrique sur une variété donnée. Pour les variétés simplement connexes (et donc difféomorphes à l'espace hyperbolique réel), il convient de

*Pierre Pansu est partiellement soutenu par le réseau européen CODY et le projet ANR "Cannon" (ANR-06-BLAN-0366).

se restreindre à des métriques comparables à une métrique de référence, par exemple, qui lui sont quasiisométriques. On rappelle que deux variétés riemanniennes M et N sont dites *quasiisométriques* s'il existe une application $f : M \to N$ et des constantes C et L telles que l'image de f soit C-dense dans N et pour tous points $x, y \in M$,

$$-C + \frac{1}{L} \leq d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) + C.$$

Question. Soit M une variété riemannienne δ-pincée. Existe-t'il une variété riemannienne N quasiisométrique à M et δ'-pincée avec $\delta' < \delta$?

Dans cet article, on détermine le pincement optimal pour des familles d'espaces homogènes riemanniens. Voici un exemple. Soit $G_{2,4,-\frac{1}{4}}$ le produit semi-direct de $\mathbb{R}^3$ par $\mathbb{R}$ défini par le groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathbb{R}^3$ engendré par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La métrique riemannienne qui en coordonnées exponentielles t (sur le facteur $\mathbb{R}$), x, y et z (sur le facteur $\mathbb{R}^3$) s'écrit

$$ds^2 = dt^2 + e^{2t}(dx^2 + dy^2) + e^{4t}dz^2$$

est invariante à gauche. On vérifie aisément (voir par exemple [He]) que cette métrique est $-\frac{1}{4}$-pincée.

Théorème 1. *Soit $\delta < -\frac{1}{4}$. Aucune variété riemannienne δ-pincée n'est quasiisométrique à $G_{2,4,-\frac{1}{4}}$.*

La preuve utilise la *torsion en cohomologie L^p*. C'est un espace vectoriel, noté $T^{2,p}(M)$, défini pour $p \geq 1$. Pour une variété simplement connexe à courbure négative, le nombre

$$T(M) = \inf\{p > 1 \ ; \ T^{2,p}(M) \neq 0\}$$

est un invariant de quasiisométrie. Un théorème de comparaison (théorème A) entraîne que si $\dim M = 4$ et si M est δ-pincée, alors $T(M) \geq 1 + 2\sqrt{-\delta}$. Un calcul direct (théorème B) montre que pour le produit semi-direct $G_{2,4,-\frac{1}{4}}$, la torsion $T^{2,p}$ est non nulle pour $2 < p < 4$, d'où

$$T(G_{2,4,-\frac{1}{4}}) = 2.$$

La minoration du pincement s'en déduit immédiatement.

1.2. Un problème ouvert. A ma connaissance, le problème du pincement optimal pour les espaces symétriques $-\frac{1}{4}$-pincés est toujours ouvert. Pourtant, le plan hyperbolique complexe $\mathbb{C}H^2$ est infiniment voisin de $G_{2,4,-\frac{1}{4}}$. Il peut-être vu comme un groupe de Lie résoluble muni d'une métrique invariante à gauche. Ce groupe est le produit semi-direct du groupe de Heisenberg par $\mathbb{R}$ engendré par la dérivation de matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Toutefois

$$T(\mathbb{C}H^2) = 4,$$

si bien que le théorème de comparaison ne donne pas de borne optimale pour le pincement des variétés riemanniennes N quasiisométriques au plan hyperbolique complexe. Il y a donc une limitation essentielle dans la méthode.

Le problème restreint où l'on suppose que la variété inconnue N revêt une variété riemannienne compacte a été résolu par M. Ville [V] en dimension 4, par L. Hernández [Hz], S. T. Yau et F. Zheng, [YZ] pour les espaces hyperboliques complexes, par N. Mok, Y. T. Siu et S. K. Yeung [MSY], J. Jost et S. T. Yau [JY] pour les autres espaces symétriques de rang 1.

1.3. Cohomologie L^p. Soit M une variété riemannienne. Soit $p > 1$ un réel. On note $L^p\Omega^*(M)$ l'espace de Banach des formes différentielles L^p et $\Omega^{*,p}(M) = L^p \cap d^{-1}L^p$ l'espace des formes différentielles L^p dont la différentielle extérieure est aussi L^p. La cohomologie du complexe $(\Omega^{*,p}(M), d)$ s'appelle la *cohomologie* L^p de M. Elle est intéressante surtout si M est non compacte.

Par définition, la cohomologie L^p est invariante par difféomorphisme bilipschitzien. Dans la classe des variétés simplement connexes à courbure négative ou nulle, c'est un invariant de quasiisométrie (cf. [G2]).

En toute généralité, la cohomologie L^p se décompose en cohomologie réduite et torsion

$$0 \to T^{*,p} \to H^{*,p} \to R^{*,p} \to 0,$$

où la *cohomologie réduite* est $R^{*,p} = \ker d / \overline{\operatorname{im} d}$ et la *torsion* est $T^{*,p} = \overline{\operatorname{im} d} / \operatorname{im} d$. La cohomologie réduite (parfois notée $\bar{H}^k_{(p)}$) est un espace de Banach sur lequel les isométries de M agissent isométriquement. La torsion est non séparée.

Par exemple, la cohomologie L^p de la droite réelle est entièrement de torsion. La cohomologie L^p du plan hyperbolique est entièrement réduite. Néanmoins, cohomologie réduite et torsion coexistent souvent.

1.4. Pincement de la courbure. En degrés $k > 1$, la cohomologie L^p est liée de façon optimale au pincement de la courbure.

Théorème A. *Soient $\delta \in]-1, 0[$ un réel, n et $k = 2, \ldots, n-1$ des entiers. Notons $\boldsymbol{q}(n, \delta, k) = 1 + \frac{n-k-1}{k}\sqrt{-\delta}$.*

Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1 \leq K \leq \delta$. Alors

$$T^{k,p}(M) = 0, \quad \textit{i.e.} \quad H^{k,p}(M) \textit{ est séparé pour } 1 < p < \boldsymbol{q}(n, \delta, k-1).$$
$$H^{k,p}(M) = 0 \quad \textit{pour } 1 < p \leq \boldsymbol{q}(n, \delta, k).$$

Ce résultat, annoncé dans [P1], est un raffinement de celui de H. Donnelly et F. Xavier, [DX], concernant l'annulation de la cohomologie L^2 réduite. La condition d'annulation de la torsion est optimale. D'abord, pour l'espace hyperbolique ($\delta = -1$) en tout degré, voir en 29. Mais il y a d'autres exemples. Soient n et μ des entiers tels que $2 \leq \mu \leq n-1$ et $\delta \in]-1, 0[$. Soit $G_{\mu,n,\delta}$ le produit semi-direct $\mathbb{R} \ltimes_\alpha \mathbb{R}^{n-1}$ où α est une matrice diagonale avec seulement deux valeurs propres distinctes 1 et $\sqrt{-\delta} < 1$ de multiplicités $\mu - 1$ et $n - \mu$. Alors le groupe de Lie $G_{\mu,n,\delta}$ possède une métrique riemannienne invariante à gauche δ-pincée.

Théorème B. *Soient n et $k = 2, \ldots, n-1$ des entiers.*

(1) *Pour l'espace hyperbolique réel, $T^{k,p}(\mathbb{R}H^n) \neq 0$ si et seulement si $p = \frac{n-1}{k-1}$.*

(2) *Soit $\delta \in]-1, 0[$ un réel. Si $k = \mu$ et*

$$\boldsymbol{q}(n, \delta, k-1) < p < 1 + \frac{1 + (n-1-k)\sqrt{-\delta}}{k - 2 + \sqrt{-\delta}},$$

alors $T^{k,p}(G_{\mu,n,\delta}) \neq 0$, i.e. $H^{k,p}(G_{\mu,n,\delta})$ n'est pas séparé.

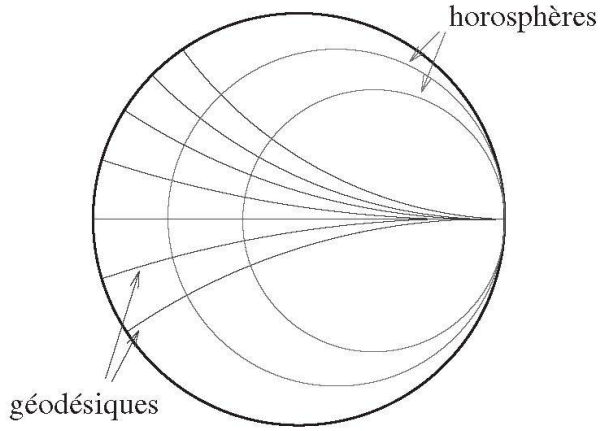
Par conséquent, pour tout $\mu = 2, \ldots, n-1$, $G_{\mu,n,\delta}$ n'est pas quasiisométrique à une variété δ'-pincée avec $\delta' < \delta$.

Ce résultat, qui élabore sur [KS] et [K1], a été annoncé dans [P3].

1.5. Cas des espaces symétriques de rang un. Les espaces symétriques de rang 1 de type non compact à courbure non constante sont $-1/4$-pincés. Alors que ce sont de bons candidats pour tester l'optimalité du théorème A (la preuve ne comporte aucune perte quand on l'applique à ces espaces pour les valeurs adéquates de k), le calcul révèle que leur cohomologie L^p reste séparée au-delà des intervalles donnés par le théorème A. Cela résulte de la non commutativité de leur unipotent maximal, voir [P2].

1.6. Méthode. Une variété riemannienne M à courbure sectionnelle négative ressemble à un produit. En effet, le flot ϕ_t de l'opposé du gradient d'une fonction de Busemann b réalise un difféomorphisme de M sur $H \times \mathbb{R}$, où $H = b^{-1}(0)$ est une horosphère. Par exemple, pour l'espace homogène $G_{2,4,-\frac{1}{4}}$ (resp. le plan hyperbolique complexe $\mathbb{C}H^2$), $b(t) = -t$, $H = \mathbb{R}^3$ (resp. H = groupe d'Heisenberg). Les

orbites du flot ϕ_t sont des géodésiques asymptotes en $+\infty$, i.e. aboutissant en un même point à l'infini, en provenance de tous les autres points à l'infini (voir figure).



On montre que si la courbure est suffisamment pincée (i.e., sous les hypothèses du théorème A), toute k-forme fermée L^p ω possède une *valeur au bord*

$$\omega_\infty = \lim_{t\to+\infty} \phi_t^* \omega.$$

De plus, ω est la différentielle d'une forme L^p si et seulement si $\omega_\infty = 0$. Par conséquent, l'application valeur au bord induit une injection de $H^{k,p}$ dans un espace séparé, donc $H^{k,p}$ est séparé.

Inversement, pour les espaces homogènes $G_{k,n,\delta}$, on construit explicitement des classes de cohomologie non nulles, en utilisant la structure de produit semi-direct. Il faut se méfier de la formule de Künneth, qui n'est pas vraie en présence de torsion, même pour les produits directs. Après des préliminaires (dualité de Poincaré, annulation de la cohomologie L^p réduite des groupes abéliens), on introduit et on construit des classes de torsion non nulles particulières, dites *robustes*, qui restent non nulles après produit cartésien. La nature semi-directe du produit $G_{k,n,\delta} = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ exige la construction de classes robustes adaptées à la graduation de l'algèbre extérieure de $\mathbb{R}^{n-1}$ par les espaces propres de la dérivation α. Puis on effectue le produit cartésien de ces classes avec des classes de cohomologie à support compact de $\mathbb{R}$. On obtient ainsi un intervalle ouvert de valeurs de p pour lesquelles $T^{k,p}(G_{k,n,\delta}) \neq 0$. Pour l'espace hyperbolique réel, il y a exactement une valeur de p en chaque degré > 1 pour laquelle $T^{k,p}(\mathbb{R}H^n) \neq 0$. On le montre en effectuant le produit cartésien d'une classe de torsion robuste de $\mathbb{R}$ avec une classe de cohomologie à support compact de $\mathbb{R}^{n-1}$.

1.7. Remerciements. Je tiens à remercier D. Rugina pour les nombreuses conversations que nous avons eues autour de la cohomologie L^p, V. Goldshtein et M. Troyanov, pour leurs marques d'intérêt et leur manuscrit [GT] qui a été une source d'inspiration.

2. Annulation de la torsion

2.1. Fonctions de Busemann. Soit M une variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle négative pincée. On se donne une fonction de Busemann b. C'est une fonction, obtenue comme limite de distances à des points, qui possède les propriétés suivantes.

(1) b est lisse, son gradient est partout de norme 1.

(2) Les lignes de gradient de b sont des géodésiques convergeant en $+\infty$ vers un même point du bord à l'infini de M.

(3) Les propriétés de contraction du flot ϕ_t de $-\nabla b$ sont contrôlées par la courbure sectionnelle.

Exemple 1. *Cas de l'espace hyperbolique réel.* Dans ce cas, tout plan totalement géodésique contenant une ligne de gradient de b est stable par ϕ_t. Orthogonalement à ses orbites, ϕ_t est une homothétie de rapport e^{-t} : $(\phi_t)^*(g - b^2) = e^{-2t}(g - b^2)$. Autrement dit, ϕ_t contracte de la même façon dans toutes les directions autour d'une orbite. ϕ_t multiplie les volumes par le facteur $e^{-(n-1)t}$, où $n = \dim M$. Si ω est une k-forme différentielle sur M, elle se décompose uniquement en $\omega = \beta + \gamma \wedge db$ de sorte que $\iota_\xi \beta = 0$, $\iota_\xi \gamma = 0$. Alors

$$|\phi_t^* \beta|(x) = e^{kt} |\beta|(\phi_t(x)), \quad |\phi_t^* \gamma|(x) = e^{(k-1)t} |\gamma|(\phi_t(x)).$$

La formule de changement de variables donne

$$\int_M |\phi_t^* \beta|^p = e^{(kp-n+1)t} \int_M |\beta|^p, \quad \int_M |\phi_t^* \gamma|^p = e^{((k-1)p-n+1)t} \int_M |\gamma|^p.$$

Autrement dit, le flot ϕ_t contracte ou dilate exponentiellement la norme L^p des k-formes différentielles, transversalement à ses orbites, suivant que p est inférieur ou supérieur à $\frac{n-1}{k}$.

Exemple 2. *Cas de l'espace hyperbolique complexe.* Dans ce cas, toute ligne de gradient est contenue dans une droite complexe, totalement géodésique, de courbure sectionnelle -1, stable par ϕ_t. Tangentiellement à cette droite, et orthogonalement à l'orbite, ϕ_t est une homothétie de rapport e^{-t}. Tout plan contenant ξ mais orthogonal à la droite complexe, s'exponentie en une surface totalement géodésique à courbure sectionnelle -1, stable par ϕ_t, donc, dans ces directions, ϕ_t est une homothétie de rapport $e^{-t/2}$. Par conséquent, ϕ_t multiplie les volumes par e^{-mt}, où $m = \dim_{\mathbb{C}} M = \frac{1}{2} \dim M$. Si ω est une k-forme différentielle sur M, elle se décompose uniquement en $\omega = \beta + \gamma \wedge db$ de sorte que $\iota_\xi \beta = 0$, $\iota_\xi \gamma = 0$, puis β se décompose à son tour en $\beta = \epsilon + \eta \wedge Jdb$, où J désigne la structure complexe, et $\iota_{J\xi} \epsilon = 0$, $\iota_{J\xi} \eta = 0$. Alors

$$|\phi_t^* \epsilon|(x) = e^{kt/2} |\epsilon|(\phi_t(x)), \quad |\phi_t^* \eta|(x) = e^{(k-1)t/2} |\eta|(\phi_t(x)).$$

Remarquer que $|\phi_t^* J db| = e^{-t}$. Il s'ensuit que

$$\int_M |\phi_t^* \epsilon|^p = e^{(kp-2m)t/2} \int_M |\epsilon|^p,$$
$$\int_M |\phi_t^* \eta \wedge J db|^p = e^{((k+1)p-2m)t/2} \int_M |\eta \wedge J db|^p.$$

Autrement dit, le flot ϕ_t contracte (resp. dilate) exponentiellement la norme L^p de toutes les k-formes différentielles, transversalement à ses orbites, si $p < \frac{2m}{k+1} = \frac{n}{k}$ (resp. si $p > \frac{2m}{k}$). Lorsque $\frac{2m}{k+1} < p < \frac{2m}{k}$, la situation mérite plus d'attention.

2.2. Champs de vecteurs (k, p)-contractants. Les exemples ci-dessus suggèrent la définition suivante.

Définition 3. Soit M une variété riemannienne. Soit ξ un champ de vecteurs complet sur M, soit ϕ_t son flot. Soit $p > 1$ un réel, soit k un entier inférieur à la dimension de M. On dit que ξ est (k, p)-*contractant* si ϕ_t diminue exponentiellement la norme L^p des k-formes transversalement à ξ. Plus précisément, on note $\mathrm{Jac}(\phi_t)$ le jacobien de ϕ_t, et on demande qu'il existe des constantes C et $\eta > 0$ telles que, pour tout $x \in M$ et toute k-forme $\beta \in \Lambda^k T^*M$ telle que $\iota_\xi \beta = 0$,

$$|\phi_t^* \beta|(x)\ \mathrm{Jac}_x(\phi_t)^{1/p} \leq C\, e^{-\eta t} |\beta|(\phi_t(x))$$

pour tout $t \geq 0$.

On dit que ξ est (k, p)-*dilatant* si $-\xi$ est (k, p)-contractant.

Exemple 4. *Cas des produits semi-directs* $G = H \rtimes_\alpha \mathbb{R}$. Ici, H est un groupe de Lie, α une dérivation de l'algèbre de Lie de H qui engendre un groupe à un paramètre $e^{t\alpha}$ d'automorphismes de H, et $G = H \times \mathbb{R}$ muni de la multiplication

$$(h, t)(h', t') = (h\, e^{t\alpha}(h'), t + t').$$

On utilise le champ de vecteurs invariant à gauche $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ qui engendre l'action à droite du facteur $\mathbb{R}$. Alors les formes différentielles annulées par ι_ξ s'identifient aux formes différentielles sur H dépendant de t. Notons $\mathrm{sp}(\alpha)$ l'ensemble des valeurs propres de α répétées autant de fois que leurs multiplicités. Le flot ϕ_t agit sur les k-formes transverses avec pour valeurs propres les nombres $e^{-t\lambda}$, où λ décrit les sommes de k éléments de $\mathrm{sp}(\alpha)$. Par conséquent, ξ est (k, p)-contractant si et seulement si les parties réelles de toutes ces sommes sont strictement supérieures à $\frac{\mathrm{tr}(\alpha)}{p}$.

Proposition 5. *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n, simplement connexe, dont la courbure sectionnelle K satisfait $-1 \leq K \leq \delta < 0$. Soit ξ un champ de vecteurs de Busemann. Si $k = 0, \ldots, n-1$ et si $p > 1$ satisfait*

$$p < \boldsymbol{q}(n, \delta, k) = 1 + \frac{n-k-1}{k}\sqrt{-\delta}, \quad (\textit{resp. } p > 1 + \frac{n-k-1}{k\sqrt{-\delta}}),$$

alors le champ ξ est (k, p)-contractant (resp. (k, p)-dilatant).

Preuve. Notons ϕ_t le flot de ξ. Ses trajectoires sont des géodésiques parcourues à vitesse 1. Soit $x \in M$. La quantité à majorer est

$$n(t, x) = p \log \|(\Lambda^k d\phi_t)_{|\Lambda^k \xi^\perp}\| - \log \det(d\phi_t).$$

Elle satisfait, pour tous s et t, $n(t + s, x) = n(s, \phi_t(x)) + n(t, x)$.

Notons τ_t le transport parallèle de $\phi_t(x)$ à x le long de la géodésique $s \mapsto \phi_s(x)$. Alors $\tau_t d\phi_t$ préserve l'hyperplan orthogonal à $\xi(x)$. Notons $J(t)$ sa matrice dans une base orthonormée de $\xi(x)^\perp$, de sorte que $n(t, x) = p \log \|\Lambda^k J(t)\| - \log \det(J(t))$.

Comme ξ est un gradient, la matrice $U(t) = J(t)^{-1} J'(t)$, seconde forme fondamentale des hypersurfaces de niveau, est symétrique. Comme les colonnes de J sont des champs de Jacobi, la matrice $U(t)$ satisfait l'équation de Riccati

$$U' + U^2 + R = 0$$

où R est la matrice de l'opérateur de courbure $v \mapsto R(v, \xi)\xi$. Classiquement (voir par exemple [BK], [CE]), on en tire une estimation des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ de U,

$$\sqrt{-\delta} \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq 1.$$

Comme $J(0) = I$ est l'identité, $J(t) = I + tU(0) + o(t)$ donc $\|\Lambda^k J(t)\| \leq 1 + |t| \|\mathcal{D}^k U(0)\| + o(t)$ où $\mathcal{D}^k U$ désigne l'extension de U comme dérivation de l'algèbre extérieure. On peut donc majorer la dérivée à droite

$$\begin{aligned} n'(0+) = \frac{\partial n}{\partial t}(0, x) &\leq p\|\mathcal{D}^k U(0)\| - \operatorname{tr} U(0) \\ &\leq p\Big(\sum_{i=n-k}^{n-1} \lambda_i\Big) - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \\ &= (p-1)\Big(\sum_{i=n-k}^{n-1} \lambda_i\Big) - \sum_{i=1}^{n-k-1} \lambda_i \\ &\leq k(p-1) - (n-k-1)\sqrt{-\delta}. \end{aligned}$$

En dérivant l'équation $n(t+s, x) = n(s, \phi_t(x)) + n(t, x)$, on trouve que $n'(t+, x) = n'(0+, \phi_t(x)) \leq k(p-1) - (n-k-1)\sqrt{-\delta}$ pour tout t. En intégrant, il vient pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|(\Lambda^k d\phi_t)_{|\Lambda^k \xi^\perp}\|^p \leq e^{-\eta t} \operatorname{Jac}(\phi_t),$$

avec $\eta = (n-k-1)\sqrt{-\delta} - k(p-1)$. Si $\eta > 0$, i.e. si la courbure est suffisamment pincée, on conclut que ξ est (k, p)-contractant.

Si on remplace ξ par $-\xi$, les valeurs propres λ_i de la seconde forme fondamentale sont remplacées par $\mu_i = -\lambda_{n-i}$ qui satisfont

$$-1 \leq \mu_1 \leq \cdots \leq \mu_{n-1} \leq -\sqrt{-\delta}.$$

La nouvelle fonction $\tilde{n}(t, x) = n(-t, x)$ satisfait

$$\begin{aligned}\tilde{n}'(0+) &\leq p\Big(\sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i\Big) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \\ &= (p-1)\Big(\sum_{i=n-k}^{n-1} \mu_i\Big) - \sum_{i=1}^{n-k-1} \mu_i \\ &\leq k(p-1)(-\sqrt{-\delta}) + (n-k-1).\end{aligned}$$

Il vient

$$\|(\Lambda^k d\phi_t)_{|\Lambda^k \xi^\perp}\|^p \leq e^{\eta' t} \operatorname{Jac}(\phi_t)$$

avec $\eta' = k(p-1)\sqrt{-\delta} - n + k + 1$. Si $\eta' > 0$, on conclut que ξ est (k, p)-dilatant. □

Remarque 6 (*Cas limite*). Si $p = \boldsymbol{q}(n, \delta, k)$, le flot ϕ_t diminue au sens large la norme L^p des k-formes transverses, au sens où

$$\|(\Lambda^k d\phi_t)_{|\Lambda^k \xi^\perp}\|^p \leq \operatorname{Jac}(\phi_t).$$

Remarque 7 (*Cas d'égalité*). Dans l'argument ci-dessus, les inégalités sont optimales dans le cas où les valeurs propres ne prennent que deux valeurs. Il est facile, à l'aide de [He], de faire la liste des espaces homogènes à courbure sectionnelle strictement négative pour lesquels les valeurs propres prennent exactement deux valeurs égales aux bornes de la courbure sectionnelle. En voici deux familles particulières.

Exemple 8. *Les espaces symétriques de rang un.* La courbure sectionnelle varie entre -1 et $-1/4$. Les valeurs propres sont $1/2$ (avec multiplicité $2m-2$ pour l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{C}H^m$, $m \geq 2$, $4m-4$ pour l'espace hyperbolique quaternionien $\mathbb{H}H^m$, $m \geq 2$, 8 pour le plan hyperbolique des octaves de Cayley $\mathbf{Ca}H^2$), et 1 avec multiplicité complémentaire, soit respectivement 1, 3 et 7.

Exemple 9. *Une famille d'espaces homogènes.* Soient $1 \leq \mu < n$ des entiers et $\delta \in]-1, 0[$. Soit $G_{\mu,n,\delta}$ le produit semi-direct $G = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ où α est une matrice diagonale avec seulement deux valeurs propres distinctes 1 et $\sqrt{-\delta} < 1$ de multiplicités $\mu - 1$ et $n - \mu$. La métrique invariante $dt^2 + e^{2t} dx^2 + e^{2t\sqrt{-\delta}} dy^2$ (où x regroupe les $\mu - 1$ premières coordonnées de $\mathbb{R}^{n-1}$ et y les $n - \mu$ suivantes) a une courbure sectionnelle comprise entre -1 et $-\delta$.

2.3. Valeur au bord

Proposition 10. *Soit M une variété riemannienne, soit ξ un champ de vecteurs complet sur M, de flot ϕ_t.*

(1) *On suppose que ξ est $(k-1,p)$-contractant et que sa norme est bornée. Alors toute k-forme fermée L^p ω possède une* valeur au bord

$$\omega_\infty = \lim_{t\to+\infty} \phi_t^*\omega,$$

et $\omega - \omega_\infty$ est la différentielle d'une forme L^p.

(2) *Si ξ est $(k-1,p)$- et $(k-2,p)$-contractant, et si $\omega = d\beta$ où $\beta \in L^p$, alors $\omega_\infty = 0$.*

(3) *Si ξ est $(k-1,p)$- et (k,p)-contractant, alors $\omega_\infty = 0$.*

Par conséquent,

(4) *Si ξ est $(k-1,p)$- et $(k-2,p)$-contractant, $T^{k,p}(M) = 0$.*

(5) *Si ξ est $(k-1,p)$- et (k,p)-contractant, $H^{k,p}(M) = 0$.*

Preuve. D'après la formule de Cartan, la dérivée de Lie $\mathcal{L}_\xi\omega = \frac{\partial}{\partial t}\phi_t^*\omega_{|t=0}$ est égale à

$$\mathcal{L}_\xi\omega = d(\iota_\xi\omega) + \iota_\xi(d\omega).$$

Supposons que $d\omega = 0$. En intégrant l'identité $\frac{\partial}{\partial t}\phi_t^*\omega = \phi_t^*\mathcal{L}_\xi\omega$, il vient

$$\begin{aligned}\phi_t^*\omega - \omega &= \int_0^t \phi_s^*\mathcal{L}_\xi\omega\, ds \\ &= d\left(\int_0^t \phi_s^*\iota_\xi\omega\, ds\right).\end{aligned}$$

Si ξ est borné, $\|\iota_\xi\omega\|_{L^p} \le \|\xi\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^p}$. Si de plus ξ est $(k-1,p)$-contractant, il existe C et $\eta > 0$ tels que $\|\phi_s^*\iota_\xi\omega\|_{L^p} \le C\, e^{\eta s}\|\omega\|_{L^p}$. Par conséquent, l'intégrale

$$B\omega = \int_0^{+\infty} \phi_s^*\iota_\xi\omega\, ds$$

converge dans L^p. On note

$$\omega_\infty = \omega + dB\omega = \lim_{t\to+\infty} \phi_t^*\omega.$$

Il s'agit d'une limite au sens des distributions. Si la limite est nulle, alors $\omega = d(-B\omega)$ au sens des distributions. Cela entraîne que $-B\omega \in \Omega^{k-1,p}(M)$, et que sa différentielle est ω, donc que la classe de cohomologie L^p de ω est nulle.

Si ξ est de plus $(k-2,\, p)$-contractant, on peut aussi définir un opérateur B borné sur les formes L^p de degré $k-1$. Soit α une $(k-1)$-forme L^p telle que $d\beta = \omega$. Il vient

$$\begin{aligned}\phi_t^*\beta - \beta &= \int_0^t \phi_s^* \mathcal{L}_\xi \omega \, ds \\ &= d\left(\int_0^t \phi_s^* \iota_\xi \beta \, ds \right) + \int_0^t \phi_s^* \iota_\xi (d\beta) \, ds,\end{aligned}$$

qui tend vers $dB\beta + B\omega$ quand t tend vers $+\infty$. Mais comme ξ est $(k,\, p)$-contractant, $\phi_t^*\beta$ tend vers 0. On trouve que $\beta = -dB\beta - B\omega$, d'où

$$\omega = d\beta = -dB\omega = \omega - \omega_\infty,$$

d'où $\omega_\infty = 0$.

Cela prouve que dL^p est exactement le noyau de l'application valeur au bord, de $\Omega^{k,p}(M) \cap \ker d$ dans l'espace vectoriel topologique des formes différentielles sur M à coefficients distributions. Par conséquent, il est fermé, donc $T^{k,p}(M) = 0$.

Supposons que ξ est $(k-1,\, p)$- et $(k,\, p)$-contractant. Soit ω une k-forme fermée L^p. On écrit $\omega = \beta + db \wedge \gamma$ où $\iota_\xi \beta = 0$, $\iota_\xi \gamma = 0$. Alors $\phi_t^*\beta$ et $\phi_t^*\gamma$ tendent vers 0 dans L^p, donc $\phi_t^*\omega$ tend vers 0 dans L^p, donc $\omega_\infty = 0$, d'où $\omega \in dL^p$. Cela prouve que $H^{k,p}(M) = 0$. □

Remarque 11. Plus généralement, sous des hypothèses adéquates, l'opérateur B définit une homotopie du complexe $\Omega^{*,p}(M)$ sur un complexe de formes différentielles invariantes par le flot ϕ_t. Ce point de vue est développé dans [GKS], [P2].

2.4. Preuve du théorème A. Soit M une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure négative δ-pincée. Soit $k < n = \dim M$. Notons $\boldsymbol{q}(n, \delta, k) = 1 + \frac{n-k-1}{k}\sqrt{-\delta}$. Remarquer que $\boldsymbol{q}(n, \delta, k)$ est une fonction décroissante de k.

D'après la proposition 5, si $p < \boldsymbol{q}(n, \delta, k-1)$, les champs de vecteurs de Busemann ξ sont $(k-1,\, p)$ et $(k-2,\, p)$-contractants. La proposition 10 s'applique, et $T^{k,p}(M) = 0$. De même, si $p < \boldsymbol{q}(n, \delta, k)$, ξ est $(k-1,\, p)$ et $(k,\, p)$-contractant, donc $H^{k,p}(M) = 0$.

Il reste à traiter le cas limite $p = \boldsymbol{q}(n, \delta, k)$. Dans ce cas, d'après la remarque 6,

$$\|(\Lambda^k d\phi_t)_{|\Lambda^k \xi^\perp}\|^p \leq \mathrm{Jac}(\phi_t).$$

Soit K un compact de M. Il existe une constante $c = c(K)$ telle que les images $\phi_{cj}(K)$ pour $j \in \mathbb{Z}$ soient deux à deux disjointes. Alors la suite $\|\omega\|_{L^p(\phi_{cj}(K))}$ est dans $\ell^p(\mathbb{Z})$, donc tend vers 0. L'inégalité précédente entraîne que si ω est une k-forme sur M annulée par ι_ξ,

$$\|\phi_{cj}^*\omega\|_{L^p(K)} \leq \|\omega\|_{L^p(\phi_{cj}(K))}$$

qui tend vers 0. Cela montre que la limite au sens des distributions ω_∞ est nulle sur tout compact, donc est nulle. On conclut que $H^{k,p}(M) = 0$ aussi dans ce cas. □

Remarque 12 (*Cas des produits semi-directs* $G = H \rtimes_\alpha \mathbb{R}$). Dans le cas des groupes $G_{\mu,n,\delta}$, le théorème A s'applique, et la torsion L^p s'annule en degré μ pour tout $p < 1 + \boldsymbol{q}(n, \delta, \mu - 1)$.

Soit $G = H \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ un produit semi direct plus général. Notons $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ les parties réelles des valeurs propres de α répétées autant de fois que leur multiplicité. On suppose que $\lambda_1 > 0$. On utilise le champ de vecteurs invariant à gauche ξ qui engendre l'action à droite du facteur $\mathbb{R}$. Le champ $-\xi$ est $(k-1, p)$-contractant et $(k-2, p)$-contractant tant que p reste strictement inférieur à $\frac{\operatorname{tr}\alpha}{\lambda_1+\cdots+\lambda_{k-1}}$. La proposition 10 s'applique, et on conclut que la torsion L^p s'annule.

3. Exemples où la torsion est non nulle

Ce seront des groupes de Lie, produits semi-directs de groupes abéliens par $\mathbb{R}$. On construit des formes différentielles fermées explicites en utilisant la structure produit. Elles sont nulles en cohomologie réduite, parce que la cohomologie réduite d'un groupe nilpotent est nulle. Pour montrer qu'elles sont non nulles en torsion L^p, on utilise la dualité de Poincaré.

3.1. Dualité de Poincaré.

Le lemme suivant est essentiellement dû à V. Goldshtein et M. Troyanov, [GT].

Lemme 13. *Soit M une variété riemannienne orientée complète de dimension n. Etant donné $p > 1$, on note p' l'exposant conjugué, i.e. tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soit ω une k-forme différentielle fermée et L^p sur M. Alors*

- *ω est non nulle en cohomologie L^p réduite si et seulement si il existe une $(n-k)$-forme fermée $\psi \in L^{p'}$ telle que $\int_M \omega \wedge \psi \neq 0$.*
- *ω est non nulle en cohomologie L^p si et seulement si il existe une suite ψ_j de $(n-k)$-formes différentielles $L^{p'}$ telles que $\int_M \omega \wedge \psi_j \geq 1$ et $\|d\psi_j\|_{L^{p'}}$ tend vers 0.*

Preuve. Comme M est complète, pour toute $(n-1)$-forme L^1 dont la différentielle est L^1, on a

$$\int_M d\omega = 0.$$

Par conséquent, si $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ et $\psi \in \Omega^{n-1-k,p'}(M)$,

$$\int_M \omega \wedge d\psi = (-1)^{k+1} \int_M d\omega \wedge \psi.$$

Si $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ est nulle en cohomologie L^p réduite, alors il existe une suite $\beta_j \in \Omega^{k-1,p}(M)$ telle que $d\beta_j$ converge vers ω dans L^p. Si $\psi \in \Omega^{n-1-k,p'}(M)$, il vient

$$\int_M \omega \wedge \psi = \lim_j \int_M d\beta_j \wedge \psi = \lim_j \int_M \beta_j \wedge d\psi.$$

Par conséquent, pour toute forme fermée $\psi \in \Omega^{n-k,p'}(M)$, $\int_M \omega \wedge \psi = 0$.

Inversement, si $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ n'est pas nulle en cohomologie réduite, alors, d'après Hahn–Banach, il existe une forme linéaire continue L sur $L^p\Omega^k(M)$ qui s'annule sur l'adhérence de l'image $d\Omega^{k-1,p}(M)$ mais pas sur ω. Par dualité de L^p et $L^{p'}$, il existe une forme $\psi \in L^{p'}\Omega^{n-k}(M)$ telle que pour tout $\gamma \in L^p\Omega^k(M)$, $L(\gamma) = \int_M \gamma \wedge \psi$. Si β est lisse et à support compact, on a $0 = L(d\beta) = \int_M d\beta \wedge \psi$, i.e. $d\psi = 0$ au sens des distributions. On conclut que $\psi \in \Omega^{n-1-k,p'}(M)$ est fermée et satisfait $\int_M \omega \wedge \psi \neq 0$.

Si $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ est nulle en cohomologie L^p, i.e. $\omega = d\beta$ où $\beta \in \Omega^{k-1,p}(M)$, alors pour tout $\psi \in \Omega^{n-1-k,p'}(M)$,

$$\int_M \omega \wedge \psi = \int_M \beta \wedge d\psi \leq \|\beta\|_{L^p} \|d\psi\|_{L^{p'}},$$

donc si $\|d\psi_j\|_{L^{p'}}$ tend vers 0, il en est de même de $\int_M \omega \wedge \psi_j$.

Inversement, soit $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ une forme fermée. Si ω n'est pas nulle en cohomologie réduite, il existe une $(n-k)$-forme fermée $\psi \in L^{p'}$ telle que $\int_M \omega \wedge \psi \neq 0$. La suite stationnaire $\psi_j = \psi$ pour tout j convient. Supposons désormais que ω est nulle en cohomologie réduite. On définit une forme linéaire L sur $d\Omega^{n-k,p'}(M)$ comme suit. Etant donné $\gamma \in d\Omega^{n-k,p'}(M)$, on choisit $\psi \in \Omega^{n-k,p'}(M)$ tel que $d\psi = \gamma$ et on pose $L(\gamma) = \int_M \omega \wedge \psi$. Comme l'intégrale de ω contre une forme fermée est toujours nulle, le résultat ne dépend pas du choix de ψ. Supposons qu'il n'existe pas de suite $\psi_j \in \Omega^{n-1-k,p'}(M)$ telle que $\int_M \omega \wedge \psi_j \geq 1$ et $\|\psi_j\|_{L^{p'}}$ tend vers 0. Alors la forme linéaire L est continue pour la norme $L^{p'}$. Par Hahn–Banach, L se prolonge en une forme linéaire continue sur $L^{p'}\Omega^{n-k+1}(M)$. Par dualité entre L^p et $L^{p'}$, il existe une $(k-1)$-forme $\beta \in L^p$ telle que pour tout $\gamma \in L^{p'}\Omega^{n-k+1}(M)$, $L(\gamma) = (-1)^k \int_M \beta \wedge \gamma$. Si ψ est lisse à support compact,

$$\int_M \beta \wedge d\psi = (-1)^k \int_M \omega \wedge \psi$$

donc $d\beta = \omega$ au sens des distributions. Par conséquent, $\beta \in \Omega^{k-1,p}(M)$ et ω est nulle en cohomologie L^p. □

Corollaire 14. *Soit M une variété riemannienne complète de dimension n. Soit $p > 1$ et $p' = p/(p-1)$. Alors*

$$R^{k,p}(M) = 0 \Leftrightarrow R^{n-k,p'}(M) = 0, \quad T^{k,p}(M) = 0 \Leftrightarrow T^{n-k+1,p'}(M) = 0.$$

Preuve. L'énoncé sur la cohomologie réduite résulte immédiatement du lemme 13.

Supposons que $T^{n-k+1,p'}(M) = 0$. Montrons qu'il existe une constante C telle que pour tout $\psi \in \Omega^{n-k,p'}(M)$, il existe $\gamma \in \Omega^{n-k,p'}(M)$ telle que $d\gamma = d\psi$ et $\|\gamma\|_{L^{p'}} \leq C \|d\psi\|_{L^{p'}}$. Par hypothèse, $d\Omega^{n-k,p'}(M)$ est fermé dans $\Omega^{n-k+1,p'}(M)$. L'opérateur d induit $\bar{d}\colon \Omega^{n-k,p'}(M)/\ker d \to d\Omega^{n-k,p'}(M)$. C'est une bijection continue entre espaces de Banach, donc un isomorphisme. Notons $\bar{d}^{-1}$ son inverse, notons C la norme de cet opérateur. Etant donnée une $(n-k)$-forme $\omega \in \Omega^{n-k,p'}(M)$, soit $\phi \in \Omega^{n-k,p'}(M)$ un représentant de la classe $\bar{d}^{-1}d\omega \in \Omega^{n-k,p'}(M)/\ker d$ de norme presque minimum. Elle satisfait (presque)

$$d\omega = d\phi \quad \text{et} \quad \|\phi\|_{L^{p'}} \leq C \|d\phi\|_{L^{p'}}.$$

Soit $\omega \in \Omega^{k,p}(M)$ une forme fermée, nulle en cohomologie réduite. Alors

$$\int_M \omega \wedge \psi = \int_M \omega \wedge \gamma$$

est contrôlée par $\|d\psi\|_{L^{p'}}$. Par conséquent, il n'existe pas de suite ψ_j de $(n-k)$-formes différentielles $L^{p'}$ telles que $\int_M \omega \wedge \psi_j \geq 1$ et $\|d\psi_j\|_{L^{p'}}$ tende vers 0. On conclut que ω est nulle en cohomologie $L^{p'}$. □

Remarque. Plus généralement, $R^{k,p}(M)$ est isomorphe au dual de $R^{n-k,p'}(M)$. On aimerait dire que $T^{k,p}(M) = \mathrm{Ext}(T^{n-k+1,p'}(M), \mathbb{R})$ dans une catégorie adéquate mais il semble y avoir des difficultés, cf. [K2].

3.2. Cohomologie réduite des groupes abéliens. On va construire des classes de cohomologie L^p non nulles. Pour montrer qu'elles appartiennent à la torsion, nous auront besoin, au cours d'un raisonnement, de savoir que la cohomologie réduite de $\mathbb{R}^{n-1}$ est nulle.

La remarque suivante apparaît entre autres dans [G2]. Elle s'applique notamment aux groupes de Lie nilpotents simplement connexes.

Proposition 15. *Soit G un groupe de Lie simplement connexe dont l'algèbre de Lie a un centre non trivial. Alors la cohomologie L^p réduite de G est nulle en tous degrés.*

Preuve. Un vecteur non nul du centre donne un champ de vecteurs de Killing ξ de longueur constante. La formule

$$(\phi_t)^*\omega - \omega = d\int_0^t (\phi_s)^* \iota_\xi \omega \, ds + \int_0^t (\phi_s)^* \iota_\xi d\omega \, ds$$

montre que le flot de ξ agit trivialement sur la cohomologie L^p. Soit ω une forme fermée L^p non nulle en cohomologie réduite. Il existe donc une forme fermée $L^{p'}$ ψ

telle que $\int_G \omega \wedge \psi \neq 0$. Comme le flot ϕ_t est l'identité en cohomologie,

$$\int_G (\phi_t)^* \omega \wedge \psi = \int_G \omega \wedge \psi \quad \text{pour tout } t.$$

On utilise maintenant le fait que l'action de $\mathbb{R}$ sur G par le flot de ξ est propre. Soit K un compact tel que la norme L^p (resp. $L^{p'}$) de ω (resp. ψ) dans $G \setminus K$ soit petite. Soit t tel que $\phi_t(K)$ soit disjoint de K. Alors

$$\int_G (\phi_t)^* \omega \wedge \psi \leq \|\omega\|_{L^p(G\setminus K)} \|\psi\|_{L^{p'}(G)} + \|\psi\|_{L^{p'}(G\setminus K)} \|\omega\|_{L^p(G)}$$

est petit, contradiction. □

3.3. Torsion des produits directs. L'objectif est d'étudier la torsion L^p des groupes de Lie $G_{\mu,n,\delta}$. Il s'agit de produits semi-directs. Une première étape consiste à comprendre les produits directs, ou plus généralement, les produits riemanniens.

Soient M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes complètes. On note $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ les projections. Lorsqu'elle est vraie, la formule de Künneth énonce que le produit cartésien des formes différentielles,

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2) &\mapsto \alpha_1 \times \alpha_2 = \pi_1^* \alpha_1 \wedge \pi_2^* \alpha_2, \\ \Omega^{*,p}(M_1) \otimes \Omega^{*,p}(M_2) &\to \Omega^{*,p}(M_1 \times M_2), \end{aligned}$$

induit un isomorphisme en cohomologie L^p. Si la torsion $T^{*,p}(M_1)$ est identiquement nulle, c'est vrai, voir [GKS]. Mais si $T^{*,p}(M_1)$ et $T^{*,p}(M_2)$ ne sont pas nulles, il en va autrement.

Exemple 16. Pour $p = 2$, il existe des classes non nulles $\alpha, \beta \in T^{1,2}(\mathbb{R})$ telles que $\alpha \times \beta = 0$ dans $H^{2,2}(\mathbb{R}^2)$.

Preuve. Soient $\alpha = a(x)\,dx$ une 1-forme L^2 et f une fonction L^2 sur $\mathbb{R}$. L'équation $df = \alpha$, en Fourier, s'écrit

$$i\xi \hat{f}(\xi) = \hat{a}(\xi).$$

Par conséquent, la classe de cohomologie L^2 de α est nulle si et seulement si $\xi \mapsto \frac{\hat{a}(\xi)}{i\xi}$ est L^2.

Etant données des 1-formes L^2 $\alpha = a(x)\,dx$, $\beta = b(y)\,dy$ sur $\mathbb{R}$ et une 1-forme L^2 $\gamma = \gamma_x dx + \gamma_y dy$ sur $\mathbb{R}^2$, l'équation $d\gamma = \alpha \times \beta$ se traduit par

$$i\xi \hat{\gamma}_x(\xi, \eta) - i\eta \hat{\gamma}_y(\xi, \eta) = \hat{a}(\xi)\hat{b}(\eta).$$

On la résoud en prenant

$$\hat{\gamma}_x(\xi, \eta) = -\frac{i\xi}{\xi^2 + \eta^2} \hat{a}(\xi)\hat{b}(\eta), \quad \hat{\gamma}_y(\xi, \eta) = \frac{i\eta}{\xi^2 + \eta^2} \hat{a}(\xi)\hat{b}(\eta).$$

On choisit pour $\hat{a} = \hat{b}$ une fonction paire, lisse, à support compact qui, au voisinage de 0, coïncide avec $|\log(1/|\xi|)|^{-1/2}$. Alors $\hat{a}(\xi)/\xi$ n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$, donc les classes de cohomologie L^2 de α et β sont non nulles. En revanche, si on utilise les coordonnées polaires $\xi = \rho\cos\theta$ et $\eta = \rho\sin\theta$, alors

$$\log\left(\frac{1}{|\xi|}\right) = \log\left(\frac{1}{\rho}\right) + \log\left(\frac{1}{|\cos\theta|}\right) \geq \log\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}_x|^2 &\leq \frac{|\xi\hat{a}(\xi)\hat{b}(\eta)|^2}{(\xi^2+\eta^2)^2} \\ &\leq \left|\log\left(\frac{1}{\rho\cos\theta}\right)\right|^{-1}\left|\log\left(\frac{1}{\rho\sin\theta}\right)\right|^{-1}\rho^{-2} \\ &\leq \left|\log\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|^{-2}\rho^{-2}, \end{aligned}$$

donc $\hat{\gamma}_x$ est dans $L^2(\mathbb{R}^2, d\xi\, d\eta)$, et il en est de même de $\hat{\gamma}_y$. On conclut que $\gamma \in L^2$ et $d\gamma = \alpha \times \beta$, donc $\gamma \in \Omega^{2,2}(\mathbb{R}^2)$, et la classe de $\alpha \times \beta$ est nulle. □

Pour remédier à cette difficulté, on introduit une condition sur une classe de torsion L^p, appelée *robustesse*, qui garantit qu'elle reste non nulle après produit cartésien.

Soient M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes complètes. Supposons que $T^{k_1,p}(M_1) \neq 0$ et $T^{k_2,p}(M_2) \neq 0$. D'après le lemme 13, il existe des formes fermées L^p e_i sur M_i et des formes $L_{p'}$ $e'_{i,j}$ telles que

$$\int_{M_i} e_i \wedge e'_i = 1 \quad \text{et} \quad \|de'_{i,j}\|_{L^{p'}} \text{ tende vers } 0.$$

La forme fermée L^p $\omega = e_1 \wedge e_2$ sur $M_1 \times M_2$ est elle non nulle en cohomologie ? Pour l'affirmer, il faudrait contrôler la norme de $d(e'_{1,j} \wedge e'_{2,j})$, c'est-à-dire non seulement celles de $de'_{1,j}$ et $de'_{2,j}$, mais aussi celles de $e'_{1,j}$ et de $e'_{2,j}$. On doit autoriser que $\|e'_{1,j}\|$ tende vers l'infini, mais moins vite que $\|de'_{2,j}\|$ ne tend vers 0. Ceci motive la définition suivante.

Définition 17. Soit M une variété riemannienne complète de dimension n. On note $H_o^{k,p}(M)$ le sous-ensemble de $H^{k,p}(M)$ formé des classes *robustes*, i.e. qui contiennent une forme ω ayant la propriété suivante. Il existe une suite $\omega'_j \in \Omega^{n-k,p'}(M)$ telle que

(1) les intégrales $\int_M \omega \wedge \omega'_j$ ne tendent pas vers 0 ;

(2) les normes $\|\omega'_j\|_{L^{p'}}$ tendent vers $+\infty$ polynômialement en j ;

(3) les normes $\|d\omega'_j\|_{L^{p'}}$ tendent vers 0 exponentiellement en j.

Enfin, on note $T_o^{k,p}(M) = H_o^{k,p}(M) \cap T^{k,p}(M)$.

Remarque 18 (*Cas où $p = 2$*). Dès que la torsion L^2 est non nulle, il y a des classes robustes. Il est possible que cela persiste pour tout p, mais je ne sais pas le montrer. J'en suis donc réduit à construire à la main ces classes robustes.

Proposition 19. *Soient M_1 et M_2 des variétés riemanniennes complètes. Le produit cartésien de classes de torsion L^p robustes de M_1 et M_2 respectivement est une classe robuste (et en particulier, non nulle) du produit riemannien $M_1 \times M_2$. Si l'une des deux classes est de degré maximum, le résultat est plus précis : le produit cartésien est à nouveau une classe de torsion robuste.*

Preuve. Soient $\omega_1 \in \Omega^{k_1,p}(M_1)$ (resp. $\omega_2 \in \Omega^{k_2,p}(M_2)$) des formes fermées. Supposons qu'il existe des formes $\omega'_{1,j} \in \Omega^{n_1-k_1,p'}(M_1)$ (resp. $\omega'_{2,j} \in \Omega^{n_2-k_2,p'}(M_2)$) comme dans la définition 17. Posons $\omega = \pi_1^*\omega_1 \wedge \pi_2^*\omega_2$ et $\omega'_j = \pi_1^*\omega_{1,j} \wedge \pi_2^*\omega_{2,j}$. Alors ω est fermée et L^p et les formes ω'_j satisfont aux hypothèses de la définition 17, donc la classe de cohomologie de ω est dans $H_o^{k_1+k_2,p}(M_1 \times M_2)$.

Supposons maintenant que $k_1 = n_1$ et que ω_2 est de torsion. Soit ϕ une $(n_2 - k_2)$-forme fermée $L^{p'}$ sur $M_1 \times M_2$. La restriction de ϕ à presque tout facteur $\{*\} \times M_2$ est fermée et $L^{p'}$, donc pour presque tout $x_1 \in M_1$,

$$\int_{M_2} \omega_2 \wedge \phi_{|\{x_1\}\times M_2} = 0.$$

Il vient

$$\int_{M_1\times M_2} \omega \wedge \phi = \int_{M_1} \omega_1 \wedge \int_{M_2} \omega_2 \wedge \phi = 0,$$

autrement dit, ω est de torsion. □

3.4. Torsion des groupes abéliens. A titre d'application de la notion de classe robuste introduite au paragraphe précédent, montrons que la torsion L^p de l'espace euclidien est non nulle en tout degré.

Commençons par le cas de la droite réelle.

Lemme 20. *L'ensemble $T_o^{1,p}(\mathbb{R})$ est non vide. Plus précisément, il existe une 1-forme $L^p a\,dt$ et une suite u_j de fonctions lisses à support compact sur $\mathbb{R}$ telles que*

(1) *$\int_{\mathbb{R}} u_j a\,dt$ ne tend pas vers 0 ;*

(2) *$\|u_j\|_{L^{p'}}$ tend vers $+\infty$ polynômialement en j ;*

(3) *$\|u'_j\|_{L^{p'}}$ tend vers 0 exponentiellement en j.*

On a de plus les propriétés suivantes :

(4) *$\int_{\mathbb{R}} |sa'(s)|^p\,ds < +\infty$;*

(5) *les fonctions a et $-u_j$ sont décroissantes sur $[1, +\infty[$;*

(6) *les fonctions a et u_j sont paires et s'annulent au voisinage de 0 ;*

(7) *$\|u_j\|_{L^\infty}$ tend vers 0 exponentiellement en j ;*

(8) *pour tout $\epsilon > 0$, $\|s^{1-\epsilon}u_j'\|_{L^{p'}}$ et $\|s^{-\epsilon}u_j\|_{L^{p'}}$ tendent vers 0 exponentiellement.*

Preuve. Soit χ une fonction lisse et paire sur $\mathbb{R}$, à support dans $[-1, 1]$, qui vaut 1 au voisinage de 0. On pose

$$a(x) = (1 - \chi(x))|x|^{-\frac{1}{p}}(\log|x|)^{-1} \quad \text{si } |x| \geq e,$$
$$a(x) = (1 - \chi(x))e^{-\frac{1}{p}} \quad \text{sinon.}$$

On définit une suite de fonctions v_j paires, décroissantes sur $[0, +\infty[$ par

$$v_j(x) = 2(1 - \chi(x))2e^{-\frac{j}{p'}} \quad \text{si } |x| \leq e^j,$$
$$v_j(x) = 2j\,|x|^{-\frac{1}{p'}}(\log|x|)^{-1} \quad \text{si } e^j \leq |x| \leq e^{2j},$$
$$v_j(x) = e^{-\frac{2j}{p'}}(e^j + 1 - e^{-j}|x|) \quad \text{si } e^{2j} \leq |x| \leq e^{2j}(1 + j^{-1}),$$
$$v_j(x) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Comme $p > 1$, a et sa dérivée sont L^p. De plus on a $sa'(s) \sim -\frac{1}{p}a(s)$ et il résulte que $\int |sa'(s)|^p\,ds < +\infty$. Par construction, v_j' est nulle sur $[0, e^j]$ et constante sur $[e^j, e^{2j}(1 + j^{-1})]$. Sur l'intervalle $[e^j, e^{2j}(1 + j^{-1})]$, $|v_j'|$ est majorée par const.$j\,s^{-1-1/p'}(\log s)^{-1}$. On calcule

$$\int_0^{e^j} av_j = o(1), \quad \int_{e^j}^{e^{2j}} av_j = 1, \quad \int_{e^{2j}}^{e^{2j}(1+j^{-1})} av_j = O(j^{-1}),$$
$$\int_0^{e^j} |v_j|^{p'} = 2^{p'}, \quad \int_{e^j}^{e^{2j}} |v_j|^{p'} = O(j), \quad \int_{e^{2j}}^{e^{2j}(1+j^{-1})} |v_j|^{p'} = O(j^{-1}),$$
$$\int_0^{e^j} |v_j'|^{p'} = 0, \quad \int_{e^j}^{e^{2j}} |v_j'|^{p'} = O(j^{p'}e^{-p'j}),$$
$$\int_{e^{2j}}^{e^{2j}(1+j^{-1})} |v_{j'}'|^{p'} = O(j^{p'-1}e^{-2p'j}), \quad \int_1^{e^j} |s^{-\epsilon}v_j|^{p'} = O(je^{-\epsilon p'j}),$$
$$\int_{e^j}^{e^{2j}} |s^{-\epsilon}v_j|^{p'} = O(j^{p'}e^{-\epsilon p'j}), \quad \int_{e^{2j}}^{e^{2j}(1+j^{-1})} |s^{-\epsilon}v_j|^{p'} = O(j^{-1}e^{-2\epsilon p'j}),$$
$$\int_0^{e^j} |s^{1-\epsilon}v_j'|^{p'} = 0, \quad \int_{e^j}^{e^{2j}} |s^{1-\epsilon}v_j'|^{p'} = O(j^{p'}e^{-\epsilon p'j}),$$
$$\int_{e^{2j}}^{e^{2j}(1+j^{-1})} |s^{1-\epsilon}v_j'|^{p'} = O(j^{p'-1}e^{-2\epsilon p'j}).$$

Une approximation u_j lisse et à support compact de v_j convient. □

Corollaire 21. *$T^{k,p}(\mathbb{R}^n) \neq 0$ pour $k = 1, \ldots, n$.*

Preuve. Montrons d'abord que $T_o^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ est non vide.

Dans $\mathbb{R}^n$, on note r la distance euclidienne à l'origine. Soit $\theta' = dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ une $(n-1)$-forme parallèle. La forme $dr \wedge \theta$ étant homogène de degré 0, elle s'écrit

$$dr \wedge \theta' = h\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où la fonction h est lisse en dehors de l'origine et homogène de degré 0. Elle n'est pas identiquement nulle. Par homogénéïté, $|h|$ et $r|dh|$ sont bornées.

Soient a et u_j les fonctions fournies par le lemme 20. On considère les formes différentielles $\omega = a(r^n)\, dr$ et $\omega_j' = u_j(r^n) h\theta'$ sur $\mathbb{R}^n$. On vérifie que

$$\|\omega\|_{L^p} = \text{const.}\left(\int_0^{+\infty} |a(r^n)|^p r^{n-1}\, dr \right)^{1/p} = \text{const.}\|a\|_{L^p}$$

est finie, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega \wedge \omega_j' = \int_{S^{n-1}} h^2 \int_0^{+\infty} a(r^n) u_j(r^n) r^{n-1}\, dr = C \int_{\mathbb{R}} a u_j$$

ne tend pas vers 0, et que

$$\|\omega_j'\|_{L^{p'}} = \text{const.}\left(\int_0^{+\infty} |u_j(r^n)|^{p'} r^{n-1}\, dr \right)^{1/p'} = \text{const.}\|u_j\|_{L^{p'}}$$

tend vers $+\infty$ polynômialement.

On calcule

$$d\omega_j' = n r^{n-1} u_j'(r^n) h\, dr \wedge \theta' + u_j(r^n)\, dh \wedge \theta',$$

et on majore

$$\begin{aligned} \|r^{n-1} u_j'(r^n) h\|_{L^{p'}} &\leq \text{const.}\left(\int_0^{+\infty} |r^{n-1} u_j'(r^n)|^{p'} r^{n-1}\, dr \right)^{1/p'} \\ &= \text{const.}\|s^{n-1/n} u_j'(s)\|_{L^{p'}}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \|u_j(r^n)\, dh\|_{L^{p'}} &\leq \text{const.}\left(\int_0^{+\infty} |r^{-1} u_j(r^n)|^{p'} r^{n-1}\, dr \right)^{1/p'} \\ &= \text{const.}\|s^{-1/n} u_j(s)\|_{L^{p'}}, \end{aligned}$$

qui tendent vers 0 exponentiellement, d'après le lemme 20. On conclut que ω est dans $H_o^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, donc dans $T_o^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ puisque la cohomologie réduite est nulle.

Pour avoir le cas général, il suffit d'appliquer suffisamment de fois la proposition 19. □

3.5. Graduation des formes différentielles sur les produits semi-directs. A la différence du cas des produits directs, une métrique riemannienne invariante à gauche sur un produit semi-direct $G = H \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ croît exponentiellement, avec des exposants différents suivant les directions, déterminés par les valeurs propres de la dérivation α. Ceci affecte les propriétés de contraction du champ de vecteurs invariant à droite ξ qui engendre l'action à gauche du facteur $\mathbb{R}$ sur G. On a vu en section 2 comment utiliser le flot de ce champ de vecteurs – et ses propriétés de contraction de la norme L^p de formes différentielles – pour montrer que la torsion L^p est nulle. Les mêmes propriétés vont évidemment jouer un rôle dans la construction de classes de torsion non nulles.

Définition 22. Soit $G = H \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ un produit semi-direct de groupes de Lie, soit $\mathcal{H}$ l'algèbre de Lie de H. Soit $p > 1$ un réel, soit $k < \dim G$ un entier.

(1) On décompose
$$\Lambda^k \mathcal{H}^* = \Lambda^k_+ \oplus \Lambda^k_0 \oplus \Lambda^k_-,$$
où Λ^k_+ (resp. Λ^k_0, resp. Λ^k_-) est la somme des espaces caractéristiques de $\Lambda^k \alpha^\top$ relatifs aux valeurs propres de parties réelles supérieures (resp. égales, resp. inférieures) à $\frac{\operatorname{tr}\alpha}{p}$.

(2) On dit que p est *critique en degré k* pour G si $\frac{\operatorname{tr}\alpha}{p}$ est la partie réelle d'une valeur propre de l'endomorphisme $\Lambda^k \alpha^\top$ de $\Lambda^k \mathcal{H}^*$, autrement dit, si $\Lambda^k_0 \neq 0$.

(3) On note d_0, $d_\pm$ la différentielle extérieure composée avec le projecteur sur Λ^k_0, $\Lambda^k_\pm$.

La décomposition dépendant de p, on notera $\Lambda^k_{+(p)}$, $d_{+(p)}$ s'il est nécessaire de spécifier l'exposant.

Remarque 23 (*Comparaison avec la définition* 3). Le champ ξ est (k, p)-contractant si et seulement si $\Lambda^k_{+(p)} = \Lambda^k_{0(p)} = 0$, (k, p)-dilatant si et seulement si $\Lambda^k_{-(p)} = \Lambda^k_{0(p)} = 0$. Dans ce cas, d'après la section 2, la torsion a des chances d'être nulle. Pour construire des classes de torsion, on va donc exploiter le fait que $\Lambda^k_{+(p)}$ et $\Lambda^k_{-(p)}$ sont simultanément non nuls.

3.6. Critère de non-nullité de la torsion. On s'inspire de la discussion des produits directs (paragraphe 3.3). Lorsqu'on passe aux produits semi-directs $G = H \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ et qu'on s'intéresse à un exposant p non critique, on utilise seulement le fait que la cohomologie à support compact de la droite réelle est non nulle. D'une certaine façon, l'opérateur d_+ remplace l'opérateur d sur l'autre facteur.

Proposition 24. *Soit $G = H \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ un produit semi-direct. Soit $p > 1$. Soit e une $(k-1)$-forme fermée L^p sur H. On suppose qu'il existe une suite de formes $e'_j \in \Omega^{n-k-1,p'}(H)$ telle que*

(1) *les intégrales $\int_H e \wedge d_{+(p')} e'_j$ ne tendent pas vers 0;*

(2) *la suite $m_j = \|de'_j\|_{L^{p'}}$ tend vers $+\infty$ polynômialement;*

(3) *la suite $n_j = \|dd_{+(p')} e'_j\|_{L^{p'}}$ tend vers 0 exponentiellement.*

Alors $H_o^{k,p}(G) \neq 0$. Si de plus H est nilpotent, alors $T_o^{k,p}(G) \neq 0$.

Preuve. Notons $\pi : G \to H$ la projection dont les fibres sont les orbites de l'action à droite du facteur $\mathbb{R}$. Soit χ une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ telle que $\chi = 0$ au voisinage de $-\infty$ et $\chi = 1$ au voisinage de $+\infty$. On note $\chi_s : t \mapsto \chi(t+s)$.

Posons

$$\omega = d\chi \wedge \pi^* e,$$

La forme fermée ω représente le produit cartésien du générateur de la cohomologie à support compact $H_c^1(\mathbb{R})$ et de la classe $[e] \in T^{k-1,p}(H)$ (qui est non nulle, en vertu des hypothèses 1 et 3). Pour montrer que sa classe de cohomologie L^p est non nulle, on utilise la dualité 13 avec les formes-test ω'_j définies comme suit.

$$\psi_j = \chi_1 \pi^* d_+ e'_j + (1-\chi_1)\pi^* d_- e'_j + d\chi_1 \wedge e'_j$$

et

$$\omega'_j = \chi_{s_j}(1 - \chi_{-s_j})\psi_j,$$

où s_j est un réel positif. Autrement dit, ω'_j est une troncature (destinée à rendre sa différentielle $L^{p'}$) d'une forme ψ_j qui est $L^{p'}$, mais dont la différentielle ne l'est pas.

Alors

$$\begin{aligned}\int_G \omega \wedge \omega'_j &= \int_G d\chi \wedge e \wedge \psi_j \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_1 d\chi \int_H e \wedge d_+ e'_j - \int_{\mathbb{R}} (1-\chi_1) d\chi \int_H e \wedge d_- e'_j \\ &= \int_H e \wedge d_+ e'_j\end{aligned}$$

ne tend pas vers 0. Comme $d\psi_j = \pi^* d d_+ e'_j$,

$$\begin{aligned}\|\chi_{s_j}(1-\chi_{-s_j}) d\psi_j\|_{L^{p'}(G)} &\leq e^{\mu s_j} \|dd_+ e'_j\|_{L^{p'}(H)} \\ &\leq e^{\mu s_j} n_j.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\|d(\chi_{s_j}(1-\chi_{-s_j}))\wedge\psi_j\|^{p'}_{L^{p'}(G)}\\
&\quad=\|d(\chi_{s_j})\wedge\psi_j\|^{p'}_{L^{p'}(G)}+\|d(1-\chi_{-s_j})\wedge\psi_j\|^{p'}_{L^{p'}(G)}\\
&\quad\le \text{const.}(\|(\phi_{s_j})^*d_+e'_j\|^{p'}_{L^{p'}(H)}+\|(\phi_{-s_j})^*d_-e'_j\|^{p'}_{L^{p'}(H)})\\
&\quad\le \text{const.}e^{-\eta p' s_j}(\|d_+e'_j\|^{p'}_{L^{p'}(H)}+\|d_-e'_j\|^{p'}_{L^{p'}(H)})\\
&\quad\le \text{const.}e^{-\eta p' s_j}\|de'_j\|^{p'}_{L^{p'}(H)}.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\|\omega'_j\|_{L^{p'}(G)}\le C\,(e^{\mu s_j}n_j+e^{-\eta s_j}m_j).$$

Posons $s_j=\frac{1}{\mu+\eta}\log(\eta m_j/\mu n_j)$. Avec ce choix,

$$\|d\omega'_j\|_{L^{p'}}\le C'\,m_j^{\mu/\mu+\eta}n_j^{\eta/\mu+\eta},$$

qui tend vers 0 lorsque j tend vers $+\infty$. Le lemme 13 entraîne alors que ω est non nulle dans $H^{k,p}(G)$.

Soit ω' une $(n-k)$-forme fermée $L^{p'}$ sur G. Ecrivons $\omega'=\beta'_t+dt\wedge\gamma'_t$. Alors β'_t est une forme fermée sur H qui est dans $L^{p'}$ pour presque tout $t\in\mathbb{R}$. Supposons H nilpotent. D'après le théorème 15, la cohomologie réduite $R^{k-1,p}(H)$ est nulle. Par conséquent, pour toute $(k-1)$-forme fermée L^p e sur H, $\int_H e\wedge\beta'_t=0$. Il vient

$$\int_G d\chi\wedge\pi^*e\wedge\omega'=\int_{\mathbb{R}}\chi'(t)\,dt\int_H e\wedge\beta'_t=0.$$

Ceci prouve que $\omega=d\chi\wedge\pi^*e$ est dans $T^{k,p}(G)$, et donc que $T^{k,p}(G)\neq 0$. □

Remarque 25 (*Double valeur au bord*). Notons ξ le champ de vecteurs invariant à gauche qui engendre l'action à droite du facteur $\mathbb{R}$. Si on transporte ψ_j par son flot, on trouve des limites distinctes, respectivement $d_+e'_j$ quand t tend vers $+\infty$ et $d_-e'_j$ quand t tend vers $-\infty$. Cela illustre le fait que, bien que ξ ne soit ni (k,p)-contractant, ni (k,p)-dilatant, on peut définir deux valeurs au bord. Ce point de vue est développé dans [P2].

3.7. Construction explicite de classes de cohomologie L^p. Avant de nous lancer dans le cas général, traitons un exemple.

Exemple 26. $T^{3,p}(G_{2,4,-\frac{1}{4}})\neq 0$ si $\frac{4}{3}<p<2$.

Preuve. Ici, $H = \mathbb{R}^3$ avec les coordonnées x, y, z, et une matrice α diagonale, de valeurs propres 1, 1 et 2. Lorsque $\frac{4}{3} < p < 2$, l'exposant conjugué p' satisfait $2 < p' < 4$, d'où $2 < \frac{\operatorname{tr}\alpha}{p'} < 3$. Sur les 1-formes, $\Lambda^1_{+(p')}$ est engendré par dz, $\Lambda^1_{-(p')}$ par dx et dy. On va appliquer le lemme 24 avec des fonctions à support compact e'_j qui ne dépendent que de la distance r à l'origine, et une 2-forme fermée $e \in d\Lambda_-$, de la forme $e = d(f\beta)$ où f est une fonction de r et β une 1-forme homogène de degré 1.

Comme $e = f'(r)\beta + f(r)d\beta$, et comme $d\beta$ est homogène de degré 0, $|d\beta|$ est homogène de degré -1, d'où

$$\begin{aligned}\|de\|_{L^p} &\leq \text{const.}(\|f'(r)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} + \|r^{-1}f'(r)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)})\\ &\leq \text{const.}\left(\left(\int_0^{+\infty} |f'(r)|^p r^2\,dr\right)^{1/p} + \left(\int_0^{+\infty} |r^{-1}f(r)|^p r^2\,dr)^{1/p}\right)\right).\end{aligned}$$

Notons $e'_j = w_j(r^2)$. Alors

$$de'_j = w'_j(r^2)d(r^2) = 2w'_j(r^2)(x\,dx + y\,dy + z\,dz),$$

$$d_+e'_j = 2w'_j(r^2)z\,dz,$$

$$dd_+e'_j = 4w''_j(r^2)(x\,dx + y\,dy + z\,dz)\wedge z\,dz,$$

d'où

$$m_j = \|de'_j\|_{L^{p'}} = \text{const.}\left(\int_0^{+\infty} |r\,w'_j(r^2)|^p r^2\,dr\right)^{1/p},$$

$$n_j = \|dd_+e'_j\|_{L^{p'}} = \text{const.}\left(\int_0^{+\infty} |r^2 w''_j(r^2)|^p r^2\,dr\right)^{1/p},$$

Le plus délicat à contrôler est l'intégrale $I_j = \int_{\mathbb{R}^3} e\wedge d_+e'_j$. Comme e'_j est à support compact, la formule de Stokes s'applique, et

$$I_j = \int_{\mathbb{R}^3} f\beta\wedge dd_+e'_j.$$

Choisir β invariante par rotations (autour de l'origine, ou même seulement autour de l'axe Oz) est impossible, car $dr\wedge dd_+e'_j = (x\,dx + y\,dy)\wedge dd_+e'_j = 0$. Il faut donc casser la symétrie, c'est pourquoi on choisit β proportionnelle à dy. On calcule

$$\begin{aligned}dy\wedge dd_+e'_j &= -4w''_j(r^2)xz\,dx\wedge dy\wedge dz\\ &= r^2w''(r^2)h(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz,\end{aligned}$$

où $h(x,y,z) = \frac{-4xz}{r^2}$ est une fonction homogène de degré 0. C'est cette fonction qui entre comme ingrédient dans e : on prend $\beta = h\,dy$, d'où $e = d(f(r)h\,dy)$.

Avec ce choix, il vient

$$\begin{aligned}\pm I_j &= \int_{\mathbb{R}^3} e \wedge d_+ e'_j \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(r)h\, dy \wedge dd_+ e'_j \\ &= -4\int_{\mathbb{R}^3} fh^2 r^2 w_j''(r^2)\, dx \wedge dy \wedge dz \\ &= -4\left(\int_{S^2} h^2\right)\int_0^{+\infty} f(r)w_j''(r^2)r^4\, dr.\end{aligned}$$

Reste à trouver f et w_j. Plutôt que de construire des fonctions adhoc, il suffit de prendre

$$f(r) = ra(r^3), \quad w_j(s) = -\int_{|s|}^{+\infty} t^{-1/2}u_j(t^{3/2})\, dt$$

où a et u_j sont les fonctions obtenues au lemme 20. Les propriétés 4 à 8 de ce lemme sont là pour garantir que n_j tend vers 0 exponentiellement, que m_j tend vers l'infini au plus polynômialement et queI_j ne tend pas vers 0 (voir ci-dessous). □

Passons au cas général (un peu plus général que le théorème B).

Proposition 27. *On considère un produit semi-direct $G = H \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ où $H = \mathbb{R}^{n-1}$ est abélien. On note $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ les parties réelles des valeurs propres de α. On note $w_k = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ et $W_k = \lambda_{n-1-k} + \cdots + \lambda_{n-1}$. Si $w_{k-1} < \frac{w_{n-1}}{p} < W_{k-1}$ et si p est non critique en degré $k-1$, alors $T^{k,p}(G) \neq 0$.*

Preuve. Les inégalités $w_{k-1} < w_{n-1}/p < W_{k-1}$ entraînent que $w_{n-k} < w_{n-1}/p' < W_{n-k}$. Etant donné $I \subset \{1, \ldots, n-1\}$, on note $\lambda_I = \sum_{i\in I} \lambda_i$. Considérons, parmi les parties I à $n-k$ éléments de $\{1, \ldots, n-1\}$ telles que $\lambda_I > w_{n-1}/p'$, celle, notée I_0, pour laquelle λ_I est minimum. Notons i_m le plus petit indice qui n'est pas dans I_0 et i_M le plus grand élément de I_0. Comme $\lambda_{I_0} > w_{n-1}/p' > w_{n-k}$, $i_m \leq n-k$ et $\lambda_{i_m} < \lambda_{i_M}$. Posons $I_1 = (I_0 \cup \{i_m\}) \setminus \{i_M\}$. Alors $\lambda_{I_1} < \lambda_{I_0}$ donc par définition de I_0, $\lambda_{I_1} \leq w_{n-1}/p'$. Comme p est non critique en degré $k-1$, p' est non critique en degré $n-k$, donc $w_{n-1} - p'\lambda_I \neq 0$ pour tout ensemble I à $n-k$ éléments. Par conséquent, $\lambda_{I_1} < w_{n-1}/p'$.

Soit $\theta' \in \Lambda^{n-k-1}\mathcal{H}^*$ un vecteur propre de $\Lambda^{n-k-1}\alpha$ relatif à une valeur propre de partie réelle $\mu' = \lambda_{I_0} - \lambda_{i_M}$, et soient η et $\eta' \in H^*$ des vecteurs propres relatifs à des valeurs propres de parties réelles λ_{i_m} et λ_{i_M} respectivement. Alors $(\eta' \wedge \theta')_{+(p')} = \eta' \wedge \theta'$ mais $(\eta \wedge \theta')_{+(p')} = 0$ donc

$$(\eta + \eta') \wedge ((\eta + \eta') \wedge \theta')_{+(p')} = \eta \wedge \eta' \wedge \theta'$$

est non nul. Il existe donc $\theta \in \Lambda^{k-2}\mathcal{H}^*$ tel que $\theta \wedge (\eta+\eta') \wedge ((\eta+\eta') \wedge \theta')_{+(p')} \neq 0$.

Soient a et u_j les fonctions fournies par le lemme 20. Posons, pour $s > 0$,

$$\tilde{v}_j(s) = s^{-1/2} u_j(s^{(n-1)/2}).$$

Notons w_j la fonction à support compact sur $[0, +\infty[$ dont la dérivée est $\tilde{v}_j$. Dans $H = \mathbb{R}^{n-1}$, on note r la distance euclidienne à l'origine. On définit des fonctions $f = ra(r^{n-1})$ et $g_j = w_j(r^2)$ sur H. Par construction, $dg_j = 2u_j(r^{n-1})\, dr$.

On considère les formes différentielles $e'_j = g_j\theta'$ sur H. On a $de'_j = w'_j(r^2)d(r^2) \wedge \theta'$ donc $d_+e'_j = w'_j(r^2)dr_+^2 \wedge \theta'$, où on a noté

$$r_+^2 = \sum_{\lambda_i+\mu'>\operatorname{tr}\alpha/p'} x_i^2.$$

Comme la forme $d(r_+^2)$ est fermée,

$$dd_+e'_j = w''_j(r^2)d(r^2) \wedge d(r_+^2) \wedge \theta'.$$

Comme la $(n-1)$-forme $d(r^2) \wedge d_+r^2 \wedge \theta \wedge \theta'$ est homogène, on peut l'écrire

$$d(r^2) \wedge d_+r^2 \wedge \theta \wedge \theta' = r^2 h(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$$

où la fonction h est lisse en dehors de l'origine et homogène de degré 0. Par homogénéïté, $|h|$ et $r|dh|$ sont bornées.

Il existe un point de H où $d(r^2) = \eta + \eta'$. En ce point, la $(n-1)$-forme $\theta \wedge d(r^2) \wedge (d(r^2) \wedge \theta')_{+(p')}$ est non nulle, donc h n'est pas identiquement nulle. On pose

$$e = d(fh\theta).$$

Comme e'_j est à support compact,

$$\begin{aligned}
\pm \int_H e \wedge d_+e'_j &= \int_H fh\theta \wedge dd_+e'_j \\
&= \int_H f w''_j(r^2) h\, d(r^2) \wedge d_+r^2 \wedge \theta \wedge \theta' \\
&= \int_{S^{n-2}} h^2 \int_0^{+\infty} f(r) w''_j(r^2) r^2 r^{n-2}\, dr \\
&= C \int_0^{+\infty} f(r) w''_j(r^2) r^n\, dr
\end{aligned}$$

où $C > 0$. On calcule, pour $r > 0$,

$$w''_j(r) = -\frac{1}{2} r^{-3/2} u_j(r^{n-1/2}) + \frac{n-1}{2} r^{n-4/2} u'_j(r^{n-1/2}).$$

Comme u_j est décroissante sur $[1, \infty[$, les deux termes de la somme sont de même signe, donc

$$\begin{aligned}\left|\int_1^{+\infty} f(r)w_j''(r^2)r^n\,dr\right| &\geq \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} ra(r^{n-1})r^{-3}u_j(r^{n-1})r^n\,dr\\ &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} a(s)u_j(s)\,ds\\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} a(s)u_j(s)\,ds\end{aligned}$$

qui ne tend pas vers 0. L'intégrale $\int_0^1 f(r)w_j''(r^2)r^n\,dr$ tend vers 0, donc $\int_H e\wedge d_+e_j'$ ne tend pas vers 0. Comme $e = hf'(r)dr\wedge\theta + f\,dh\wedge\theta$,

$$\begin{aligned}\|e\|_{L^p} &\leq \text{const.}\|f'(r)\|_{L^p(H)} + \|r^{-1}f(r)\|_{L^p(H)}\\ &= \text{const.}\left(\left(\int_0^{+\infty}|f'(r)|^p r^{n-2}\,dr\right)^{1/p}\right.\\ &\qquad\left.+\left(\int_0^{+\infty}|r^{-1}f(r)|^p r^{n-2}\,dr\right)^{1/p}\right)\\ &\leq \text{const.}\left(\left(\int_0^{+\infty}|r^{n-1}a'(r^{n-1})|^p r^{n-2}\,dr\right)^{1/p}\right.\\ &\qquad\left.+\left(\int_0^{+\infty}|a(r^{n-1})|^p r^{n-2}\,dr\right)^{1/p}\right)\\ &= \text{const.}\left(\int_0^{+\infty}|sa'(s)|^p\,ds)^{1/p} + \int_0^{+\infty}|a(s)|^p\,ds\right)^{1/p}\end{aligned}$$

est finie.

Comme $de_j' = 2u_j(r^{n-1})dr\wedge\theta'$,

$$\begin{aligned}\|de_j'\|_{L^{p'}}^{p'} &= \text{const.}\int_0^{+\infty}|u_j(r^{n-1})|^{p'}r^{n-1}\,dr\\ &= \text{const.}\int_0^{+\infty}|u_j(s)|^{p'}\,ds\end{aligned}$$

croît polynômialement en j, d'après le lemme 20.

Comme $dd_+e'_j = w''_j(r^2)d(r^2)\wedge d_+r^2\wedge\theta'$,

$$\begin{aligned}\|dd_+e'_j\|_{L^{p'}} &\le \text{const.}\Bigg(\bigg(\int_0^{+\infty}|r^{-1}u_j(r^{n-1})|^{p'}r_{n-1}\,dr\bigg)^{1/p'}\\ &\quad+\bigg(\int_0^{+\infty}|r^{n-2}u'_j(r^{n-1})|^{p'}r_{n-1}\,dr\bigg)^{1/p'}\Bigg)\\ &= \text{const.}\Bigg(\bigg(\int_0^{+\infty}|s^{-1/n-1}u_j(s)|^{p'}ds\bigg)^{1/p'}\\ &\quad+\bigg(\int_0^{+\infty}|s^{n-2/n-1}u'_j(s)|^{p'}ds\bigg)^{1/p'}\Bigg),\end{aligned}$$

tend vers 0 exponentiellement, d'après le lemme 20. De la proposition 24, il résulte que $T^{k,p}(G)\neq 0$. □

3.8. Torsion de l'espace hyperbolique réel. Lorsqu'on s'intéresse à un exposant p critique, on utilise le fait que la cohomologie L^p de la droite réelle est non nulle, ainsi qu'une information plus fine sur la cohomologie L^p de H, faisant jouer un rôle important à l'opérateur d_0.

Proposition 28. *Soit $G = H\rtimes_\alpha\mathbb{R}$ un produit semi-direct. Soit p un exposant critique en degré $k-1$, i.e. tel que $\Lambda_0^{k-1}\neq 0$. On suppose qu'il existe une $(k-1)$-forme e fermée et L^p sur H et une suite $e'_j\in\Omega^{n-k,p'}(H)$ telles que*

- *$e_-=0$, $e'_{j,-}=0$, $d_-e'_j=0$;*
- *$\int_H e\wedge e'_j$ ne tend pas vers 0;*
- *$\|e'_{j,0}\|_{L^{p'}}$, $\|e'_{j,+}\|_{L^{p'}}$ et $\|d_+e'_j\|_{L^{p'}}$ tendent vers l'infini polynômialement en j;*
- *$\|d_0e'_j\|_{L^{p'}}$ tend vers 0 exponentiellement en j.*

Alors $H^{k,p}(G)\neq 0$.

Preuve. Soient a et u_j des fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont nulles sur $[0,+\infty[$ et coïncident sur $]-\infty,0]$ avec celles construites au lemme 20.

On pose $\omega = a(t)\,dt\wedge\pi^*e$ et $\omega'_j = u_j(t)\pi^*e'_j$. Alors ω est fermée. Comme $e_-=0$, il existe une constante strictement positive ν telle que

$$\|\omega\|^p_{L^p(G)}\le\text{const.}\int_{-\infty}^0|a(t)|^p(e^{\nu t}\|e_+\|^p_{L^p(H)}+\|e_0\|^p_{L^p(H)})\,dt,$$

donc $\omega\in L^p(G)$. De même,

$$\|\omega'_j\|^{p'}_{L^{p'}(G)}\le\text{const.}\int_{-\infty}^0|u_j(t)|^{p'}(e^{\nu t}\|e'_{j,+}\|^{p'}_{L^{p'}(H)}+\|e_{j,0}\|^{p'}_{L^{p'}(H)})\,dt$$

tend vers $+\infty$ polynômialement. On calcule

$$d\omega'_j = u'_j(t)\,dt \wedge \pi^* e'_j + u_j(t)\pi^* de'_j,$$

et

$$\|u'_j(t)\,dt \wedge \pi^* e'_j\|^{p'}_{L^{p'}(G)} \leq \text{const.} \int_{-\infty}^{0} |u'_j(t)|^{p'} (e^{\nu t}\|e'_{j,+}\|^{p'}_{L^{p'}(H)} + \|e_{j,0}\|^{p'}_{L^{p'}(H)})\,dt$$

tend vers 0 exponentiellement car $\|u'_j\|_{L^{p'}}$ et $\|u'_j\|_{L^\infty}$ tendent vers 0 exponentiellement. De même

$$\|u_j(t)\pi^* de'_j\|^{p'}_{L^{p'}(G)} \leq \text{const.} \int_{-\infty}^{0} |u_j(t)|^{p'} (e^{\nu t}\|d_+ e'_j\|^{p'}_{L^{p'}(H)} + \|d_0 e_j\|^{p'}_{L^{p'}(H)})\,dt$$

tend vers 0 exponentiellement car $\|d_0 e'_j\|_{L^{p'}}$ et $\|u_j\|_{L^\infty}$ tendent vers 0 exponentiellement.

Enfin

$$\int_G \omega \wedge \omega'_j = \int_{-\infty}^{0} a u_j \int_H e \wedge e'_j$$

ne tend pas vers 0. On conclut avec le lemme 13 que ω est non nulle dans $H^{k,p}(G)$. □

Corollaire 29. *Soit $M = \mathbb{R}H^n$ l'espace hyperbolique réel de dimension n. Pour chaque $2 \leq k \leq n-1$,*

$$T^{k,p}(M) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{n-1}{k-1}.$$

Preuve. Le théorème A s'applique et entraîne que, pour tout $p \neq \frac{n-1}{k-1}$, $T^{k,p}(M) = 0$. De plus, $H^{k,p}(M) = 0$ dès que $p \leq \frac{n-1}{k-1}$.

Réciproquement, soit e une $(k-1)$-forme fermée à support compact sur $\mathbb{R}^{n-1}$, non nulle. Cela existe dès que $k \geq 2$. Soit $e'_j = e'$ une $(n-k)$-forme sur $\mathbb{R}^{n-1}$ telle que $\int e \wedge e' \neq 0$. Comme $\Lambda^{k-1} = \Lambda_0^{k-1}$, $\Lambda^{n-k} = \Lambda_0^{n-k}$ et $\Lambda^{n-k+1} = \Lambda_+^{n-k+1}$, les conditions $e_- = 0$, $e'_- = 0$ et $d_- e' = 0$ sont automatiquement satisfaites. De plus, $d_+ e' = 0$, donc la proposition 28 s'applique, et $H^{k,p}(M) \neq 0$.

Pour montrer que $R^{k,p}(M) = 0$, on utilise la dualité de Poincaré, corollaire 14. En degré $k' = n-k$, l'exposant conjugué $p' = \frac{n-1}{n-k} = \boldsymbol{q}(n, -1, k')$, est justement le cas limite d'application du théorème A, donc $H^{n-k,p'}(M) = 0$. En particulier, $R^{n-k,p'}(M) = 0$, d'où, par dualité, $R^{k,p}(M) = 0$. On conclut que $T^{k,p}(M) \neq 0$. □

3.9. Preuve du théorème B. Le cas de l'espace hyperbolique réel a fait l'obet du paragraphe 3.8.

Le groupe $G_{\mu,n,\delta}$ s'obtient en faisant $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-\mu} = \sqrt{-\delta}$, $\lambda_{n-\mu+1} = \cdots = \lambda_{n-1} = 1$. On pose $k = \mu$, il vient $W_{k-1} = k-1$, $w_{n-1} = k-1+(n-k)\sqrt{-\delta}$. Les exposants critiques en degré $k-1$ sont les nombres de la forme w_{n-1}/λ où λ est une somme de $k-1$ nombres parmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Le plus petit est $\frac{w_{n-1}}{W_{k-1}}$. Le suivant est $\frac{w_{n-1}}{W_{k-2}+\lambda_{n-k}} > \frac{w_{n-1}}{w_{k-1}}$. On peut donc appliquer la proposition 27 et conclure que $T^{k,p}(G) \neq 0$ pour tout p dans l'intervalle

$$\left]\frac{w_{n-1}}{W_{k-1}}, \frac{w_{n-1}}{W_{k-2}+\lambda_{n-k}}\right[= \left]\boldsymbol{q}(n,\delta,k-1), 1+\frac{1+(n-k-1)\sqrt{-\delta}}{k-2+\sqrt{-\delta}}\right[.$$

Si $G_{\mu,n,\delta}$ était quasiisométrique à une variété riemannienne M simplement connexe, complète, à courbure sectionnelle négative δ'-pincée pour un $\delta' < \delta$ proche de δ, alors, pour $\boldsymbol{q}(n,\delta,\mu-1) < p < \boldsymbol{q}(n,\delta',\mu-1)$, $T^{\mu,p}(G_{\mu,n,\delta}) \neq 0$ mais le théorème A donne que $T^{\mu,p}(M) = 0$, c'est incompatible avec l'invariance sous quasiisométrie de la cohomologie L^p pour les espaces uniformément contractiles, voir [G2], section 8. □

Exemple 30. *Cas des espaces symétriques de rang un.* La construction qui précède ne s'étend pas aux produits semi-directs $G = H \rtimes_\alpha \mathbb{R}$ où H est nilpotent non abélien. On l'explique sur l'exemple où G est isométrique au plan $H^2_{\mathbb{C}}$. Dans ce cas, H est le groupe d'Heisenberg de dimension 3. Son algèbre de Lie $\mathcal{H}$ admet une base (X, Y, Z) où $Z = [X, Y]$ est central. Dans cette base, la matrice de la dérivation α est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soient dx, dy, $\tau = dz - xdy$ les éléments de la base duale, vus comme formes invariantes à gauche sur H. Ce sont des vecteurs propres de α, pour les valeurs propres -1, -1 et -2. Soit p un réel, $\frac{4}{3} < p < 2$. On s'intéresse à la torsion en degré 2, $T^{2,p}(G)$. Alors $2 < p' < 4$, $1 < \frac{\operatorname{tr}\alpha}{p'} < 2$, donc $\Lambda_{+(p')}$ est engendré par τ, $\Lambda_{-(p')}$ par dx et dy.

Soit e'_j une suite de fonctions sur H. Alors

$$\begin{aligned} de'_j &= (Xe'_j)dx + (Ye'_j)dy + (Ze'_j)\tau, \\ d_+e'_j &= (Ze'_j)\tau, \\ dd_+e'_j &= d(Ze'_j)\wedge\tau + (Ze'_j)d\tau\,. \end{aligned}$$

En particulier, $Ze'_j = -dd_+e'_j(X\wedge Y)$.

Par conséquent,

$$\|d_+e'_j\|_{L^{p'}} \leq \|dd_+e'_j\|_{L^{p'}},$$

et $\int_H e\wedge d_+e'_j$ doit tendre vers 0 en même temps que $\| dd_+f_j \|_{L^{p'}}$. Il n'existe donc aucune donnée e, e'_j qui satisfasse aux hypothèses du lemme 24.

De fait, $T^{2,p}(\mathbb{C}H^2) = 0$ pour $\frac{4}{3} < p < 2$, voir [P2].

Références

[Be] M. Berger, Sur certaines variétés riemanniennes à courbure positive. *C. R. Acad. Sci. Paris* **247** (1958), 1165–1168. Zbl 0093.35101 MR 0096268

[BK] P. Buser and H. Karcher, Gromov's almost flat manifolds. *Astérisque* **81** (1981). Zbl 0459.53031 MR 0619537

[CE] J. Cheeger, D. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry.* North-Holland Mathematical Library 9, North Holland, Amsterdam 1975. Zbl 0309.53035 MR 0458335

[DX] H. Donnelly, F. Xavier, On the differential form spectrum for negatively curved manifolds. *Amer. J. Math.* **106** (1984), 169–185. Zbl 0547.58034 MR 0729759

[G2] M. Gromov, Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric Group Theory* (G. Niblo and M. Roller, eds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 182, University Press, Cambridge 1993. Zbl 0841.20039 MR 1253544

[GKS] V. Goldstein, V. Kuzminov, I. Shvedov, The Künneth formula for L_p cohomologies of warped products. *Sibirsk. Mat. Zh.* **32** (5) (189) (1991), 29–42 ; English transl. *Siberian Math. J.* **32** (5) (1991), 749–760. Zbl 0754.55017 MR 1155801

[GT] V. Goldstein, M. Troyanov, The $L^{p,q}$ cohomology of *SOL*. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **7** (1998), 687–689. Zbl 0962.53031 MR 1693577

[He] E. Heintze, On homogeneous manifolds of negative curvature. *Math. Ann.* **211** (1974), 23–34. Zbl 0273.53042 MR 0353210

[Hz] L. Hernández, Kähler manifolds and $\frac{1}{4}$-pinching. *Duke Math. J.* **62** (1991), 601–611. Zbl 0725.53068 MR 1104810

[JY] J. Jost, S. T. Yau, Harmonic maps and superrigidity. In *Differential geometry. Partial differential equations on manifolds* (Greene, Robert et al., eds.), Proc. Sympos. Pure Math. 54, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 245–280. Zbl 1059.18006 MR 1216587

[K1] Ya. Kopylov, On the Künneth formula for the reduced cohomology of the tensor product of complexes of Hilbert spaces. *Sibirsk. Mat. Zh.* **40** (5) (1999), 1067–1073 ; Engl. transl. *Siberian Math. J.* **40** (5) (1999), 901–906. Zbl 0933.55020 MR 1726851

[K2] Ya. Kopylov, Exact couples in a Raïkov semi-abelian category. *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **45** (3) (2004), 162–178. Zbl 1059.18006 MR 2090333

[KS] V. Kuzminov, I. Shvedov, On compact solvability of the operator of exterior derivation. *Sibirsk. Mat. Zh.* **38** (3) (1997), 573–590 ; English transl. *Siberian Math. J.* **38** (3) (1997), 492–506 Zbl 0870.58003 MR 1457478

[MSY] N. Mok, Y. T. Siu, S. K. Yeung, Geometric superrigidity. *Invent. Math.* **113** (1993), 57–83. Zbl 0808.53043 MR 1223224

[P1] P. Pansu, Differential forms and connections adapted to contact structures, after M. Rumin. In *Symplectic Geometry* (D. Salamon, ed.), London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 192, Cambridge University Press, Cambridge 1993, 183–196. Zbl 0822.53020 MR 1297136

[P2] P. Pansu, Cohomologie L^p, espaces homogènes et pincement. Texte disponible à la page http://www.math.u-psud.fr/%7Epansu/liste-prepub.html

[P3] P. Pansu, L^p-cohomology and pinching. In *Rigidity in Dynamics and Geometry* (Cambridge, 2000), M. Burger, A. Iozzi, eds., Springer-Verlag, Berlin 2002, 379–389. Zbl 1009.53029 MR 1919412

[V] M. Ville, On $\frac{1}{4}$-pinched 4-dimensional Riemannian manifolds of negative curvature. *Ann. Global Anal. Geom.* **3** (1985), 329–336. Zbl 0575.53020 MR 0813136

[YZ] S. T. Yau and F. Zheng, Negatively $\frac{1}{4}$-pinched Riemannian metric on a compact Kähler manifold. *Invent. Math.* **103** (1991), 527–535. Zbl 0792.53064 MR 1091617

Received July 11, 2006

Pierre Pansu, Univ Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, CNRS, Orsay, 91405 France

E-mail: Pierre.Pansu@math.u-psud.fr
http://www.math.u-psud.fr/~pansu