Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 82 (2007)

Artikel: Inégalités de Milnor-Wood géométriques
Autor: Besson, Gérard / Courtois, Gilles / Gallot, Sylvestre
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-98900

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 82 (2007), 753–803 **Commentarii Mathematici Helvetici**
© Swiss Mathematical Society

Inégalités de Milnor–Wood géométriques

Gérard Besson, Gilles Courtois et Sylvestre Gallot

Résumé. Nous prouvons une généralisation de la célèbre inégalité de Milnor–Wood. Si Y est une variété riemannienne fermée, nous considérons une représentation de son groupe fondamental dans le groupe d'isométries d'une espace symétrique X de même dimension. Lorsque X est le produit d'espaces symétriques de courbure strictement négative et de dimension strictement supérieure à 2, nous démontrons une majoration du volume de cette représentation par un nombre calculé à l'aide des entropies volumiques de Y et X. Le cas d'égalité est étudié et donne un théorème de rigidité. Ensuite nous décrivons des exemples de représentations de volume non nul. En dimension 3 l'inégalité ci-dessus donne une preuve simple d'un théorème dû à Soma montrant la finitude du nombre de variétés hyperboliques fermées dominées par une même variété fermée.

Abstract. We prove a generalisation of the celebrated Milnor–Wood inequality. If Y is a closed Riemannian manifold, we consider a representation of its fundamental group into the isometry group of a symmetric space of the same dimension. When X is the product of symmetric spaces of negative curvature and of dimension greater than 2, we prove an upper bound of the volume of this representation computed in terms of the volume entropies of Y and X. The case of equality is studied and gives rise to a rigidity theorem. We then describe examples of representations of non-zero volume. In dimension 3 the inequality gives a simple proof of a theorem due to Soma showing the finiteness of the number of closed hyperbolic manifolds dominated by the same closed manifold.

Mathematics Subject Classification (2000). 53 C24, 53 C35, 20 C15.

Mots-clés. Inégalité de Milnor–Wood, entropie volumique, barycentre, représentation, formule de Schläfli.

1. Introduction

La célèbre inégalité de Milnor–Wood ([35] et [49]) affirme que, si

$$E \longrightarrow \Sigma$$

est un fibré plat en fibres S^1 sur la surface compacte Σ de genre $\gamma \geq 2$, alors la caractéristique d'Euler de ce fibré, notée $\chi(E)$ vérifie,

$$|\chi(E)| \leq |\chi(\Sigma)| = 2\gamma - 2,$$

l'égalité ayant lieu si E est le fibré tangent de Σ.

Un fibré plat étant défini par une représentation de $\pi_1(\Sigma)$, l'inégalité ci-dessus est en fait une restriction imposée à cette représentation à valeurs dans le groupe des homéomorphismes du cercle. Les valeurs possibles de la caractéristique d'Euler de E sont décrites dans [26].

Dans cet article nous envisageons une généralisation, en dimension supérieure de cette inégalité. Pour cela nous définissons le volume d'une représentation. Plus précisément, soit Y une variété différentielle fermée orientée de dimension n et soit ρ une représentation de son groupe fondamental dans le groupe d'isométries d'une variété symétrique de courbure négative de dimension n et simplement connexe, notée $\widetilde{X}$. Considérons une application $\tilde{f}$ du revêtement universel de Y dans $\widetilde{X}$ équivariante par rapport à ρ, alors, si ω désigne la forme volume de $\widetilde{X}$, la forme $\tilde{f}^*\omega$ passe au quotient sur Y.

Definition 1.1. On appelle volume de la représentation ρ le nombre,

$$\mathrm{vol}(\rho) = \left| \int_Y \tilde{f}^*\omega \right|.$$

Dans certains cas ce nombre peut-être interprété comme la classe d'Euler d'un fibré plat. Des bornes supérieures de $\mathrm{vol}(\rho)$ existent. Elles reposent souvent sur le choix d'une famille de sections particulières du fibré plat. Dans [16], par exemple, K. Corlette utilise des sections harmoniques pour démontrer un théorème de rigidité sur les représentations de volume maximal. Le cas où $\widetilde{X}$ est hyperbolique réel est abordé par A. Reznikov dans [41] ; l'auteur y prouve une inégalité optimale et c'est ce type de résultats que nous étendons dans le présent travail. Le cas d'égalité dans l'inégalité de A. Reznikov est prouvé par N. Dunfield dans [19] et dans [17], il consiste à montrer que, si le volume est maximal, la représentation est fidèle et discrète. Signalons l'article [30] dans lequel l'auteur décrit une autre notion de volume de représentations et construit de nouveaux invariants numériques.

Dans le cas où $\widetilde{X}$ est l'espace hyperbolique réel nous prouvons, dans cet article, que le volume des représentations est constant sur les composantes connexes de l'espace des représentations. C'est un résultat évident lorsque la dimension est paire car, dans ce cas, le volume est aussi un nombre d'Euler, mais nouveau dans le cas de dimension impaire. Plus précisément nous prouvons le

Théorème 1.2. *Soit Y une variété différentielle fermée et orientée et $\rho_t : \pi_1(Y) \to \mathrm{Isom}(\widetilde{X})$ une famille de représentations qui dépend de manière C^1 du paramètre $t \in \mathbb{R}$, alors le volume $\mathrm{vol}(\rho_t)$ est constant.*

La méthode employée consiste à utiliser la formule de Schläfli (voir aussi [11]). Il s'agit d'une approche nouvelle dans ce contexte ; en fait nous construisons un

"polyèdre" géodésique hyperbolique dans $\widetilde{X}$ équivariant par rapport à l'image de ρ. Il s'agit d'une réunion de simplexes hyperboliques géodésiques invariants par l'image de ρ ; les simplexes pouvant se chevaucher ils ne fournissent pas une triangulation de $\widetilde{X}$. Nous construisons ensuite une application ρ-équivariante polyèdrale. Ceci permet alors de calculer le volume de la représentation. La formule de Schläfli ainsi qu'un peu de théorie du degré permet alors de montrer la constance de ce volume. Un corollaire frappant est une preuve très simple du résultat suivant de T. Soma ([45]),

Théorème 1.3 (T. Soma). *Soit Y une variété différentielle fermée de dimension* 3. *L'ensemble des variétés hyperboliques fermées X, de dimension* 3 *telles qu'il existe une application continue de degré non nul de Y sur X, est fini.*

La preuve se résume comme suit. Appelons f l'application de degré non nul de Y sur X et ρ la représentation induite de $\pi_1(Y)$ dans $\pi_1(X)$, alors $\mathrm{vol}(\rho) = \deg(f)\,\mathrm{vol}(X)$. Le théorème 3.17 affirme qu'il existe une constante $C(Y)$ telle que $\mathrm{vol}(\rho) \leq C(Y)$. Par ailleurs le volume des variétés hyperboliques fermées est minoré par une constante universelle (qui dépend de la dimension). Ceci montre que le degré de f ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs. Le volume de la représentation ρ étant constant sur les composantes connexes de l'espace des représentations de $\pi_1(Y)$ dans $\pi_1(X)$ il ne prend également qu'un nombre fini de valeurs. Finalement le volume de la variété hyperbolique X ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Un résultat de W. Thurston affirme alors qu'il n'y a qu'un nombre fini de variétés X possibles. Le lecteur peut consulter les détails dans le paragraphe 5.

Le théorème 1.2 est en fait un corollaire d'un résultat plus général, que nous décrivons maintenant. Rappelons la définition de l'entropie volumique d'une variété Riemannienne (Y, g). Pour $x \in \widetilde{Y}$, on désigne par $B(x, R)$ la boule géodésique de centre x et de rayon R, alors on définit

$$\mathrm{Ent}(Y, g) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log(\mathrm{vol}(B(x, R))).$$

Dans ce qui suit $\widetilde{X} = \prod_1^p \widetilde{X}_i$ est le produit des espaces symétriques simplement connexes de courbure strictement négative, $\widetilde{X}_i$. Chacune des variétés $\widetilde{X}_i$ est munie d'une métrique $\alpha_i^2 g_0^i$, où g_0^i est symétrique normalisée (de courbure comprise entre -4 et -1, par exemple) et α_i est un réel strictement positif. Parmi tous les choix de nombres α_i il en est un qui donne une entropie volumique minimale (voir la proposition 2.4) ; nous noterons g_0 la métrique correspondante sur $\widetilde{X}$ qui est de dimension n. Son entropie volumique est un nombre calculable. Nous prouvons,

Théorème 1.4. *Soit Y une variété riemannienne fermée de dimension n et ρ une représentation de $\pi_1(Y)$ dans* $\mathrm{Isom}(\widetilde{X})$, *alors*

i) $\mathrm{vol}(\rho) \leq \left(\frac{\mathrm{Ent}(Y,g)}{\mathrm{Ent}(\widetilde{X},g_0)}\right)^n \mathrm{vol}(Y, g)$.

ii) *Lorsque* $\mathrm{Ent}(Y, g) > 0$ *l'égalité dans l'inégalité ci-dessus a lieu si, et seulement si, la représentation* ρ *est injective,* $X = \widetilde{X}/\rho(\pi_1(Y))$ *est une variété compacte et* (Y, g) *est homothétique à* (X, g_0).

Ce résultat était annoncé en 1998 dans [17]. Il généralise le cas où la représentation a une image discrète et cocompacte, c'est-à-dire l'analogue des théorèmes de [7] pour le cas où l'espace localement symétrique compact est localement un produit d'espaces symétriques de rang 1. Ce dernier résultat, concernant les produits d'espaces symétriques de rang 1 avec image discrète cocompacte, est énoncé par Ch. Connell et B. Farb dans [15].

La preuve de l'inégalité se fait en exhibant une famille d'applications ρ-équivariantes de $\widetilde{Y}$ sur $\widetilde{X}$ construites par la méthode introduite dans [7]. Le cas d'égalité est beaucoup plus difficile car l'image de ρ n'est pas supposée discrète ; plus précisément, nous montrons que, dans le cas d'égalité, la famille d'applications ρ-équivariantes que nous construisons converge vers une application harmonique ; ceci permet, en particulier, de montrer que la limite est de classe C^∞. La combinaison des propriétés liées à l'harmonicité et de celles liées à la construction ci-dessus conduit au résultat.

Remarquons que les applications ρ-équivariantes construites sont particulièrement adaptées à l'étude du volume et conduisent à des résultats optimaux comparables, dans un cadre plus général, à ceux de N. Dunfield [19]. Signalons également un travail récent de S. Francaviglia et B. Klaff [24] dans lequel les auteurs utilisent une intéressante variante de la construction de [8] pour étudier le cas où Y est une variété hyperbolique de volume fini.

Enfin, l'inégalité ci-dessus peut s'interpréter agréablement dans le cadre de la cohomologie bornée (voir [28]). Le récent travail de M. Burger, A. Iozzi et A. Wienhard ([14]) développe ce point de vue et aboutit à de très jolis résultats concernant les représentations du groupe fondamental des surfaces.

Nous tenons à remercier A. Reznikov, M. Boileau, D. Cooper, S. Francaviglia, N. Bergeron et J.-P. Otal pour des conversations intéressantes. Nous remercions surtout deux référés anonymes ainsi que T. Bühler pour leurs importantes remarques qui ont permis d'améliorer considérablement la rédaction de ce texte.

2. Géométrie des espaces produits

À titre d'exemple, nous décrirons la géométrie de l'espace $(\widetilde{X}, g_0^1 \oplus g_0^2) = (\mathbb{H}^{n_1} \times \mathbb{H}^{n_2}, g_0^1 \oplus g_0^2)$ muni de la métrique produit où $(\mathbb{H}^{n_1}, g_0^1)$ (resp. $(\mathbb{H}^{n_2}, g_0^2)$) désigne l'espace hyperbolique simplement connexe de dimension n_1 (resp. n_2) (de courbure constante égale à -1). Pour un exposé général sur les espaces symétriques, nous renvoyons à [29].

2.1. Géodésiques. Soient $x = (x_1, x_2) \in \widetilde{X}$ et $u = (u_1, u_2) \in T_{(x_1,x_2)}\widetilde{X}$ tels que $\|u\|^2_{g_0^1 \oplus g_0^2} = \|u_1\|^2_{g_0^1} + \|u_2\|^2_{g_0^2} = 1$, alors la géodésique de $\widetilde{X}$, notée c_u, partant de x et de vitesse initiale u est $c_u(t) = (c_1(t), c_2(t))$, où c_i $(i = 1, 2)$ est la géodésique de $\mathbb{H}^{n_i}$ partant de x_i et de vitesse initiale u_i. Une géodésique définie par un vecteur $u = (u_1, u_2)$ telle que $u_1 = 0$ ou bien $u_2 = 0$ est dite singulière ; ces cas correspondent à

$$c_u(t) = (x_1, c_2(t)) \quad \text{ou} \quad c_u(t) = (c_1(t), x_2).$$

Une géodésique définie par un vecteur $u = (u_1, u_2)$ tel que $u_i \neq 0$, pour $i = 1, 2$, est dite régulière.

2.2. Courbures et plats. La courbure sectionnelle de $(\widetilde{X}, g_0^1 \oplus g_0^2)$, qui se calcule aisément, est négative ou nulle. Soit alors $x = (x_1, x_2) \in X$, $u = (u_1, u_2) \in T_x\widetilde{X}$, un vecteur régulier, alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \widetilde{X}, \\ (t, s) &\longmapsto \big(c_1(t/\alpha_1), c_2(s/\alpha_2)\big) \end{aligned}$$

où $\alpha_1 = \|u_1\|_{g_0^1}$ et $\alpha_2 = \|u_2\|_{g_0^2}$ réalise un plongement isométrique de $\mathbb{R}^2$ muni de sa métrique euclidienne dans $(\widetilde{X}, g_0^1 \oplus g_0^2)$. On peut vérifier aisément que l'image de cette application est totalement géodésique en constatant que, si σ_i désigne la symétrie orthogonale par rapport à la géodésique c_i dans $(\mathbb{H}^{n_i}, g_0^i)$, l'image de l'application ci-dessus est l'ensemble des points fixes de $\sigma_1 \times \sigma_2$ dans $\widetilde{X}$; il s'agit donc d'un sous-espace totalement géodésique plat et qui est, de plus, de dimension maximale avec ces propriétés : $(\widetilde{X}, g_0^1 \oplus g_0^2)$ est un espace symétrique de rang 2. *Nous noterons désormais $\bar{g}_0$ la métrique $g_0^1 \oplus g_0^2$.*

Remarque. D'une manière générale, si $\widetilde{X}$ est le produit riemannien de p espaces symétriques de courbure strictement négative, alors X est de rang p.

2.3. Métriques localement symétriques. On peut munir la variété différentielle $\widetilde{X}$ d'autres métriques localement symétriques ; en effet, pour α_1 et α_2 deux nombres réels strictement positifs, on définit :

$$g_{\alpha_1,\alpha_2} = \alpha_1^2 g_0^1 \oplus \alpha_2^2 g_0^2.$$

Contrairement aux espaces symétriques irréductibles, les espaces symétriques produits sont flexibles.

2.4. Groupe d'isométries. On détermine aisément le groupe d'isométries de $(\widetilde{X}, g_{\alpha_1,\alpha_2})$. En effet, si $n_1 \neq n_2$

$$\mathrm{Isom}(\widetilde{X}, g_{\alpha_1,\alpha_2}) = \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n_1}, g_0^1) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n_2}, g_0^2).$$

Si $n_1 = n_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$, l'échange des deux facteurs est une isométrie supplémentaire qui est involutive ; le groupe d'isométries de $(\widetilde{X}, g_{\alpha_1,\alpha_1})$ est donc un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par le groupe $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n_1}, g_0) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n_2}, g_0)$.

2.5. Fonctions de Busemann. On rappelle que, si (M, g) est une variété riemannienne complète et si $c : \mathbb{R} \to M$ est une géodésique minimisante sur toute sa longueur et paramétrée par l'abscisse curviligne (c'est-à-dire, c est un plongement isométrique), alors on définit la fonction de Busemann associée à c,

$$B_c(x) = \lim_{t\to+\infty} d(x, c(t)) - t = \lim_{t\to+\infty} \big(d(x, c(t)) - d(c(0), c(t))\big).$$

On montre que la limite existe (voir [2], p. 23). Si (M, g) est une variété simplement connexe de courbure négative ou nulle son bord à l'infini (voir [2], paragraphe 3, p. 21) s'identifie à une sphère de dimension $n-1$, où $n = \dim M$, grâce au choix d'un point $m_0 \in M$ qui sert d'origine. Chaque point $\theta \in \partial M$, le bord à l'infini de M, détermine une géodésique minimisante sur toute sa longueur, à savoir, l'unique géodésique c qui passe par m_0 et telle que $\lim_{t\to+\infty} c(t) = \theta$. La fonction de Busemann correspondante est notée $B(\cdot, \theta)$. Remarquons qu'elle dépend du choix de l'origine.

Dans notre situation, il est souhaitable de travailler sur une partie du bord qui reflète mieux la structure produit. Pour la variété $\widetilde{X}$ ci-dessus le bord à l'infini s'identifie à $S^{n_1+n_2-1}$ (pour toutes les métriques g_{α_1,α_2}) après le choix d'une origine. Nous utiliserons $S^{n_1-1} \times S^{n_2-1} \subset S^{n_1+n_2-1}$ qui s'identifie dans $\partial\widetilde{X}$ à $\partial\mathbb{H}^{n_1} \times \partial\mathbb{H}^{n_2}$. Plus précisément, considérons, par exemple, la métrique $\bar{g}_0 = g_0^1 \oplus g_0^2$, appelons $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ une origine de $\widetilde{X} = \mathbb{H}^{n_1} \times \mathbb{H}^{n_2}$, le bord de $\widetilde{X}$ s'identifie aux rayons géodésiques paramétrés par longueur d'arc et partant de x_0 ; nous ne considérerons que les géodésiques $c = (c_1, c_2)$ où c_i est une géodésique de $\mathbb{H}^{n_i}$, telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|\dot{c}_1(t)\|_{g_0^1} = \|\dot{c}_2(t)\|_{g_0^2}$; nous les appellerons géodésiques diagonales. Elles sont donc paramétrées par un point $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ où $\theta_i \in S^{n_i-1} = \partial\mathbb{H}^{n_i}$. Il s'agit du bord de Furstenberg (voir [20], paragraphe 3.8, p. 235), mais nous n'utiliserons pas sa description probabiliste. Nous le noterons $\partial_F\widetilde{X}$. Il est important de noter que nous utiliserons toujours ce bord ; en effet, si nous changeons la métrique en g_{α_1,α_2}, nous pouvons considérer des g_{α_1,α_2}-géodésiques $c = (c_1, c_2)$ telles que $\frac{1}{\alpha_1}\|\dot{c}_1(t)\|_{g_{\alpha_1}} = \frac{1}{\alpha_2}\|\dot{c}_2(t)\|_{g_{\alpha_2}}$, où $g_{\alpha_i} = \alpha_i^2 g_0^i$; elles définissent un bord qui s'identifie à $\partial_F\widetilde{X}$.

Remarque. Lorsque $n_1 = n_2 = 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, le bord de Furstenberg de $\widetilde{X}$, $S^1 \times S^1 \subset S^3 = \partial\widetilde{X}$, s'identifie naturellement à un tore de Clifford dans S^3.

Maintenant, pour $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in S^{n_1-1} \times S^{n_2-1}$, on note $\bar{B}_0(\cdot, \theta)$ la fonction de Busemann de $(X, \bar{g}_0)$ correspondante (l'origine $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ étant fixée), et $B_i(\cdot, \theta_i) = B_{x_0^i}(\cdot, \theta_i)$, $i = 1, 2$, la fonction de Busemann de $(\mathbb{H}^{n_i}, g_0^i)$, on a :

Lemme 2.1. *Avec les notations ci-dessus, si* $x = (x_1, x_2) \in \widetilde{X}$

$$\overline{B}_0(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(B_1(x_1, \theta_1) + B_2(x_2, \theta_2)\big).$$

Preuve. Soit c la géodésique paramétrée par l'abscisse curviligne définie par θ et telle que $c(0) = x_0 = (x_0^1, x_0^2)$. Alors, si $c = (c_1, c_2)$, on a $\|\dot{c}_1\| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \|\dot{c}_2\|$, d'où

$$d_i(x_i, c_i(t)) = \frac{1}{\sqrt{2}}t + B_i(x_i, \theta_i) + \varepsilon_i(t), \quad i = 1, 2$$

avec $\varepsilon_i(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. Ici, d_i désigne la distance dans le facteur $i = 1, 2$.

Le lemme se déduit alors du développement limité de

$$d(x, c(t)) - t = \big(d_1^2(x_1, c_1(t)) + d_2^2(x_2, c_2(t))\big)^{1/2} - t. \qquad \square$$

De même, si $B_{\alpha_1,\alpha_2}(\cdot, \theta)$ désigne la fonction de Busemann de $(\widetilde{X}, g_{\alpha_1,\alpha_2})$ où θ est dans le bord défini ci-dessus, on a :

Lemme 2.2. *Avec les notations ci-dessus, si* $x = (x_1, x_2) \in \widetilde{X}$

$$B_{\alpha_1,\alpha_2}(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}\big(\alpha_1 B_1(x_1, \theta_1) + \alpha_2 B_2(x_2, \theta_2)\big).$$

La preuve de ce lemme se fait comme celle du lemme 2.1.

2.6. Élément de volume. Si on note dv_g l'élément de volume d'une métrique riemannienne g, il est immédiat que

$$dv_{g_{\alpha_1,\alpha_2}} = \alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2} dv_{g_0^1} \otimes dv_{g_0^2}$$

où $dv_{g_0^i}$ désigne l'élément de volume de $(\mathbb{H}^{n_i}, g_0^i)$ pour $i = 1, 2$.

2.7. Entropie. On rappelle la définition de l'entropie (volumique) d'une variété riemannienne (M, g) que nous supposerons compacte pour simplifier. Soit $x \in \widetilde{M}$ un point du revêtement universel $\widetilde{M}$ de M alors la quantité suivante existe et ne dépend pas de x,

$$\mathrm{Ent}(g) = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{R} \log\big(\mathrm{vol}(B_{\widetilde{M}}(x, R))\big)$$

où $B_{\widetilde{M}}(x, R)$ désigne la boule métrique de centre x et de rayon R dans $\widetilde{M}$ muni de la métrique relevée de g.

Par définition $\mathrm{Ent}(g)$ est l'entropie de la variété riemannienne (M, g), elle ne dépend de M qu'à travers la relevée de g à $\widetilde{M}$. Par abus de langage, nous parlerons de l'entropie de g_{α_1,α_2} sur $\widetilde{X}$.

Proposition 2.3. *Pour tous α_1, α_2 positifs*

$$\mathrm{Ent}(g_{\alpha_1,\alpha_2}) = \sqrt{\frac{(n_1-1)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(n_2-1)^2}{\alpha_2^2}}.$$

Preuve. Le calcul de l'entropie des espaces symétriques est fait dans [7]. Rappelons que l'entropie d'un produit vérifie

$$\mathrm{Ent}(g_{\alpha_1,\alpha_2})^2 = \frac{\mathrm{Ent}(\mathbb{H}^{n_1}, g_0^1)^2}{\alpha_1^2} + \frac{\mathrm{Ent}(\mathbb{H}^{n_2}, g_0^2)^2}{\alpha_2^2}. \qquad \square$$

Dans cet article on se propose de prouver un théorème d'entropie minimale (voir l'introduction) c'est-à-dire de minimum de l'entropie à volume fixé. Dans ce paragraphe nous examinons cette question pour la famille de métriques g_{α_1,α_2}. Plus précisément, soit Γ un sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n_1}, g_0^1) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n_2}, g_0^2)$, agissant sans points fixes sur $\widetilde{X}$. Ce groupe agit par isométries sur $\widetilde{X}$ pour toutes les métriques g_{α_1,α_2}, on peut donc munir le quotient $X = \widetilde{X}/\Gamma$ des métriques induites que nous noterons encore g_{α_1,α_2}. Par ailleurs,

$$\mathrm{vol}(X, g_{\alpha_1,\alpha_2}) = \alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\,\mathrm{vol}(X, \bar{g}_0).$$

Proposition 2.4. *Pour tous α_1, α_2 strictement positifs tels que $\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2} = 1$, on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}(g_{\alpha_1,\alpha_2}) &\geq \sqrt{n_1+n_2}\left(\left(\frac{n_1-1}{\sqrt{n_1}}\right)^{n_1}\left(\frac{n_2-1}{\sqrt{n_2}}\right)^{n_2}\right)^{\frac{1}{n_1+n_2}}\\ &= \mathrm{Ent}\left(g_{a_1,a_2}\right)\end{aligned}$$

où $a_1 = \left[\left(\frac{(n_1-1)\sqrt{n_2}}{\sqrt{n_1}\,(n_2-1)}\right)^{n_2}\right]^{\frac{1}{n_1+n_2}}$, $a_2 = \left[\left(\frac{(n_2-1)\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}\,(n_1-1)}\right)^{n_1}\right]^{\frac{1}{n_1+n_2}}$.

L'égalité, dans l'inégalité ci-dessus, a lieu si et seulement si $\alpha_i = a_i$.

Remarque. Lorsque les espaces symétriques sont complexes, quaternioniens ou de Cayley, les calculs sont comparables et sont laissés au lecteur.

Dans la suite nous noterons g_0 la métrique g_{a_1,a_2}.

Preuve. On a

$$\mathrm{Ent}(g_{\alpha_1,\alpha_2})^2 = (n_1+n_2)\left(\frac{n_1\left(\frac{n_1-1}{\sqrt{n_1}\alpha_1}\right)^2 + n_2\left(\frac{n_2-1}{\sqrt{n_2}\alpha_2}\right)^2}{n_1+n_2}\right)$$

la fonction $x \mapsto x^2$ étant strictement log-concave

$$\mathrm{Ent}(g_{\alpha_1,\alpha_2})^2 \geq (n_1+n_2)\left(\frac{n_1-1}{\sqrt{n_1}}\right)^{\frac{2n_1}{n_1+n_2}} \left(\frac{n_2-1}{\sqrt{n_2}}\right)^{\frac{2n_2}{n_1+n_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}}\right)^{\frac{2}{n_1+n_2}}$$

d'où le résultat

$$\mathrm{Ent}(g_{\alpha_1,\alpha_2}) \geq \sqrt{n_1+n_2}\left(\left(\frac{n_1-1}{\sqrt{n_1}}\right)^{n_1} \left(\frac{n_2-1}{\sqrt{n_2}}\right)^{n_2}\right)^{\frac{1}{n_1+n_2}}.$$

De plus, par stricte log-concavité, l'égalité n'a lieu que si et seulement si

$$\frac{n_1-1}{\sqrt{n_1}\alpha_1} = \frac{n_2-1}{\sqrt{n_2}\alpha_2}$$

c'est-à-dire si $a_i = \alpha_i$. □

Remarques. i) Si $n_1 = n_2$, alors la métrique minimisante est homothétique à $\bar{g}_0$ (le facteur d'homothétie étant calculé de sorte à avoir un volume 1).

ii) La courbure de Ricci de la métrique g_{α_1,α_2} est

$$\mathrm{Ricci}(g_{\alpha_1,\alpha_2}) = (n_1-1)g_0^1 \oplus (n_2-1)g_0^2.$$

La métrique g_{α_1,α_2} n'est donc d'Einstein que si

$$\frac{n_1-1}{\alpha_1^2} = \frac{n_2-1}{\alpha_2^2}.$$

Par conséquent, en général, la métrique qui minimise la fonctionnelle Ent, parmi les g_{α_1,α_2}, n'est pas d'Einstein. Par contre, elle l'est si et seulement si $n_1 = n_2$.

De même, si X est un espace produit général, c'est-à-dire, si $(X, \bar{g}) = (X_1, g_1) \times \cdots \times (X_p, g_p)$, où (X_k, g_k) est un espace symétrique de courbure strictement négative, de dimension n_k et d'entropie notée E_k, on considère les métriques,

$$g_\alpha = \alpha_1^2 g_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_p^2 g_p$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ avec $\alpha_k > 0$. Alors, on a la

Proposition 2.5. *Pour tous nombres réels et strictement positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tels que $\alpha_1^{n_1} \ldots \alpha_p^{n_p} = 1$, on a*

$$\mathrm{Ent}(g_\alpha) \geq \sqrt{n}\left(\prod_{i=1}^{p}\left(\frac{E_i}{\sqrt{n_i}}\right)^{\frac{n_i}{n}}\right)$$

où $n = n_1 + \cdots + n_p = \dim(X)$.

L'égalité, dans l'inégalité ci-dessus, a lieu si, et seulement si, pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$

$$\alpha_i = a_i = \frac{E_i}{\sqrt{n_i}}\left(\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{\sqrt{n_k}}{E_k}\right)^{\frac{n_k}{n}}\right).$$

2.8. Mesure de Patterson–Sullivan. Sur le revêtement universel d'une variété de courbure strictement négative, (M, g), on peut définir une famille de mesures qui est appelée (par abus de langage) la mesure de Patterson–Sullivan. Elle consiste à associer à chaque point $m \in \widetilde{M}$ (le revêtement universel de M) une mesure borélienne positive sur $\partial\widetilde{M}$, notée μ_m. Cette famille est entièrement caractérisée par les deux propriétés suivantes :

i) $\frac{d\mu_m}{d\mu_{m'}}(\theta) = \exp\big(-\operatorname{Ent}(g)(B(m,\theta) - B(m',\theta))\big)$ (on a choisi ici une origine $O \in \widetilde{M}$ afin de définir B). Cette propriété affirme que pour $m \neq m'$ les mesures μ_m et $\mu_{m'}$ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre et la densité s'exprime comme ci-dessus.

ii) Pour tous $\gamma \in \operatorname{Isom}(\widetilde{M})$, γ agit par homéomorphisme sur $\partial\widetilde{M}$, et

$$\mu_{\gamma(m)} = \gamma_*(\mu_m)$$

(voir [31]).

Dans le cas où $\widetilde{M}$ est un espace symétrique de courbure négative ou nulle (et pas strictement négative) une construction est possible (voir [1], [39] et [33]). Dans notre situation, c'est-à-dire

$$(\widetilde{M}, g) = (\widetilde{X}, \bar{g}_0) = (\mathbb{H}^{n_1}, g_0^1) \times (\mathbb{H}^{n_2}, g_0^2)$$

la famille de mesures suivante, portées par $\partial\mathbb{H}^{n_1} \times \partial\mathbb{H}^{n_2}$ vérifie des propriétés analogues aux précédentes : pour $x = (x_1, x_2) \in \widetilde{X}$ et $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \partial\mathbb{H}^{n_1} \times \partial\mathbb{H}^{n_2}$

$$d\mu_x = e^{-(n_1-1)B_1(x_1,\theta_1)-(n_2-1)B_2(x_2,\theta_2)}d\theta_1 \otimes d\theta_2.$$

Remarque. Remarquons que la mesure ci-dessus n'est pas la mesure de Patterson–Sullivan portée par le bord de Furstenberg. Le lecteur peut consulter les références [1], [39] et [33].

En effet,

i) Pour x_0 et $x \in \widetilde{X}$, $d\mu_{x_0}$ et $d\mu_x$ sont absolument continues, mais la densité n'a plus la forme précédente, elle vaut :

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_{x_0}} = \exp\left(-\left[(n_1-1)B_1(x_1,\theta_1) + (n_2-1)B_2(x_2,\theta_2)\right]\right).$$

Notons, en revanche, que $\mu^i_{x_i} = e^{-(n_i-1)B_i(x_i\theta_i)}d\theta_i$ est la mesure de Patterson–Sullivan de $(\mathbb{H}^{n_i}, g^i_0)$. Par ailleurs, on appelle P_0 la densité $\frac{d\mu_x}{d\mu_{x_0}}$; c'est le noyau de Poisson de $(\widetilde{X}, \bar{g}_0)$; cette fonction est, en effet, le produit des noyaux de Poisson de chaque facteur et est donc harmonique.

ii) Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n_1}, g^1_0) \times \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^{n_2}, g^2_0)$ alors

$$\mu_{\gamma(x)} = \gamma_*(\mu_x)$$

car

$$\begin{aligned}\gamma_*(\mu_x) &= (\gamma_1, \gamma_2)_*(\mu^1_{x_1} \otimes \mu^2_{x_2}) = (\gamma_1)_*(\mu^1_{x_1}) \otimes (\gamma_2)_*(\mu^2_{x_2})\\ &= \mu^1_{\gamma_1(x_1)} \otimes \mu^2_{\gamma_2(x_2)} = \mu_{\gamma(x)}.\end{aligned}$$

De même, si $n_1 = n_2$, on vérifie aisément que l'isométrie supplémentaire

$$\zeta(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

satisfait cette contrainte.

Dans la suite nous travaillerons donc avec cette famille μ_x qui est le produit des mesures de Patterson–Sullivan de chaque facteur. Terminons en remarquant que si $B^{\alpha_i}_i$ désigne la fonction de Busemann de $(\mathbb{H}^{n_i}, \alpha_i^2 g^i_0)$, alors

$$\mathrm{Ent}(\alpha_i^2 g^i_0) B^{\alpha_i}_i(\cdot,\cdot) = \frac{1}{\alpha_i}(n_i - 1)\alpha_i B^i(\cdot,\cdot),$$

de sorte que la famille μ_x ne dépend ni de α_1, ni de α_2. Pour la même raison P_0 est aussi une fonction harmonique (en x) sur $(\widetilde{X}, \bar{g}_\alpha)$ pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$.

2.9. Barycentre. Nous construisons ici une application inverse de $x \mapsto \mu_x$, c'est-à-dire une application qui associe à la plupart des mesures sur $\partial_F \widetilde{X}$ un point de $\widetilde{X}$ qui est son centre de masse ou barycentre. La construction est analogue à celle de [7] et [8] à l'utilisation près de $\partial_F \widetilde{X}$ au lieu de $\partial \widetilde{X}$.

Soit $\mathcal{V}$ une mesure borélienne positive non nulle sur $\partial_F \widetilde{X}$, on considère la fonction

$$x \in \widetilde{X}, \quad \mathcal{B}_{\alpha_1,\alpha_2}(x) = \int_{\partial_F \widetilde{X}} B_{\alpha_1,\alpha_2}(x, \theta)\, d\mathcal{V}(\theta).$$

On définit les mesures marginales sur $\partial\mathbb{H}^{n_1}$ et $\partial\mathbb{H}^{n_2}$ par :

i) $\mathcal{V}_1(A_1) = \mathcal{V}(A_1 \times \partial\mathbb{H}^{n_2}) = \pi_{1*}(\mathcal{V})$, où A_1 est un borélien de $\partial\mathbb{H}^{n_1}$ et π_1 la projection canonique de $\partial_F \widetilde{X}$ sur $\partial\mathbb{H}^{n_1}$; et de même,

ii) $\mathcal{V}_2(A_2) = \mathcal{V}(\partial\mathbb{H}^{n_1} \times A_2) = \pi_{2*}(\mathcal{V})$, où A_2 est un borélien de $\partial\mathbb{H}^{n_2}$ et π_2 la projection de $\partial_F \widetilde{X}$ sur $\partial\mathbb{H}^{n_2}$.

Proposition 2.6. *Si $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ sont des mesures non nulles et sans atomes, pour tous α_1, α_2 strictement positifs, la fonction $\mathcal{B}_{\alpha_1,\alpha_2}$ est $\mathcal{C}^\infty$, strictement convexe sur $\widetilde{X}$ et tend vers l'infini lorsque x tend vers l'infini.*

Preuve. Par définition de $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ et B_{α_1,α_2}, on a :

$$\mathcal{B}_{\alpha_1,\alpha_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}}\left(\alpha_1 \int_{\partial\mathbb{H}^{n_1}} B_1(x_1,\theta_1)\, d\mathcal{V}_1(\theta_1) + \alpha_2 \int_{\partial\mathbb{H}^{n_2}} B_2(x_2,\theta_2)\, d\mathcal{V}_2(\theta_2)\right).$$

En effet,

$$\begin{aligned}\int_{\partial_F\widetilde{X}} B_1\big(x_1,\theta_1)\, d\mathcal{V}(\theta_1,\theta_2)\big) &= \int_{\partial_F\widetilde{X}} B_1\big(x_1,\pi_1(\theta_1,\theta_2)\big)\, d\mathcal{V}(\theta_1,\theta_2)\\ &= \int_{\partial\mathbb{H}^{n_1}} B_1(x_1,\theta) d(\pi_1 * \mathcal{V})(\theta_1)\end{aligned}$$

et de même avec l'autre terme. Alors, on applique les résultats de [18], [7] et [8] qui montrent que $x_i \mapsto \int_{\partial\mathbb{H}^{n_1}} B_i(x_i,\theta_i)\, d\mathcal{V}(\theta_i)$ est strictement convexe, pour $i = 1, 2$, et tend vers l'infini lorsque x_i tend vers l'infini dans $\mathbb{H}^{n_i}$. On rappelle qu'une fonction est dite strictement convexe si elle l'est en restriction à toute géodésique non constante. Il est alors facile de vérifier que $\mathcal{B}_{\alpha_1,\alpha_2}$ est strictement convexe en restriction à toute géodésique non constante de $\widetilde{X} = \mathbb{H}^{n_1}\times\mathbb{H}^{n_2}$. Les autres conclusions de la proposition sont également évidentes. □

Remarque. L'hypothèse sur la mesure $\mathcal{V}$ est vérifiée, par exemple, dès que celle-ci est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\partial_F\widetilde{X}$. Par ailleurs, elle peut être affaiblie (voir [7]).

Corollaire 2.7. *Sous les mêmes hypothèses, la fonction $\mathcal{B}_{\alpha_1,\alpha_2}$ admet un unique minimum sur $\widetilde{X}$ que nous appellerons le barycentre de $\mathcal{V}$, noté* $\mathrm{bar}(\mathcal{V})$, *qui ne dépend pas de α_1, α_2 (à condition qu'ils soient strictement positifs). De plus* $\mathrm{bar}(\mathcal{V}) = (\mathrm{bar}_1(\mathcal{V}_1), \mathrm{bar}_2(\mathcal{V}_2))$, *où* $\mathrm{bar}_i(\mathcal{V}_i)$ *désigne le barycentre de la mesure $\mathcal{V}_i$ dans $\mathbb{H}^{n_i}$.*

Preuve. L'unicité résulte de la stricte convexité de $\mathcal{B}_{\alpha_1,\alpha_2}$ ($\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$) et du fait $\mathcal{B}_{\alpha_1,\alpha_2}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Le point $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ est défini par l'équation vectorielle,

$$\nabla\mathcal{B}_{\alpha_1,\alpha_2}(x^*) = 0$$

c'est-à-dire $\alpha_1 \int_{\partial\mathbb{H}^{n_1}} \nabla_1\mathcal{B}_1(x_1^*,\theta_1)\, d\mathcal{V}_1(\theta_1) + \alpha_2 \int_{\partial\mathbb{H}^{n_2}} \nabla_2\mathcal{B}_2(x_2^*,\theta_2)\, d\mathcal{V}_2(\theta_2) = 0$ (ici ∇_i désigne le gradient d'une fonction définie sur $\mathbb{H}^{n_i}$).

Si $\bar{x}_i = \mathrm{bar}_i(\mathcal{V}_i)$ (voir [8]), alors

$$\int_{\partial\mathbb{H}^{n_i}} \nabla_i B_i(\bar{x}_i, \theta_i)\, d\mathcal{V}(\theta_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Par unicité on a donc $\bar{x}_i = x_i^*$ $(i = 1, 2)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{bar}(\mathcal{V}_{\alpha_1,\alpha_2}) = (\mathrm{bar}_1(\mathcal{V}_1), \mathrm{bar}_2(\mathcal{V}_2)). \qquad \square$$

3. Le volume des représentations

Nous donnons dans ce paragraphe une application de la technique introduite dans [9] aux représentations du groupe fondamental d'une variété compacte.

Dans ce qui suit $\widetilde{X}$ est un produit fini d'espaces symétriques simplement connexe de courbure strictement négative. Chaque facteur est supposé de dimension supérieure ou égale à 3. On munit $\widetilde{X}$ de la métrique g_0 décrite dans la proposition 2.4, c'est-à-dire celle qui réalise l'entropie minimale pour tous les quotients compacts de $\widetilde{X}$. Par ailleurs, (Y, g) est une variété riemannienne compacte dont le groupe fondamental est noté Γ. On considère

$$\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(\widetilde{X}, g_0)$$

une représentation. Il existe toujours une application équivariante $\tilde{f} : \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ car $\widetilde{X}$ est contractile (dans la suite nous donnerons un exemple explicite d'une telle application). Elle vérifie donc que

$$\tilde{f}(\gamma(y)) = \rho(\gamma)\tilde{f}(y) \quad \text{pour tous } \gamma \in \Gamma \text{ et } y \in \widetilde{Y}.$$

On peut toujours la supposer C^1, quitte à la régulariser. Si on note ω_0 la forme volume de $(\widetilde{X}, g_0)$ alors,

Definition 3.1. On appelle volume de la représentation ρ, le nombre

$$\mathrm{vol}(\rho) = \left| \int_Y \tilde{f}^*(\omega_0) \right|.$$

Remarques. i) La définition ci-dessus a un sens car, $\tilde{f}$ étant C^1, $\tilde{f}^*(\omega_0)$ est une forme continue sur $\widetilde{Y}$ qui de plus est invariante par Γ. Par ailleurs, il est immédiat de vérifier que $\mathrm{vol}(\rho)$ ne dépend pas du choix de l'application équivariante $\tilde{f}$.

ii) Quitte à changer l'orientation de $\widetilde{X}$ on peut supposer que l'intégrale $\int_Y \tilde{f}^*(\omega_0)$ est positive.

Nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Avec les notations ci-dessus :*

i) $\mathrm{vol}(\rho) \leq \left(\frac{\mathrm{Ent}(Y,g)}{\mathrm{Ent}(\widetilde{X},g_0)}\right)^n \mathrm{vol}(Y,g)$.

ii) *Lorsque* $\mathrm{Ent}(Y,g) > 0$ *l'égalité, dans l'inégalité ci-dessus a lieu si, et seulement si, la représentation* ρ *est injective,* $X = \widetilde{X}/\rho(\Gamma)$ *est une variété compacte et* (Y,g) *est homothétique à* (X,g_0).

Remarques. i) Ce résultat est un premier pas dans la compréhension des représentations des groupes fondamentaux de variétés compactes dans des groupes d'isométries d'espaces symétriques de type non compact.

ii) Les exemples de telles représentations sont rares et nous discuterons ce point plus loin dans le texte. Plus rares encore sont les exemples dont le volume est non nul.

iii) Un exemple est donné par $\rho = f_*$, où $f\colon Y \to X = \widetilde{X}/\Gamma_0$ est une application continue de degré $\deg(f)$ sur la variété compacte X. Dans ce cas $\mathrm{vol}(\rho) = |\deg(f)|\,\mathrm{vol}(X,g_0)$. Pour un énoncé précis voir le théorème 3.17

iv) Seul le cas de dimension 2, où notre méthode ne s'applique pas, est complètement compris (cf. [26]). En particulier, le théorème 3.2 est une généralisation de la célèbre inégalité de Milnor–Wood (cf. [35], [49] et [41]).

Preuve. La preuve de l'inégalité est semblable à celle prouvée dans [7], section 5, nous la faisons maintenant dans le contexte des représentations. Le cas d'égalité est beaucoup plus difficile car nous ne disposons pas de quotient compact de $\widetilde{X}$ ($\widetilde{X}/\rho(\Gamma)$ n'est même pas un espace séparé, en général) sur lequel s'appuyer afin d'utiliser la théorie du degré (voir la preuve du cas d'égalité de [7], section 7). Une étape de la preuve consiste à montrer que, dans la cas d'égalité, $\rho(\Gamma)$ est discret et cocompact. Dans ce qui suit d désigne de manière générique la distance sur l'espace considéré.

Soit $\tilde{f}$ une première application continue et ρ-équivariante,

$$\tilde{f}\colon \widetilde{Y} \longrightarrow \widetilde{X},$$

par exemple, nous pouvons prendre, pour $\epsilon > 0$,

$$\tilde{f}(y) = \mathrm{bar}\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-\mathrm{Ent}(Y,g)(1+\varepsilon)\, d(y,\gamma(y_0))}\rho(\gamma)_* d\theta\Big)$$

où $y_0 \in Y$ est une origine et les notations sont celles du paragraphe 2.

On rappelle que si $\theta \in \partial_F\widetilde{X}$ et $z \in \widetilde{X}$, $d\theta$ désigne la mesure canonique sur $\partial_F\widetilde{X}$ et $P_0(z,\theta)$ le noyau de Poisson de $(\widetilde{X},\bar{g}_0)$, normalisé en l'origine $x_0 \in \widetilde{X}$ de sorte que

$$P_0(x_0,\cdot) \equiv 1.$$

Nous construisons une autre application, comme dans [7], définie, pour tout $c > \mathrm{Ent}(Y, g)$, par

$$\widetilde{F}_c(y) = \mathrm{bar}\left(\left(\int_{\widetilde{Y}} e^{-cd(y,z)} P_0\big(\tilde{f}(z), \theta\big)\, dv_g(z)\right) d\theta\right)$$

L'avantage de la fonction $\widetilde{F}_c$ sur $\tilde{f}$ est qu'elle est plus régulière ; en effet, $\tilde{f}$ n'est a priori que Lipschitzienne alors que $\widetilde{F}_c$ est de classe C^1. Ce point sera crucial pour le cas d'égalité. Montrons la régularité de $\widetilde{F}_c$.

Posons comme dans [7], section 2.3, pour $c > \mathrm{Ent}(Y, g)$

$$\psi_c(y, \theta) = \int_{\widetilde{Y}} e^{-cd(y,z)} P_0(\tilde{f}(z), \theta)\, dv_g(z)$$

et

$$\Phi_c(y, \theta) = \frac{\psi_c(y, \theta)}{\int_{\partial_F \widetilde{X}} \psi_c(y, \theta)\, d\theta}, \qquad \mu_{y,c} = \Phi_c(y, \theta) d\theta.$$

$\Phi_c(y, \theta)$ est de norme $L^1(\partial_F \widetilde{X}, d\theta)$ égale à 1, donc la mesure $\mu_{y,c}$ est de probabilité. Le barycentre d'une mesure est invariant par multiplication de celle-ci par une constante strictement positive, d'où,

$$\widetilde{F}_c(y) = \mathrm{bar}(\mu_{y,c}).$$

Lemme 3.3. *L'application* $(c, y) \mapsto \Phi_c(y, \cdot)$ *est de classe* C^1 *de* $]\mathrm{Ent}(Y, g), +\infty[\times \widetilde{Y}$ *dans* $L^1(\partial_F \widetilde{X})$.

Preuve. Il n'est pas possible de montrer le lemme ci-dessus par simple application du théorème de dérivation sous le signe somme. Toutefois, dans [7], lemme 2.4, nous prouvons, comme corollaire du théorème de convergence dominée, que $y \mapsto \Phi_c(y, \cdot)$ est de classe C^1 (à c fixé) et, si $u \in T_y\widetilde{Y}$, sa différentielle est donnée par

$$(u \cdot \psi_c)(y, \theta) = -c \int_{\widetilde{Y}} e^{-cd(y,z)} (u \cdot d)(y, z) P_0(\tilde{f}(z), \theta)\, dv_g(z)$$

la continuité en c de cette quantité est évidente en remarquant que $|u \cdot d| \leq \|u\|_g$, que P_0 est strictement positif et que, pour y et z fixés, $c \mapsto e^{-cd(y,z)}$ est décroissante en c ; ceci permet d'appliquer une nouvelle fois le théorème de convergence dominée.

De même, pour y et θ fixés, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme afin de montrer la différentiabilité en c (à y et θ fixé). En effet,

$$0 \leq d(y, z) e^{-cd(y,z)} \leq e^{-c'd(y,z)}$$

pour tout $c' < c$. Ceci montre que

$$\frac{\partial \psi_c}{\partial c}(y, \theta) = -\int_{\widetilde{Y}} d(y, z) e^{-cd(y,z)} P_0\big(\tilde{f}(z), \theta\big)\, dv_g(z)$$

existe et, encore grâce au théorème de convergence dominée, est continue en (c, y). Ceci prouve le lemme ci-dessus. On remarque que le même type d'argument que ceux utilisés dans [7] montrent que $\frac{\partial \psi_c}{\partial c}$ est de classe C^1 comme fonction de y à valeurs dans $L^1(\partial_F \widetilde{X})$.

De même ψ_c est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en c et chaque dérivée en c est de classe C^1 en y comme fonction de $\widetilde{Y}$ à valeurs dans $L^1(\partial_F \widetilde{X})$. L'assertion du lemme concernant Φ s'en déduit. □

Lemme 3.4. *L'application*

$$\begin{aligned} \widetilde{F} \colon]\mathrm{Ent}(Y, g), +\infty[\times \widetilde{Y} &\longrightarrow \widetilde{X}, \\ (c, y) &\longmapsto \widetilde{F}_c(y) \end{aligned}$$

est de classe C^1.

Preuve. Il s'agit d'une simple application du théorème des fonctions implicites (voir [7], section 5b.). Rappelons la preuve de ce fait. Soit $\{e_i(x)\}_{i=1,\dots,n}$ une base orthonormée de $T_x\widetilde{X}$ dépendant de manière $\mathcal{C}^\infty$ de $x \in \widetilde{X}$. Définissons les fonctions

$$G_i(c, x, y) = \int_{\partial_F \widetilde{X}} d\overline{B}_0(x, \theta)(e_i(x))\Phi_c(y, \theta)\, d\theta$$

(on rappelle que $\overline{B}_0(x, \theta)$ désigne la fonction de Busemann de $(\widetilde{X}, \bar{g}_0)$ normalisée en x_0 et $d\theta$ la mesure canonique de $\partial_F \widetilde{X}$, c'est-à-dire provenant de la mesure de Haar sur le compact maximal), et

$$\begin{aligned} G \colon]\mathrm{Ent}(Y, g), +\infty[\times \widetilde{X} \times \widetilde{Y} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (c, x, y) &\longmapsto \big(G_1(c, x, y), \dots, G_n(c, x, y)\big). \end{aligned}$$

Alors, la fonction $\widetilde{F}_c$ est définie par l'équation implicite

$$G(c, \widetilde{F}_c(y), y) = 0. \tag{1}$$

Le théorème des fonctions implicites est alors facile à vérifier car la condition qu'il requiert est exactement celle qui assure l'existence du barycentre.

La fonction G étant C^1 en (c, x, y) le lemme est prouvé. En fait $\widetilde{F}_c$ est, pour les mêmes raisons que précédemment, $\mathcal{C}^\infty$ en c. □

Preuve de l'inégalité i) *du théorème* 3.2. Nous donnons la preuve dans un cas particulier afin d'éviter des lourdeurs dans les notations ; le cas général est rigoureusement identique.

Nous considérons, comme précédemment, $\widetilde{X} = \mathbb{H}^{n_1} \times \mathbb{H}^{n_2}$, où $n_i \geq 3$. Rappelons que $\widetilde{X}$ est muni de la métrique $g_0 = g_{a_1,a_2}$, où les nombres a_i sont ceux calculés dans

la proposition 1.4. La métrique g_0 minimise l'entropie normalisée, sur X, parmi les métriques g_{α_1,α_2} (voir la proposition 2.4).

La notion de barycentre étant indépendante des coefficients α_i servant à définir la métrique, nous utiliserons, pour simplifier, la métrique $\bar{g}_0 = g_0^1 \oplus g_0^2$ (voir le corollaire 2.7).

Notons que chaque mesure $\mu_{y,c}$ est sans atome. Par ailleurs, le barycentre sur $\widetilde{X}$ se décompose (cf. corollaire 2.7) et donc également la fonction $\widetilde{F}_c$

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_c \colon \widetilde{Y} &\longrightarrow \widetilde{X} = \mathbb{H}^{n_1} \times \mathbb{H}^{n_2}, \\ y &\longmapsto (\widetilde{F}_{1,c}(y), \widetilde{F}_{2,c}(y)) \end{aligned}$$

où $\widetilde{F}_{i,c}(y) = \mathrm{bar}_i(\pi_i * (\mu_{y,c}))$. Si $\widetilde{X}$ n'est pas un produit, nous travaillons avec la seule fonction $\widetilde{F}_c$. Le résultat principal est le suivant :

Lemme 3.5. *Pour $c > \mathrm{Ent}(Y, g)$ et pour tout $y \in \widetilde{Y}$, on a*

$$|\operatorname{Jac} \widetilde{F}_c(y)| \leq \left(\frac{c}{\mathrm{Ent}(\widetilde{X}, g_0)} \right)^n$$

où $n = \dim Y = \dim X = n_1 + n_2$ et le Jacobien est calculé à l'aide des métriques g sur Y et g_0 sur X.

Preuve. Comme nous l'avons remarqué dans le chapitre précédent la notion de barycentre, et donc la définition de l'application $\widetilde{F}_c$, ne dépend pas de α_1, α_2. Nous pouvons donc utiliser sur $\widetilde{X}$ la métrique $\bar{g}_0 = g_0^1 \oplus g_0^2$ (on rappelle que g_0^i désigne ici la métrique de courbure constante égale à -1 sur $\mathbb{H}^{n_i}$). Rappelons une nouvelle fois la notation $g_0 = a_1 g_0^1 \oplus a_2 g_0^2$ où a_i sont les valeurs calculées dans la section précédente, telles que g_0 minimise l'entropie normalisée parmi les métriques g_{α_1,α_2}. Nous noterons $\overline{\text{dét}}(D\widetilde{F}_c(y))$ le déterminant de la différentielle de $\widetilde{F}_c$ en y calculé à l'aide des métriques g sur $\widetilde{Y}$ et $\overline{g_0}$ sur $\widetilde{X}$; par ailleurs $\operatorname{Jac} \widetilde{F}_c(y) = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \overline{\text{dét}}(D\widetilde{F}_c(y))$ est le déterminant de $D\widetilde{F}_c(y)$ calculé à l'aide des métriques g sur $\widetilde{Y}$ et g_0 sur $\widetilde{X}$. Notons que g_0 est normalisée par $a_1^{n_1} a_2^{n_2} = 1$, de sorte que $\operatorname{Jac} \widetilde{F}_c(y) = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \overline{\text{dét}}(D\widetilde{F}_c(y)) = \overline{\text{dét}}(D\widetilde{F}_c(y))$. Nous distinguerons toutefois les deux expressions afin d'éviter les confusions entre les métriques g_0 et $\bar{g}_0$.

Estimation de $\overline{\text{dét}}(D\widetilde{F}_c(y))$. Ici, tous les calculs se font à l'aide de la métrique $\bar{g}_0$ sur $\widetilde{X}$. Rappelons que nous désignons par B_i les fonctions de Busemann sur $\mathbb{H}^{n_i}$ muni de la métrique g_0^i. Comme dans [9], page 155, nous définissons les formes quadratiques $h_{y,c}$, $k_{y,c}$ et les opérateurs symétriques associés $H_{y,c}$, $K_{y,c}$ sur $T_{\widetilde{F}_c(y)}\widetilde{X}$,

$$\begin{aligned} k_{y,c}(v, v) &= \int_{\partial_F \widetilde{X}} Dd\bar{B}_{0|(\widetilde{F}_c(y),\theta)}(v, v)\, d\mu_{y,c}(\theta) = \bar{g}_0(K_{y,c}(v), v), \\ h_{y,c}(v, v) &= \int_{\partial_F \widetilde{X}} \left(d\bar{B}_{0|(\widetilde{F}_c(y),\theta)}(v) \right)^2 d\mu_{y,c}(\theta) = \bar{g}_0(H_{y,c}(v), v) \end{aligned}$$

où $v \in T_{\widetilde{F}_c(y)}\widetilde{X}$. Ici, comme dans la section précédente,

$$\overline{B}_0(x,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(B_1(x_1,\theta_1) + B_2(x_2,\theta_2)\big).$$

Enfin, nous définissons la forme quadratique $h'_{y,c}$ et l'opérateur symétrique associé $H'_{y,c}$ sur $T_y\widetilde{Y}$,

$$h'_{y,c}(u,u) = 4\int_{\partial_F\widetilde{X}} \big(d\sqrt{\Phi_c}_{|(y,\theta)}(u)\big)^2 d\theta = g(H'_{y,c}u,u)$$

pour $u \in T_y\widetilde{Y}$. Dans cette formule la différentielle de $\sqrt{\Phi_c}$ est prise par rapport à la variable y. Nous utiliserons les mêmes notations pour les formes bilinéaires associées. En différenciant l'équation implicite (1) qui définit $\widetilde{F}_c$, nous obtenons, pour $u \in T_y\widetilde{Y}$ et $v \in T_{\widetilde{F}_\varepsilon(y)}\widetilde{X}$,

$$\begin{aligned} k_{y,c}\big(v, D\widetilde{F}_c(y)(u)\big) &= -\int_{\partial_F\widetilde{X}} d\overline{B}_{0|(\widetilde{F}_c(y),\theta)}(v)\, d\Phi_{c|(y,\theta)}(u)\, d\theta \\ &= -2\int_{\partial_F\widetilde{X}} d\overline{B}_{0|(\widetilde{F}_c(y),\theta)}(v)\sqrt{\Phi_c}(y,\theta)\, d\sqrt{\Phi_c}_{|(y,\theta)}(u)\, d\theta, \end{aligned}$$

et, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\big|k_{y,c}\big(D\widetilde{F}_c(y)(u), v\big)\big| \le \big(h_{y,c}(v,v)\big)^{1/2}\big(h'_{y,c}(u,u)\big)^{1/2}.$$

Un lemme élémentaire d'algèbre linéaire (cf. [8], lemme 5.4) donne, à partir de (2.5),

$$\text{dét}(K_{y,c})\big|\overline{\text{dét}}\big(D\widetilde{F}_c(y)\big)\big| \le \big(\text{dét}\, H_{y,c}\big)^{1/2}\big(\text{dét}\, H'_{y,c}\big)^{1/2}.$$

Rappelons que la famille de mesures $\mu_{y,c}$ est normalisée (de masse totale égale à 1 pour tout $y \in \widetilde{Y}$ et $c > \mathrm{Ent}(Y,g)$). La trace d'une forme quadratique φ (calculée dans une base orthonormée par rapport à une structure euclidienne g) étant notée $\mathrm{trace}_g\,\varphi$, en injectant dans la définition de $h'_{y,c}$ le fait que $\|\nabla d_{\widetilde{Y}}\|_g = 1$, nous obtenons, comme dans [7], p. 751,

$$\mathrm{trace}(H'_{y,c}) = \mathrm{trace}_g(h'_{y,c}) \le c^2,$$

d'où

$$\big(\text{dét}\, H'_{y,c}\big)^{1/2} \le \Big(\frac{c}{\sqrt{n_1+n_2}}\Big)^{n_1+n_2}.$$

Maintenant la définition de $h_{y,c}$ (et $H_{y,c}$) montre que

$$H_{y,c} = \begin{pmatrix} H_1 & * \\ * & H_2 \end{pmatrix}$$

où H_i désigne la restriction de $H_{y,c}$ à $\mathbb{H}^{n_i}$; plus précisément, pour $i = 1, 2$ et $v_i \in T_{F_{i,c}(y)}\mathbb{H}^{n_i}$

$$\begin{aligned} g_0^i(H_i v_i, v_i) &= \int_{\partial_F \widetilde{X}} \left(d\overline{B}_{0|(\widetilde{F}_c(y),\theta)}(v_i)\right)^2 d\mu_{y,c}(\theta) \\ &= \int_{\partial_F \widetilde{X}} \frac{1}{2}\left(dB_{i|(\widetilde{F}_{i,c}(y),\theta_i)}(v_i)\right)^2 d\mu_{y,c}(\theta) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\partial \mathbb{H}^{n_i}} \left(dB_{i|(\widetilde{F}_{i,c}(y),\theta_i)}(v_i)\right)^2 d\left(\pi_{i*}(\mu_{y,c})\right)(\theta_i). \end{aligned}$$

Remarquons que, puisque $\|dB_i\|_{g_0^i} = 1$ et $(\pi_i)_*\mu_{y,c}$ est une probabilité, nous avons

$$\operatorname{trace}(2H_i) = 1.$$

De même,

$$K_{y,c} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix}$$

avec, pour $i = 1, 2$ et $v_i = T_{\widetilde{F}_{i,c}(y)}\mathbb{H}^{n_i}$,

$$g_0^i(K_i v_i, v_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\partial \mathbb{H}^{n_i}} DdB_{i|(\widetilde{F}_{i,c}(y),\theta_i)}(v_i, v_i)\, d\left(\pi_{i*}(\mu_{y,c})\right)(\theta_i).$$

Lemme 3.6. *Avec les notations précédentes, nous avons*

i) $\operatorname{dét}(K_{y,c}) = \operatorname{dét}(K_1)\operatorname{dét}(K_2)$;

ii) $\operatorname{dét}(H_{y,c}) \leq \operatorname{dét}(H_1)\operatorname{dét}(H_2)$.

L'égalité i) est évidente et l'inégalité ii) est classique (voir [3], p. 63) pour les matrices symétriques.

Par ailleurs, sur les espaces hyperboliques $\mathbb{H}^{n_i}$, la relation suivante est vérifiée (voir [7], p. 751), pour $i = 1, 2$,

$$DdB_i = g_0^i - dB_i \otimes dB_i$$

qui se traduit en

$$K_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(I_i - 2H_i)$$

où I_i désigne l'identité de $T_{F_{i,c}(y)}\mathbb{H}^{n_i}$. En regroupant ces remarques, nous obtenons, à partir de 2.5,

$$|\overline{\operatorname{dét}}(D\widetilde{F}_c(y))| \leq \left(\frac{c}{\sqrt{n_1+n_2}}\right)^{n_1+n_2} \frac{(\operatorname{dét} 2H_1)^{1/2}}{\operatorname{dét}(I-2H_1)} \frac{(\operatorname{dét} 2H_2)^{1/2}}{\operatorname{dét}(I-2H_2)}.$$

Alors, un lemme algébrique donne (cf. [7], appendice B),

$$\frac{(\text{dét}\, 2H_i)^{1/2}}{\text{dét}(I-2H_i)} \leq \left(\frac{\sqrt{n_i}}{n_i-1}\right)^{n_i},$$

l'égalité n'ayant lieu que si, et seulement si, $2H_i = \frac{1}{n_i} I_i$ (rappelle que trace$(2H_i) = 1$). On utilise ici l'hypothèse $n_i \geq 3$, pour tout i.

En regroupant ces inégalités, il vient

$$\begin{aligned} |\operatorname{Jac} \widetilde{F}_c(y)| &= a_1^{n_1} a_2^{n_2} |\overline{\text{dét}}(D\widetilde{F}_c(y)| \\ &\leq c^{n_1+n_2} \frac{a_1^{n_1} a_2^{n_2}}{(\sqrt{n_1+n_2})^{n_1+n_2}} \left(\frac{\sqrt{n_1}}{n_1-1}\right)^{n_1} \left(\frac{\sqrt{n_2}}{n_2-1}\right)^{n_2} \\ &= \left(\frac{c}{\operatorname{Ent}(\widetilde{X}, g_0)}\right)^n \end{aligned}$$

d'après la proposition 2.4. Ce qui prouve le lemme 3.5.

L'inégalité i) du théorème 3.2 s'en déduit par intégration et passage à la limite en lorsque c tend vers $\operatorname{Ent}(Y, g)$.

Remarques sur le cas général. Si $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 \times \cdots \times \widetilde{X}_p$ et $\bar{g}_0 = g_1 \oplus \cdots \oplus g_p$ où $(\widetilde{X}_k, g_k)$ est un espace symétrique de courbure strictement négative et de dimension n_k, on munit X de la métrique $g_0 = a_1 g_1 \oplus \cdots \oplus a_p g_p$, où les nombres a_i sont ceux calculés dans la proposition 2.5. La métrique g_0 minimise l'entropie normalisée parmi les métriques g_α (voir la proposition 2.5).

Alors, comme ci-dessus, on pose $\bar{g}_0 = g_1 \oplus \cdots \oplus g_p$. On suppose de plus que la courbure sectionnelle de $(\widetilde{X}_k, g_k)$ est normalisée de sorte qu'elle soit égale à -1 si $(\widetilde{X}_k, g_k)$ est hyperbolique réelle et comprise entre -4 et -1 dans les autres cas. Le calcul de l'entropie d'une telle métrique est donné dans [7], p. 740.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \widetilde{X}$ et $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p) \in \partial_F \widetilde{X}$ ($\partial_F \widetilde{X} = \partial \widetilde{X}_1 \times \cdots \times \partial \widetilde{X}_p$), la fonction de Busemann de $(\widetilde{X}, \bar{g}_0)$ est

$$\bar{B}_0(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{p}} \big(B_1(x_1, \theta_1) + \cdots + B_p(x_p, \theta_p)\big)$$

et on a les décompositions

$$H_{y,c} = \begin{pmatrix} H_1 & * & * & * \\ * & H_2 & * & * \\ * & * & \ddots & * \\ * & * & * & H_p \end{pmatrix}, \quad K_{y,c} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_p \end{pmatrix}$$

avec trace$(pH_k) = 1$ pour $k = 1, 2, \ldots, p$.

La relation qui lie K_i et H_i dépend du type d'espace considéré (hyperbolique réel, complexe, quaternionien ou de Cayley) et est décrite dans [7], p. 751. On peut vérifier aisément que

$$\operatorname{trace}(\sqrt{p}K_k) = E_k = \text{entropie de}(\widetilde{X}_k, g_k)$$

pour $k = 1, \ldots, p$.

Dans l'appendice B de [7], proposition B.1, nous montrons que

$$\frac{\text{dét}(pH_k)^{1/2}}{\text{dét}(\sqrt{p}K_k)} \leq \left(\frac{\sqrt{n_k}}{E_k}\right)^{n_k}.$$

On conclut, alors, grâce à la proposition 2.5, comme ci-dessus. □

Preuve du cas d'égalité ii) *du théorème* 3.2. La preuve commence comme dans le paragraphe 7 de [7]. Rappelons que $\operatorname{Ent}(Y, g) > 0$. Nous pouvons donc fixer le facteur d'homothétie en normalisant g de sorte que

$$\operatorname{Ent}(Y, g) = \operatorname{Ent}(\widetilde{X}, g_0) = E_0.$$

On suppose donc que $\operatorname{vol}(\rho) = \operatorname{vol}(Y, g)$. Le travail porte sur l'étude des formes quadratiques, déjà introduites au paragraphe précédent,

$$h_{y,c}(\cdot,\cdot) = \int_{\partial_F \widetilde{X}} \left(d\overline{B}_{0|(\widetilde{F}_c(y),\theta)}(\cdot)\right)^2 \Phi_c(y,\theta)\, d\theta,$$

$$k_{y,c}(\cdot,\cdot) = \int_{\partial_F \widetilde{X}} Dd\overline{B}_{0|(\widetilde{F}_c(y),\theta)}(\cdot,\cdot)\Phi_c(y,\theta)\, d\theta$$

et des endomorphismes symétriques et définis positifs correspondants, $H_{y,c}$ et $K_{y,c}$. La plus grande valeur propre de $H_{y,c}$ est notée $\lambda_n^c(y)$ et vérifie,

$$0 < \lambda_n^c(y) < 1,$$

en effet, l'endomorphisme symétrique $H_{y,c}$ est de trace égale à 1 et est défini positif car le support de la mesure est le bord de Furstenberg. On rappelle également que $\operatorname{trace}(K_{y,c}) = \operatorname{Ent}(\widetilde{X}, g_0) = E_0$ (ceci car Φ est normalisée).

1ère étape : convergence presque sûre de $H_{y,c}$. L'inégalité i) du théorème 3.2 montre que

$$|\operatorname{Jac} \widetilde{F}_c(y)| \leq \left(\frac{c}{E_0}\right)^n \quad \text{pour tous } y \in \widetilde{Y} \text{ et } c > E_0.$$

Lemme 3.7. *Il existe une suite c_k tendant vers E_0, telle que* $\operatorname{Jac} \widetilde{F}_{c_k}(y) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ *presque sûrement sur $\widetilde{Y}$.*

Preuve. Comme dans [7], lemme 7.3, posons $f_c(y) = \operatorname{Jac} \widetilde{F}_c(y) - 1$ et $f_c^{\pm} = \sup(0, \pm f_c)$; la fonction f_c^+ tend uniformément vers 0 lorsque c tend vers E_0 car,

$$0 \leq f_c^+(y) \leq \left(\frac{c}{E_0}\right)^n - 1 \quad \text{pour tout } y \in \widetilde{Y}.$$

Par ailleurs, pour tout $c > E_0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(\rho) = \int_Y \widetilde{F}_c^*(\omega_0) &= \int_Y \operatorname{Jac} \widetilde{F}_c(y)\, dv_g \\ &\leq \left(\frac{c}{E_0}\right)^n \operatorname{vol}(Y, g) - \int_Y f_c^-\, dv_g. \end{aligned}$$

On rappelle que les orientations sont choisies en sorte que $\int_Y \widetilde{F}_c^*(\omega_0)$ soit positive. L'hypothèse $\operatorname{vol}(\rho) = \operatorname{vol}(Y, g)$ implique que f_c^- tend vers 0 dans $L^1(Y, g)$ lorsque c tend vers E_0, d'où l'existence d'une sous-suite c_k telle que $f_{c_k}^-$ tende vers zéro presque sûrement. □

Lorsque $(\widetilde{Y}, \tilde{g}) = (\widetilde{X}, \bar{g}_0)$, la mesure est la mesure canonique du bord de Furstenberg $\partial_F \widetilde{X}$ et ρ est l'injection naturelle de Γ dans le groupe d'isométries de $\widetilde{X}$, alors l'endomorphisme $H_{y,c}$ prend une forme particulière ; en effet, pour tout $x \in \widetilde{X}$ et pour $c = E_0$

$$H_{x,0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{pn_1} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{pn_2} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{pn_p} I_p \end{pmatrix},$$

où $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et I_k désigne l'identité de $T_{x_k}\widetilde{X}_k$. Désormais nous noterons H_0 l'endomorphisme $H_{x,0}$. Les termes K_i, qui se calculent en fonction de $H_i = \frac{1}{pn_i} I_i$, valent $K_i = \frac{E_i}{\sqrt{pn_i}} I_i$. Nous noterons de même K_0 l'endomorphisme $K_{x,0}$ correspondant.

À partir de maintenant nous considérerons une suite $c_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} E_0$ telle que $\operatorname{Jac} \widetilde{F}_{c_k}(y) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$ presque sûrement en $y \in \widetilde{Y}$.

Lemme 3.8. *Pour presque tout $y \in \widetilde{Y}$, $\lim_{k \to +\infty} H_{y,c_k} = H_0$.*

Preuve. Pour tout $y \in \widetilde{Y}$ et pour tout $c > E_0$

$$|\operatorname{Jac} \widetilde{F}_c(y)| \leq \left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^n \frac{(\operatorname{dét} H_{y,c})^{1/2}}{\operatorname{dét}(K_{y,c})} \leq \left(\frac{c}{E_0}\right)^n.$$

Soit $y \in Y$ tel que $|\operatorname{Jac} \widetilde{F}_{c_k}(y)| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$, la quantité $\frac{(\operatorname{dét} H_{y,c_k})^{1/2}}{\operatorname{dét}(K_{y,c_k})}$ tend vers sa valeur maximale, à savoir $\left(\frac{\sqrt{n}}{E_0}\right)^n$. On rappelle que $\prod_{i=1}^p a_i^{n_i} = 1$ (voir le paragraphe 1).

Par une preuve en tout point analogue à celle donnée dans l'appendice B, proposition B5 de [7] et en utilisant 3.6, nous montrons l'existence d'une constante $A > 0$ telle que

$$\frac{(\text{dét}\, H_{y,c})^{1/2}}{\text{dét}(K_{y,c})} \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{E_0}\right)^n \left(1 - A\|H_{y,c} - H_0\|^2_{\bar{g}_0}\right)$$

de sorte que

$$\|H_{y,c} - H_0\|^2_{\bar{g}_0} \leq \frac{1}{A}\left(1 - \left(\frac{E_0}{c}\right)^n |\operatorname{Jac} \widetilde{F}_c(y)|\right)$$

et, si $|\operatorname{Jac} \widetilde{F}_{c_k}(y)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$, alors

$$H_{y,c_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} H_0. \qquad \square$$

2ème étape : convergence uniforme de H_{y,c_k} vers H_0. Nous reprenons les étapes de la preuve du cas d'égalité de [7], paragraphe 7.

Soit $c_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} E_0$ une sous-suite telle que $\operatorname{Jac} \widetilde{F}_{c_k} \to 1$ presque sûrement et H_{y,c_k} tende presque sûrement vers H_0. Pour simplifier les notations nous utiliserons l'indice k en lieu et place de l'indice c_k.

Lemme 3.9. *Soient y et y' deux points de $\widetilde{Y}$ tels que $\lambda_n^k \leq 1 - \frac{1}{n}$ en tout point d'une g-géodésique minimisante α qui joint y à y', alors*

$$d_{\bar{g}_0}(\widetilde{F}_k(y), \widetilde{F}_k(y')) \leq K_1 d_g(y, y').$$

On rappelle que $\lambda_n^k(y) = \lambda_n^{c_k}(y)$ est la plus grande valeur propre de H_{y,c_k}.

Le choix de $1 - \frac{1}{n}$ est arbitraire, un autre choix, indépendant de la dimension, donnerait des estimations similaires.

Preuve. On tire, comme précédemment, de l'équation implicite qui définit $\widetilde{F}_k$, pour tous $u \in T_y\widetilde{Y}$ et $v \in T_{\widetilde{F}_k(y)}\widetilde{X}$,

$$\begin{aligned}
\bar{g}_0\big(K_{y,k} D_y \widetilde{F}_k(u), v\big) &= -\int_{\partial_F \widetilde{X}} d\bar{B}_{0|(\widetilde{F}_k(y),\theta)}(v)\, d\Phi_{k|(y,\theta)}(u)\, d\theta \\
&= -2\int_{\partial_F \widetilde{X}} d\bar{B}_{0|(\widetilde{F}_k(y),\theta)}(v)\sqrt{\Phi_k}(y,\theta)\, d\sqrt{\Phi_k}_{|(y,\theta)}(u)\, d\theta, \\
|\bar{g}_0\big(K_{y,k} D_y \widetilde{F}_k(u), v\big)| &\leq 2\bar{g}_0\big(H_{y,k}(v), v\big)^{1/2}\Big(\int_{\partial_F \widetilde{X}} \big(d\sqrt{\Phi_k}_{|(y,\theta)}(u)\big)^2 d\theta\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Un calcul immédiat montre que

$$\Big(\int_{\partial_F \widetilde{X}} \big(d\sqrt{\Phi_k}_{|(y,\theta)}(u)\big)^2\, d\theta\Big)^{1/2} \leq \frac{c_k}{2} g(u,u)^{1/2}. \qquad (*)$$

Si u et v sont de norme 1, dans leur espace respectif, alors

$$\begin{aligned}|\bar{g}_0\big(K_{y,k}D_y\widetilde{F}_k(u),\, v\big)| &\le c_k\bar{g}_0\big(H_{y,k}(v),\, v\big)^{1/2}\\ &\le c_k\sqrt{\lambda_n^k(y)}.\end{aligned}$$

Maintenant, si $\widetilde{X}$ est un produit d'espaces symétriques de rang 1, de courbure comprise entre -1 et -4, il est facile de vérifier (voir [7], appendice B) que, au sens des formes quadratiques, pour tout $i = 1, 2, \dots, p$,

$$K_i \ge I_i - H_i \ge (1 - \lambda_n^k(y))I_i.$$

On rappelle que H_i (resp. K_i) désigne la restriction de $H_{y,k}$ (resp. $K_{y,k}$) à $\widetilde{X}_i$. En prenant $v = \frac{D_y\widetilde{F}_k(u)}{\|D_y\widetilde{F}_k(u)\|_{\bar{g}_0}}$ si $D_y\widetilde{F}_k(u) \ne 0$, il vient

$$\|D_y\widetilde{F}_k(u)\|_{\bar{g}_0} \le c_k\frac{\sqrt{\lambda_n^k}(y)}{1-\lambda_n^k(y)} \tag{$**$}$$

(si $D_y\widetilde{F}_k(u) = 0$, l'inégalité est trivialement vraie). Soit α la g-géodésique de y à y' le long de laquelle $\lambda_n^k(\alpha(t)) \le 1 - \frac{1}{n}$, on a, pour tout $u \in T_{\alpha(t)}\widetilde{Y}$, de norme 1

$$\|D_{\alpha(t)}\widetilde{F}_k(u)\|_{\bar{g}_0} \le 2nE_0 = K_1$$

(si k est assez grand pour que $c_k \le 2E_0$). Par le théorème des accroissements finis

$$d_{\bar{g}_0}\big(\widetilde{F}_k(y),\, \widetilde{F}_k(y')\big) \le K_1 d_g(y, y'). \qquad \square$$

Lemme 3.10. *Avec les mêmes notations que précédemment, si P désigne le transport parallèle de $\widetilde{F}_k(y)$ à $\widetilde{F}_k(y')$ le long de la $\bar{g}_0$-géodésique minimisante qui les joint, on a*

$$\|h_{y',k}\circ P - h_{y,k}\|_{\bar{g}_0} \le K_2\big[d_g(y, y') + d_{\bar{g}_0}(\widetilde{F}_k(y), \widetilde{F}_k(y'))\big].$$

Preuve. Nous désignons par $\beta(t)$ l'unique $\bar{g}_0$-géodésique, qui est minimisante, allant de $\widetilde{F}_k(y)$ à $\widetilde{F}_k(y')$ et par Z un champ de vecteurs parallèle, le long de β, de norme 1. Pour simplifier, posons $Z_1 = Z(\widetilde{F}_k(y))$ et $Z_2 = Z(\widetilde{F}_k(y'))$. Alors

$$\begin{aligned}
&h_{y',k}(Z_2, Z_2) - h_{y,k}(Z_1, Z_1)\\
&\quad= \int_{\partial_F\widetilde{X}} \big(d\bar{B}_{0|(\widetilde{F}_k(y'),\theta)}(Z_2)\big)^2\Phi_k(y',\theta)\,d\theta\\
&\qquad - \int_{\partial_F\widetilde{X}} \big(d\bar{B}_{0|(\widetilde{F}_k(y),\theta)}(Z_1)\big)^2\Phi_k(y,\theta)\,d\theta\\
&\quad= \int_{\partial_F\widetilde{X}} \big[\big(d\bar{B}_{0|(\widetilde{F}_k(y'),\theta)}(Z_2)\big)^2 - \big(d\bar{B}_{0|(\widetilde{F}_k(y),\theta)}(Z_1)\big)^2\big]\Phi_k(y',\theta)\,d\theta\\
&\qquad + \int_{\partial_F\widetilde{X}} \big(d\bar{B}_{0|(\widetilde{F}_k(y),\theta)}(Z_1)\big)^2\big(\Phi_k(y',\theta) - \Phi_k(y,\theta)\big)\,d\theta.
\end{aligned}$$

Des formules explicites de $Dd\overline{B}_0$ et du fait que $\|d\overline{B}_{0|(x,\theta)}(\cdot)\|_{\bar{g}_0} \leq 1$, nous tirons l'inégalité

$$\left|\left(d\overline{B}_{0|(\widetilde{F}_k(y'),\theta)}(Z_2)\right)^2 - \left(d\overline{B}_{0|(\widetilde{F}_k(y),\theta)}(Z_1)\right)^2\right| \leq K_2' d_{\bar{g}_0}\left(\widetilde{F}_k(y'), \widetilde{F}_k(y)\right).$$

De même, comme $\Phi_k(y,\cdot)$ est de norme 1 dans $L^1(\partial_F\widetilde{X}, d\theta)$ et en utilisant l'inéquation $(*)$

$$\begin{aligned}\int_{\partial_F\widetilde{X}} &\left(d\overline{B}_{0|(\widetilde{F}_k(y),\theta)}(Z_1)\right)^2\left[\left(\sqrt{\Phi_k(y',\theta)}\right)^2 - \left(\sqrt{\Phi_k(y,\theta)}\right)^2\right] d\theta \\ &\leq \left(\|\sqrt{\Phi_k}(y,\cdot) - \sqrt{\Phi_k}(y',\cdot)\|_{L^2(\partial_F\widetilde{X})}\right)\left(\|\sqrt{\Phi_k}(y,\cdot) + \sqrt{\Phi_k}(y',\cdot)\|_{L^2(\partial_F\widetilde{X})}\right) \\ &\leq c_k d_g(y,y').\end{aligned}$$

Le lemme découle de l'addition de ces inégalités. □

Lemme 3.11. *La suite $H_{y,k}$ converge uniformément par rapport à $y \in \widetilde{Y}$ vers H_0 lorsque k tend vers $+\infty$.*

Preuve. Le comportement de H_k vis-à-vis de l'action de Γ sur $\widetilde{Y}$ montre qu'il suffit de prouver la convergence uniforme sur un domaine fondamental $D \subset \widetilde{Y}$. Le théorème d'Egoroff ([23], p. 77) et le lemme 3.8 attestent que, pour tout $\eta > 0$, il existe un ensemble mesurable K tel que

i) $\mathrm{vol}_g(D \setminus K) < \eta$;

ii) sur K, la suite $y \mapsto H_{y,k}$ converge uniformément vers H_0.

Fixons $\varepsilon > 0$ petit, on peut choisir η tel que $D \setminus K$ ne contienne aucune g-boule de rayon ε, car, en effet, le volume d'une telle boule sur $\widetilde{Y}$ est minoré (la métrique de $\widetilde{Y}$ est périodique). On choisit aussi $N \in \mathbb{N}$ de sorte que

i) pour tout $k \geq N$, $E_0 < c_k < E_0 + \varepsilon$;

ii) pour tout $k \geq N$ et pour tout $y \in K$, $\|H_{y,k} - H_0\|_{\bar{g}_0} < \varepsilon$.

Par ailleurs, si $y \notin K$, $d_g(y,K) < \varepsilon$. Rappelons que les valeurs propres de H_0 sont les nombres $\frac{1}{pn_i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Posons $K_3 = K_2(K_1+1)+1$ et supposons ε assez petit pour que $K_3\varepsilon \leq 1 - \sup_i\left(\frac{1}{pn_i}\right) - \frac{1}{n}$. Nous allons montrer que si $k \geq N$, alors

$$\|H_{y,k} - H_0\|_{\bar{g}_0} < K_3\varepsilon \quad \text{pour tout } y \in D.$$

Si ce n'est pas vrai, il existe $y' \in D$ tel que

$$\|H_{y',k} - H_0\|_{\bar{g}_0} \geq K_3\varepsilon,$$

soit alors $y \in K$ tel que $d_g(y',y) < \varepsilon$. Par continuité de l'application $y \mapsto H_{y,k}$, il existe un premier point y'' sur le segment géodésique $[y, y']$ tel que $\|H_{y'',k} - H_0\| = K_3\varepsilon$. Le choix de K_3 montre que, sur le segment géodésique $[y, y'']$,

$$\lambda_n^k \leq \sup_i\left(\frac{1}{pn_i}\right) + K_3\varepsilon \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

D'après les lemmes 3.9 et 3.10 ceci conduit à

$$\|h_{y,k} \circ P - h_{y'',k}\|_{\bar{g}_0} \leq K_2(K_1+1)\varepsilon$$

et comme $\|H_{y,k} - H_0\|_{\bar{g}_0} < \varepsilon$ ceci conduit à

$$\|H_{y'',k} - H_0\|_{\bar{g}_0} < \big(K_2(K_1+1)+1\big)\varepsilon = K_3\varepsilon$$

qui est une contradiction. □

Remarquons que la convergence uniforme de $H_{y,k}$ vers H_0 implique la convergence uniforme de $K_{y,k}$ vers K_0.

3ème étape : convergence uniforme d'une sous-suite de $\widetilde{F}_k$

Lemme 3.12. *Il existe une sous-suite de la suite $\widetilde{F}_k$ qui converge uniformément vers une application $\widetilde{F}\colon \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ continue et équivariante.*

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq M$

$$\|H_{y,k} - H_0\|_{\bar{g}_0} < \varepsilon \quad \text{pour tout } y \in \widetilde{Y}.$$

D'où

$$H_{y,k} \leq H_0 + \varepsilon I$$

et par une remarque précédente

$$K_{y,k} \geq K_0 - \varepsilon I.$$

Ces deux inégalités étant à comprendre au sens des formes quadratiques. On déduit alors, avec $(**)$, qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que, pour tout $y \in \widetilde{Y}$ et $u \in T_y\widetilde{Y}$,

$$\|D_y\widetilde{F}_k(u)\|_{\bar{g}_0} \leq C$$

(si ε est assez petit).

La suite d'application $\widetilde{F}_k\colon \widetilde{Y} \to \widetilde{X}$ est donc équicontinue.

Supposons qu'il existe y_0 tel que $\widetilde{F}_k(y_0)$ ne reste dans aucun compact. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\widetilde{F}_k(y_0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \theta \in \partial\widetilde{X}$ (le bord géométrique de $\widetilde{X}$). Pour tout $y \in \widetilde{Y}$, alors

$$d_{\bar{g}_0}(\widetilde{F}_k(y), \widetilde{F}_k(y_0)) \leq C\, d_g(y, y_0)$$

de sorte que $\widetilde{F}_k(y) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \theta$ par définition du bord géométrique de $\widetilde{X}$. L'équivariance de $\widetilde{F}_k$ donne

$$\widetilde{F}_k(\gamma y_0) = \rho(\gamma)\widetilde{F}_k(y_0)$$

et donc en passant à la limite en k

$$\theta = \rho(\gamma)\theta$$

c'est-à-dire, la représentation ρ fixe un point de $\partial\widetilde{X}$.

Lemme 3.13. *Si ρ fixe un point θ_0 de $\partial\widetilde{X}$, alors* $\mathrm{vol}(\rho) = 0$.

Preuve. Soit $\overline{B}_0(\cdot, \theta_0)$ la fonction de Busemann définie par le point $\theta_0 \in \partial\widetilde{X}$. Supposons d'abord que θ_0 est dans le bord de Fürstenberg. Posons

$$Z(x) = \nabla \overline{B}_0(x, \theta_0)$$

alors le champ de vecteurs Z est invariant par ρ. En effet, l'égalité

$$\overline{B}_0\big(\alpha(x), \theta_0\big) = \overline{B}_0\big(x, \alpha^{-1}(\theta_0)\big) + \overline{B}_0\big(\alpha(O_0), \theta_0\big)$$

pour $\alpha \in \mathrm{Isom}(\widetilde{X})$, conduit à

$$\overline{B}_0\big(\rho(\gamma)(x), \theta_0\big) = \overline{B}_0(x, \theta_0) + \overline{B}_0\big(\rho(\gamma)(O_0), \theta_0\big)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$; ce qui donne en différenciant

$$Z\big(\rho(\gamma)(x)\big) = \rho(\gamma)(Z(x)).$$

Par ailleurs, pour tout $x \in \widetilde{X}$

$$\mathrm{div}(Z)(x) = \Delta\big(\overline{B}_0(\cdot, \theta)\big) = \sum E_i.$$

Donc la forme différentielle $\omega = \mathrm{div}(Z)\omega_0 = \big(\sum E_i\big)\omega_0$ est invariante par $\rho(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. En conséquence, pour $c > E_0$, $\widetilde{F}_c^*(\omega)$ est invariante par γ, pour tout $\gamma \in \Gamma$. La définition de la divergence conduit à l'égalité

$$\mathrm{div}(Z)\omega_0 = -d\big(i(Z) \cdot \omega_0\big)$$

où $i(Z) \cdot \omega_0$ désigne le produit intérieur de ω_0 par le champ de vecteurs Z. D'où

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_c^*(\omega) &= -\widetilde{F}_c^*\big(d(i(Z) \cdot \omega_0)\big)\\ &= -d\big(\widetilde{F}_c^*(i(Z) \cdot \omega_0)\big)\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{vol}(\rho) = \int_Y \widetilde{F}_c^*(\omega_0) = \frac{1}{\sum E_i}\int_Y \widetilde{F}_c^*(\omega) = 0.$$

Si θ_0 n'est pas dans le bord de Fürstenberg la même preuve peut être faite car

$$\mathrm{div}(Z)(x) = \Delta\big(\overline{B}_0(\cdot, \theta)\big) \neq 0. \qquad \square$$

Puisque nous sommes dans le cas d'égalité, $\mathrm{vol}(\rho) \neq 0$, et la suite $\widetilde{F}_k(y_0)$ reste donc dans un compact de $\widetilde{X}$. On peut alors appliquer le théorème d'Ascoli pour déduire qu'il existe une sous-suite, notée encore $\widetilde{F}_k$, qui converge uniformément sur $D \subset \widetilde{Y}$ vers une application continue $F\colon D \to \widetilde{X}$. L'équivariance de $\widetilde{F}_k$, pour tout k, montre que $\widetilde{F}_k$ converge uniformément sur $\widetilde{Y}$ et que la limite $\widetilde{F}$ est également équivariante. $\square$

4ème étape : $\widetilde{F}$ est une isométrie

Lemme 3.14. *L'application $\widetilde{F}\colon (\widetilde{Y}, \tilde{g}) \to (\widetilde{X}, g_0)$ contracte les distances, c'est-à-dire, pour tout y, y' dans Y'*

$$d_{g_0}\big(\widetilde{F}(y), \widetilde{F}(y')\big) \leq d_g(y, y')$$

et $D\widetilde{F}(y)$ est une isométrie entre $(T_y\widetilde{Y}, g)$ et $(T_{\widetilde{F}(y)}\widetilde{X}, g_0)$ pour presque tout $y \in \widetilde{Y}$.

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir k assez grand pour que, pour tout $y \in \widetilde{Y}$,

$$H_{y,k} \leq H_0 + \varepsilon I,$$
$$K_{y,k} \geq K_0 - \varepsilon I.$$

Alors, l'inégalité 2.5 nous conduit à l'estimation suivante, pour $u \in T_y\widetilde{Y}$ et $v \in T_{\widetilde{F}_k(y)}\widetilde{X}$:

$$\bar{g}_0\big(K_{y,c}(D\widetilde{F}_k(y)(u)), v\big) \leq \big(\bar{g}_0(H_{y,c}(v), v)\big)^{1/2}\big(h'_{y,k}(u, u)\big)^{1/2}.$$

On rappelle que la définition des fonctions $\widetilde{F}_k$ est indépendante des coefficients choisis pour définir la métrique de référence, c'est-à-dire qu'elle donne la même fonction qu'on utilise $\bar{g}_0 = \bigoplus_{i=1}^p g_0^i$ ou bien $g_0 = \bigoplus_{i=1}^p a_i^2 g_0^i$. Nous avons choisi d'utiliser $\bar{g}_0$ pour définir le barycentre sur $\widetilde{X}$, en conséquence les matrices $H_{y,k}$, H_0, $K_{y,k}$ et K_0 sont définies également grâce à la métrique $\bar{g}_0$.

On rappelle également que $\widetilde{F}_{i,k}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, désigne la i-ième composante de $\widetilde{F}_k$ dans la décomposition $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 \times \cdots \times \widetilde{X}_p$ et que H_i (resp. K_i) désigne la restriction de $H_{y,k}$ (resp. $K_{y,k}$) à $T_{\widetilde{F}_{i,k}(y)}\widetilde{X}_i$ (ici on omet volontairement les indices y et k dans H_i et K_i afin d'alléger les notations). Si $v = (v_1, \ldots, v_n)$ est tangent à $\widetilde{X}_i$, c'est-à-dire si $v_j = 0$ pour tout $j \neq i$, alors, grâce à la forme diagonale par blocs de $K_{y,c}$ nous obtenons

$$\bar{g}_0\big(K_i(D\widetilde{F}_{i,k}(y)(u)), v_i\big) \leq \big(\bar{g}_0(H_i v_i, v_i)\big)^{1/2}\big(h'_{y,k}(u, u)\big)^{1/2}$$

(on identifie, par abus de langage v à sa composante v_i).

En utilisant l'inégalité précédente sur $H_{y,k}$,

$$\bar{g}_0^i\big(K_i(D\widetilde{F}_{i,k}(y)(u)), v_i\big) \leq \Big(\frac{1}{pn_i} + \varepsilon\Big)^{1/2}\|v_i\|_{g_0^i}\big(h'_{y,k}(u, u)\big)^{1/2}.$$

En prenant la borne supérieure en v_i de norme 1, nous obtenons,

$$\|K_{y,c}\big(D\widetilde{F}_{i,k}(y)(u)\big)\|_{\bar{g}_0} = \|K_i\big(D\widetilde{F}_{i,k}(y)(u)\big)\|_{g_0^i} \leq \frac{1}{\sqrt{pn_i}}\big(h'_{y,k}(u, u)\big)^{1/2}(1+o(\varepsilon)).$$

Les inégalités précédentes donnent encore,

$$\frac{E_i}{n_i\sqrt{p}}(1+o(\varepsilon))\|D\widetilde{F}_{i,k}(y)(u)\|_{\bar{g}_0} \leq \frac{1}{\sqrt{pn_i}}\big(h'_{y,k}(u,u)\big)^{1/2}(1+o(\varepsilon)),$$

or les coefficients a_i apparaissant dans la définition de la métrique g_0 valent :

$$a_i = \frac{E_i\sqrt{n}}{E_0\sqrt{n_i}}$$

d'où, pour tout $u \in T_y\widetilde{Y}$

$$a_i\|D\widetilde{F}_{i,k}(y)(u)\|_{g_0^i} \leq \frac{\sqrt{n}}{E_0}\big(h'_{y,k}(u,u)\big)^{1/2}(1+o(\varepsilon))$$

et, pour tout $u \in T_y\widetilde{Y}$

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_k^* g_0(u,u) &= \|D\widetilde{F}_k(y)(u)\|_{g_0}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{p} a_i^2\|D\widetilde{F}_{i,k}(y)(u)\|_{g_0^i}^2 \leq \frac{n}{(E_0)^2}h'_{y,k}(u,u)(1+o(\varepsilon)).\end{aligned}$$

On peut alors calculer la trace du tenseur symétrique $\widetilde{F}_k^* g_0$ par rapport à la métrique g sur $\widetilde{Y}$ en $y \in \widetilde{Y}$.

$$\mathrm{trace}_g(\widetilde{F}_k^* g_0) \leq n(1+o(\varepsilon)).$$

En effet, on rappelle que $\mathrm{trace}_g(h'_{y,k}) \leq (c_k)^2 \leq (E_0+\varepsilon)^2$.

Par ailleurs le déterminant de $\widetilde{F}_k^* g_0$ relativement à g, c'est-à-dire $|\operatorname{Jac}\widetilde{F}_k|^2$, tend presque sûrement vers 1 sur $\widetilde{Y}$. Alors si $A_{k,y}$ désigne la matrice de $\widetilde{F}_k^* g_0$ dans une base g-orthonormée, nous avons, pour k assez grand,

$$1-\varepsilon \leq (\text{dét}\, A_{k,y})^{1/n} \leq \frac{1}{n}\,\mathrm{trace}(A_{k,y}) \leq 1+\varepsilon$$

ce qui implique que

$$\|A_{k,y} - (\text{dét}\, A_{k,y})^{1/n} Id\| = o(\varepsilon).$$

En conclusion, $D\widetilde{F}_k$ converge presque sûrement sur $\widetilde{Y}$ vers une isométrie.

Alors, l'application $\widetilde{F}$ est limite uniforme d'une suite d'applications lipschitzienne $\widetilde{F}_k$ dont les différentielles $D\widetilde{F}_k$ sont uniformément bornées et convergent presque sûrement vers une isométrie ; le lemme 7.8 de [7] montre que, dans ce cas, l'application F est 1-lipschitzienne. Nous ne reproduisons pas la preuve de ce fait.

L'application $\widetilde{F}$ est presque partout différentiable par le théorème de Rademacher et, comme elle est 1-lipschitzienne, on a, pour presque tout $y \in \widetilde{Y}$

$$|\operatorname{Jac} \widetilde{F}(y)| \leq 1.$$

Par ailleurs,

$$\operatorname{vol}(\rho) = \int_Y \widetilde{F}^*(\omega_0) = \int_Y \big(\operatorname{Jac} \widetilde{F}(y)\big) dv_g = \operatorname{vol}(Y, g).$$

D'où, pour presque tout $y \in \widetilde{Y}$, $\operatorname{Jac} \widetilde{F}(y) = 1$.

Enfin, pour presque tout $y \in \widetilde{Y}$, pour tout $u \in T_y\widetilde{Y}$, le caractère 1-lipschitzien de $\widetilde{F}$ implique que

$$\|D_y\widetilde{F}(u)\|_{g_0} \leq \|u\|_g.$$

Ceci, combiné au fait que pour presque tout $y \in \widetilde{Y}$, $\operatorname{Jac} \widetilde{F}(y) = 1$, montre que la différentielle de $\widetilde{F}$, $D_y\widetilde{F}$, est presque partout sur $\widetilde{Y}$ une isométrie (entre $T_y\widetilde{Y}$ et $T_{\widetilde{F}(y)}\widetilde{X}$).

Le lemme est prouvé. □

Lemme 3.15. *L'application $\widetilde{F}$ minimise la fonctionnelle $E_p(h) = \frac{1}{\operatorname{vol}(Y)} \int_Y \|Dh\|^p_{g,g_0}$ parmi toutes les applications h de $\widetilde{Y}$ dans $\widetilde{X}$, ρ-équivariantes et lipschitziennes, pour tout $p \geq n$. Ici $\|Dh\|^p_{g,g_0}$ est calculée à l'aide de la métrique g sur $\widetilde{Y}$ et g_0 sur $\widetilde{X}$.*

Preuve. Notons que, par l'équivariance de h, l'intégrand dans l'expression de $E_p(h)$ est invariant par Γ et est donc une quantité définie sur Y. Rappelons que, si $\{e_i\}$ est une base g-orthonormée en $y \in \widetilde{Y}$,

$$\|Dh(y)\|_{g,g_0} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \|Dh(y)(e_i)\|^2_{g_0}\right)^{1/2}.$$

Cette quantité est définie pour presque tout $y \in \widetilde{Y}$. On a donc, pour presque tout $y \in \widetilde{Y}$,

$$|\operatorname{Jac} h(y)|^{p/n} \leq \|Dh(y)\|^p_{g,g_0}$$

pour tout $p \geq 0$. Maintenant si $p \geq n$

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{\operatorname{vol}(\rho)}{\operatorname{vol}(Y)}\right)^{p/n} \\ &= \left(\frac{1}{\operatorname{vol}(Y)} \int_Y \operatorname{Jac} h(y) dv_g(y)\right)^{p/n} \\ &\leq \frac{1}{\operatorname{vol}(Y)} \int |\operatorname{Jac} h(y)|^{p/n} dv_g(y) \leq E_p(h). \end{aligned}$$

Si h est remplacée par $\widetilde{F}$, en utilisant le fait que $D\widetilde{F}(y)$ est une isométrie pour presque tout $y \in \widetilde{Y}$, il vient

$$1 = E_p(\widetilde{F}) \leq E_p(h). \qquad \square$$

Corollaire 3.16. *L'application $\widetilde{F}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Preuve. En fait, nous prouvons que $\widetilde{F}$ est harmonique, la régularité s'en déduit.

De manière heuristique nous pouvons dire que l'équation d'Euler associée à la fonctionnelle E_p, $p \geq n$ s'écrit

$$\operatorname{div}\left(\|D\widetilde{F}\|_{g,g_0}^{p-2} D\widetilde{F}\right) = 0$$

où la divergence est à comprendre comme celle d'une 1-forme sur $\widetilde{Y}$ à valeurs dans $T\widetilde{X}$ (voir [21], page 6). Mais $\widetilde{F}$ a une différentielle qui est presque partout une isométrie, de sorte que $\|D\widetilde{F}\|_{g,g_0} = 1$ presque partout sur $\widetilde{Y}$, et l'équation devient

$$\operatorname{div}(D\widetilde{F}) = 0$$

c'est-à-dire $\widetilde{F}$ est harmonique.

Plus précisément, $D\widetilde{F}$ est interprétée comme une 1-forme sur $\widetilde{Y}$ à valeurs dans le fibré $\widetilde{F}^{-1}(T\widetilde{X})$, c'est-à-dire un élément de $C^0_\rho\big(T^*(\widetilde{Y}) \otimes \widetilde{F}^{-1}(T\widetilde{X})\big)$, qui est de plus ρ-équivariante (voir [21], page 8) ; soit alors Z un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ le long de $\widetilde{F}$, qui satisfait également la relation de ρ-équivariance adéquate, c'est-à-dire qui est un élément de $\mathcal{C}^\infty_\rho\big(\widetilde{Y}, \widetilde{F}^{-1}(T\widetilde{X})\big)$; il existe une variation à un paramètre de $\widetilde{F}$, notée $\widetilde{F}_t$, ρ-équivariante, telle que

$$\frac{d}{dt}\widetilde{F}_t(y)_{|t=0} = Z(y) \quad \text{pour tout } y \in \widetilde{Y}$$

(voir [22], page 397).

Comme $\widetilde{F}$ minimise E_p, pour $p \geq n$, on a

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} E_p(\widetilde{F}_t) = 0$$

c'est-à-dire,

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \frac{1}{\operatorname{vol}(Y)} \int_Y \|D\widetilde{F}_t(y)\|_{g,g_0}^p dv_g(y) = 0$$

mais

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\operatorname{vol}(Y)} \int_Y \|D\widetilde{F}_t(y)\|_{g,g_0}^p dv_g(y)\Big) \\
&\quad = \frac{1}{\operatorname{vol}(Y)} \int_Y \frac{d}{dt}\big(\|D\widetilde{F}_t(y)\|_{g,g_0}^p\big) dv_g(y) \\
&\quad = \frac{1}{\operatorname{vol}(Y)} \int_Y \frac{p}{2} \|D\widetilde{F}_t(y)\|_{g,g_0}^{p-2} \frac{d}{dt}\big(\|D\widetilde{F}_t(y)\|_{g,g_0}^2\big) dv_g(y).
\end{aligned}$$

En $t = 0$, comme $\|D\widetilde{F}(y)\|_{g,g_0} = 1$ pour presque tout $y \in \widetilde{Y}$, on a

$$0 = \frac{p/2}{\mathrm{vol}(Y)} \int_Y \frac{d}{dt}_{|t=0} \big(\|D\widetilde{F}_t(y)\|^2_{g,g_0}\big) dv_g(y)$$

c'est-à-dire, $\widetilde{F}$ est un point critique de la fonctionnelle E_2. L'application $\widetilde{F}$ est donc faiblement harmonique (au sens des distributions, voir [22], page 397). D'après les théorèmes de régularité classiques (voir [22], 3.10, page 397), $\widetilde{F}$ étant continue, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

Remarque. Nous avons montré que $\widetilde{F}$ est un point critique de E_2, mais en fait elle minimise cette fonctionnelle car l'espace étant de courbure négative ou nulle la fonctionnelle E_2 est convexe.

Nous pouvons alors terminer la preuve du théorème 3.2 ii). L'application $\widetilde{F}$ a une différentielle $D\widetilde{F}(y)$ qui est continue en y et est donc une isométrie pour tout $y \in \widetilde{Y}$; la variété $\widetilde{Y}$ étant connexe et complète, $\widetilde{X}$ étant connexe et simplement connexe nous déduisons de cela que $\widetilde{F}$ est une isométrie surjective de $\widetilde{Y}$ sur $\widetilde{X}$ (c'est en effet un exercice classique, voir [25], 2.108, exercice a), page 97). En particulier $\rho(\Gamma)$ est un sous-groupe discret cocompact de $\mathrm{Isom}(\widetilde{X})$ agissant sans points fixes et la représentation ρ est injective. □

Une conséquence immédiate est le théorème suivant. Supposons que $\rho(\Gamma) = \Gamma_0$ est un sous-groupe discret cocompact du groupe d'isométries de $\widetilde{X}$ qui agit sans point fixe, le quotient $X = \widetilde{X}/\Gamma_0$ est une variété compacte.

Théorème 3.17. *Soit (Y, g) une variété riemannienne compacte de même dimension que X et $f : Y \to X$ une application continue, alors*

i) $(\mathrm{Ent}(Y, g))^n \,\mathrm{vol}(Y, g) \geq |\deg f|\, \mathrm{Ent}(X, g_0)^n \,\mathrm{vol}(X, g_0)$;

ii) *l'égalité, dans l'inégalité ci-dessus, a lieu si, et seulement si, f est homotope à un revêtement riemannien.*

La preuve est immédiate ; en effet, dans le cas considéré on a

$$\mathrm{vol}(\rho) = |\deg f|\, \mathrm{vol}(X, g_0).$$

Remarques. Le lemme 3.13 peut s'étendre et donne lieu à la proposition suivante :

Proposition 3.18. *S'il existe une mesure de Radon finie et non nulle μ, définie sur $\partial\widetilde{X}$, invariante par $\rho(\Gamma)$, alors* $\mathrm{vol}(\rho) = 0$. *Par ailleurs, si* $\mathrm{vol}(\rho) \neq 0$ *alors $\rho(\Gamma)$ est réductif et Zariski dense.*

On rappelle que $\rho(\Gamma)$ est dit réductif si son adhérence de Zariski l'est, c'est-à-dire si cette dernière a un radical unipotent trivial.

Preuve. La première partie se prouve comme le lemme 3.13 en posant

$$Z(x) = \int_{\partial \widetilde{X}} \nabla B(x, \theta) d\mu(\theta).$$

La seconde partie résulte de résultats classiques ; en effet, un sous-groupe du groupe d'isométries de $\widetilde{X}$ est réductif s'il ne fixe pas un point sur le bord de $\widetilde{X}$, ce qui est le cas si $\mathrm{vol}(\rho) \neq 0$. De plus, un sous-groupe réductif fixe une sous-variété totalement géodésique qui est un sous-espace strict si le groupe n'est pas Zariski dense. La non-nullité de $\mathrm{vol}(\rho)$ entraîne que ce sous-espace est tout $\widetilde{X}$, d'où le résultat. □

Notons que dans [32], la réductivité de $\rho(\Gamma)$ est prouvée être une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une application harmonique ρ-équivariante.

Enfin, le théorème 3.2 conduit au corollaire suivant. Rappelons la définition du volume minimal d'une variété,

$$\mathrm{minvol}(Y) = \inf\{\mathrm{vol}(Y, g)\,;\ \ g \text{ métrique sur } Y \text{ telle que } |K_g| \leq 1\}$$

Corollaire 3.19. *Si ρ est une représentation de $\Gamma = \pi_1(Y)$ dans* $\mathrm{Isom}(\widetilde{X}, g_0)$, *où Y est une variété compacte, alors*

$$\mathrm{minvol}(Y) \geq \left(\frac{\mathrm{Ent}(\widetilde{X}, g_0)}{n-1}\right)^n \mathrm{vol}(\rho).$$

Preuve. On rappelle que si la courbure sectionnelle K_g de la métrique g vérifie $K_g \geq -1$ alors on a $\mathrm{Ent}(Y, g) \leq n - 1$ (voir [7]). □

Remarques. i) En particulier, s'il existe une représentation ρ telle que $\mathrm{vol}(\rho) \neq 0$ alors $\mathrm{minvol}(Y) > 0$.

ii) On pourrait remplacer le volume minimal $\mathrm{minvol}(Y)$ par

$$\mathrm{minvol}_{\mathrm{Ricci}}(Y) = \inf\left\{\mathrm{vol}(Y, g)\,;\ \ \mathrm{Ricci}_g \geq -(n-1)g\right\}.$$

4. Exemples

Dans ce paragraphe nous nous intéressons au cas où $(\widetilde{Y}, \tilde{g})$ est elle-même un produit fini d'espaces symétriques simplement connexe de courbure strictement négative. Comme précédemment un tel espace sera noté $(\widetilde{X}, \tilde{g}_0)$, où g_0 est la métrique définie au paragraphe 2 et qui minimise l'entropie. De même, Γ désigne un réseau cocompact et sans torsion de $\mathrm{Isom}(\widetilde{X}, \tilde{g}_0)$ préservant l'orientation, et ρ est un morphisme

$$\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Isom}(\widetilde{X}, \tilde{g}_0).$$

Des exemples de telles représentations sont rares et le but de ce paragraphe est, en particulier, de rappeler quelques unes des constructions classiques.

Dans cette situation, le théorème 3.2 s'écrit

$$\mathrm{vol}(\rho) \leq \mathrm{vol}(X, g_0)$$

où $X = \widetilde{X}/\Gamma$. L'égalité, dans cette inégalité, n'a lieu que si et seulement si l'espace $(\widetilde{X}/\rho(\Gamma), g_0)$ est une variété isométrique à (X, g_0), c'est-à-dire si $\rho(\Gamma)$ est un réseau cocompact de $\mathrm{Isom}(\widetilde{X}, \tilde{g}_0)$. Nous répondons, dans ce paragraphe à la question :

Question 4.1. Existe-t-il des représentations, comme ci-dessus, telles que l' inégalité $0 < \mathrm{vol}(\rho) < \mathrm{vol}(X, g_0)$ est vraie ?

Rappelons qu'un réseau Γ dans un groupe de Lie G, semi-simple connexe sans facteur compact est dit réductible si G possède des sous-groupes normaux H et H' tels que $G = H.H'$, $H \cap H'$ est discret et $\Gamma/(\Gamma \cap H).(\Gamma \cap H')$ est fini (voir [40], page 86). Γ est dit irréductible s'il n'est pas réductible

Alors, lorsque Γ est irréductible, le théorème de super-rigidité de Margulis ([34], chapitre VII) fournit une réponse négative complète à la question ci-dessus.

Proposition 4.2. *Avec les notations ci-dessus, si Γ est irréductible et* $\mathrm{vol}(\rho) \neq 0$ *alors $\rho(\Gamma)$ est un réseau cocompact de* $\mathrm{Isom}(\widetilde{X}, \tilde{g}_0)$ *et donc* $\mathrm{vol}(\rho) = \mathrm{vol}(X, g_0)$.

Preuve. On se propose d'appliquer le théorème IX.6.16 de [34], p. 332. On note $G = \mathrm{Isom}(\widetilde{X}, \tilde{g}_0)$, c'est un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$ et semi-simple. Pour utiliser le résultat IX.6.16 de [34] il faut travailler avec des groupes de Lie connexes, or Γ est un sous-groupe de G_+, le sous-groupe de G constitué des isométries préservant l'orientation et G_+ n'est pas nécessairement connexe. En effet, si $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, où $\gamma_i \in \mathrm{Isom}(\widetilde{X}_i, \tilde{g}_0^i)$, et si un nombre pair de γ_i renverse l'orientation alors $\gamma \in G_+$, néanmoins γ ne peut pas être connecté à l'identité.

On rappelle que G à un nombre fini de composantes connexes car c'est un groupe algébrique. Soit G^0 la composante Zariski connexe de l'élément neutre et $\Gamma^0 = G^0 \cap \Gamma$ et $\Gamma^1 = \rho^{-1}\big(\rho(\Gamma^0) \cap G^0\big)$. Pour alléger les notations nous avons noté ρ la représentation restreinte à Γ^0.

Il est aisé de vérifier que $G^0 = \mathrm{Isom}_+(\widetilde{X}_1, \tilde{g}_0^1) \times \cdots \times \mathrm{Isom}_+(\widetilde{X}_p, \tilde{g}_0^p)$ où Isom_+ désigne le groupe (connexe) d'isométries directes.

Les deux lemmes qui suivent n'utilisent pas l'irréductibilité de Γ. Cette hypothèse ne sera utilisée que pour appliquer le théorème de super-rigidité.

Lemme 4.3. *Le groupe Γ^0 est un réseau cocompact de G^0 ainsi que de G et le groupe Γ^1 est d'indice fini dans Γ^0.*

Preuve. L'application naturelle $\Gamma/\Gamma^0 \hookrightarrow G/G^0$ est injective, Γ^0 est donc d'indice fini dans Γ et est un réseau cocompact de G. Par ailleurs, G^0/Γ^0 est une composante connexe de G/Γ^0, donc est compacte. L'application $\Gamma^0/\Gamma^1 \to G/G^0$ induite par ρ est injective, d'où le résultat. □

Le groupe Γ^1 est donc un réseau cocompact de G (et de G^0) qui de plus, comme Γ, est irréductible. La restriction de ρ à Γ^1 est un homomorphisme

$$\rho : \Gamma^1 \to G^0$$

à valeurs dans le groupe semi-simple, connexe G^0.

Lemme 4.4. *Les groupes G et G^0 ont un centre trivial.*

Preuve. Ceci découle du fait que le groupe d'isométries d'un espace symétrique de rang 1 a un centre trivial. □

Dans la terminologie de [34], le groupe G^0 est adjoint (il n'a pas de centre et est défini sur $\mathbb{R}$, voir [34], p. 13). Notons que, d'après la proposition 3.18, le groupe $\rho(\Gamma^1)$ est Zariski-dense dans G^0.

Nous sommes maintenant en situation pour appliquer le théorème de super-rigidité IX.6.16 c) de [34], p. 332 (le groupe G^0, qui est le groupe de départ et d'arrivée n'a aucune composante simple compacte, c'est-à-dire n'a pas de facteur $\mathbb{R}$-anisotrope). La représentation ρ se prolonge en un (unique) homomorphisme continu

$$\tilde{\rho} : G^0 \to G^0$$

qui est donc analytique (car G^0 est algébrique). Comme $\tilde{\rho}(G^0)$ est un sous-groupe algébrique qui contient $\tilde{\rho}(\Gamma^1)$, qui est Zariski dense dans G^0, on en déduit que $\tilde{\rho}(G^0) = G^0$. En particulier $\tilde{\rho}$ est un difféomorphisme et $\tilde{\rho}(\Gamma^1)$ est un groupe discret et cocompact. On en conclut que les variétés localement symétriques $\widetilde{X}/\Gamma^1$ et $\widetilde{X}/\tilde{\rho}(\Gamma^1)$ sont isométriques et donc que

$$\mathrm{vol}(\rho_{|\Gamma^1}) = \mathrm{vol}(\widetilde{X}/\Gamma^1).$$

Comme Γ^1 est d'indice fini dans Γ, on en déduit que

$$\mathrm{vol}(\rho) = \mathrm{vol}(X, g_0).$$ □

Nous allons maintenant étudier les cas où le réseau Γ est réductible. On rappelle qu'un réseau Γ^1 de G^0 qui est réductible vérifie les propriétés suivantes (voir [40], p. 86, 5.22) : il existe une famille finie de sous-groupes normaux et connexes de G^0, $H_1, \ldots, H_k$, qui commutent deux-à-deux, telle que :

i) $H_i \cap \prod_{j\neq i} H_j$ est discret pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.
ii) $G^0 = \prod_{i=1}^k H_i$.
iii) $\Gamma_i^1 = H_i \cap \Gamma^1$ est un réseau irréductible de H_i.
iv) $\prod_{i=1}^k \Gamma_i^1$ est un sous-groupe normal d'indice fini de Γ^1.

Comme précédemment nous pouvons travailler à un sous-groupe d'indice fini près et donc supposer que $\prod_{i=1}^k \Gamma_i^1 = \Gamma^1$. De même, chaque H_i doit être un produit de facteurs simples composant G^0, c'est-à-dire

$$H_i = \prod_{s=p_i}^{p_i+r_i} G_s.$$

Dans la suite, par groupe super-rigide nous entendons un groupe auquel nous pouvons appliquer le théorème de super-rigidité, c'est-à-dire, dans notre situation, soit H_i est de rang supérieur où égal à 2 ($r_i \geq 1$) ou bien H_i est le groupe d'isométries directes d'un espace hyperbolique quaternionien ou du plan hyperbolique de Cayley.

Proposition 4.5. *Avec les notations ci-dessus, si Γ est réductible et* $\mathrm{vol}(\rho) \neq 0$ *et si, pour tout i, H_i est super-rigide alors $\rho(\Gamma)$ est un réseau cocompact et donc* $\mathrm{vol}(\rho) = \mathrm{vol}(X, g_0)$.

Preuve. Comme précédemment nous travaillons avec le sous-groupe Γ^1. Nous définissons $\rho_i = \rho_{|\Gamma_i^1}$, pour $i = 1, \dots, k$; ici nous commettons un abus de langage et identifions Γ_i^1 et $\{e\} \times \cdots \times \{e\} \times \Gamma_i^1 \times \{e\} \times \cdots \times \{e\}$. Définissons les groupes $K_i = \overline{\rho_i(\Gamma_i^1)}$, l'adhérence de Zariski de $\rho_i(\Gamma_i^1)$; ce sont des sous-groupes algébriques de G^0 et le théorème 6.15 i), a) de [34], p. 332 affirme que, si rang $H_i \geq 2$, K_i est un groupe semi-simple. Insistons sur le fait que H_i est considéré comme un sous-groupe du groupe de départ de la représentation ρ et K_i comme un sous-groupe du groupe d'arrivée. Le même résultat pour le cas où H_i est le groupe d'isométries (directes) de l'espace hyperbolique quaternionien ou du plan hyperbolique de Cayley est prouvé dans [46]. Dans tous les cas, donc, K_i est un groupe semi-simple.

Pour tout i, K_i est normalisé par $\rho(\Gamma^1)$. Comme $\rho(\Gamma^1)$ est Zariski dense, K_i est distingué dans G^0, donc semi-simple et sans facteur compact. De plus, le produit $\pi_{i=1}^k K_i$ contient $\rho(\Gamma^1)$ et coïncide donc avec G^0.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de super-rigidité de [34], (6.16 c), p. 332) pour les composantes H_i de rang ≥ 2 et celui de [16] pour les autres et affirmer que les représentations ρ_i se prolongent en des morphismes continus

$$\varphi_i : H_i \to K_i.$$

On construit alors un prolongement de ρ en

$$\begin{aligned} \varphi\colon G^0 &\longrightarrow \prod_{i=1}^{k} K_i = G^0, \\ (\gamma_1, \dots, \gamma_k) &\longmapsto \big(\varphi_1(\gamma_1), \dots, \varphi_k(\gamma_k)\big). \end{aligned}$$

Les morphismes φ_i commutent et φ est bien défini et est un morphisme continu. On termine donc la preuve de la proposition 4.5 par les mêmes arguments que ceux de la preuve de la proposition 4.2. □

Nous nous intéressons maintenant au cas où G^0 possède des composantes simples non super-rigides. Supposons donc que $\Gamma^1 = \Gamma_1^1 \times \Gamma_2^1$ où Γ_1^1 est un réseau cocompact d'un groupe H_1 extension finie d'un produit de groupes super-rigides et Γ_2^1 est un réseau cocompact de H_2 produit de copies de $\mathrm{PO}(k, 1)$ et $\mathrm{PU}(k', 1)$. Les arguments qui précèdent s'appliquent pour montrer que

i) $\rho(\Gamma)$ est Zariski dense dans G^0 si $\mathrm{vol}(\rho) \neq 0$.

ii) Soit $K_i, i = 1, 2$, l'adhérence de Zariski de $\rho_i(\Gamma_i^1)$. La densité de $\rho(\Gamma)$ implique la densité (pour la topologie de Zariski) de K_1K_2 ; les deux groupes commutent. En décomposant Γ_1^1 en produits de réseaux cocompacts irréductibles on voit que K_1 est semi-simple sans facteurs compacts. Si $G^0 = \prod_{i=1}^{p} G_k$, où les G_k sont des groupes d'isométries directes d'espaces symétriques de rang 1 et de type non compact, alors $K_1 = \prod_{k=1}^{q} G_k$ (par exemple) ; en effet, K_1 est un sous-groupe normal de G^0. Le groupe K_2 est donc inclus dans $\prod_{q+1}^{p} G_k$ et comme K_1K_2 est Zariski dense, $K_2 = \prod_{q+1}^{p} G_k$ (en particulier il est semi-simple). On peut choisir une application équivariante f_i de $H_i \to K_i$ et un calcul immédiat montre que

$$\mathrm{vol}(\rho) = \mathrm{vol}(\rho_1)\,\mathrm{vol}(\rho_2),$$

de sorte que $\mathrm{vol}(\rho_1) \neq 0$. Le théorème de super-rigidité (appliqué comme précédemment aux composantes irréductibles de Γ_1^1) permet d'étendre ρ_1 en un morphisme continu

$$\varphi_1 : H_1 \to K_1$$

et la non nullité de $\mathrm{vol}(\rho_1)$ montre que φ_1 est un isomorphisme et donc montre que $\rho(\Gamma_1^1)$ est isomorphe à Γ_1^1 ce qui conduit à

$$\mathrm{vol}(\rho_1) = \mathrm{vol}(H_1/\Gamma_1^1).$$

Le groupe K_2 contient les composantes non super-rigides de G^0, de même que H_2, ils sont donc isomorphes. C'est la seule composante non triviale de ρ.

Nous donnons maintenant un exemple de représentation du groupe fondamental d'une variété hyperbolique réelle, de volume non nul.

Exemple : produit amalgamé. Soit X une variété hyperbolique compacte de dimension $n \geq 3$. Supposons qu'il existe dans X une hypersurface compacte plongée totalement géodésique notée Σ et incompressible, c'est-à-dire telle que l'application induite : $\pi_1(\Sigma) \to \pi_1(X)$ soit une injection. Nous supposons de plus que cette hypersurface sépare X en deux composantes connexes X_A et X_B de groupe fondamental respectif A et B. En posant $C = \pi_1(\Sigma)$, le théorème de Van Kampen montre que

$$\pi_1(X) = A *_C B$$

produit amalgamé de A et B sur C. Les groupes $\pi_1(X)$, A, B et C sont des sous-groupes de $\mathrm{PO}(n, 1)$ et agissent donc sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$. Choisissons un relevé $\widetilde{\Sigma}$ de Σ dans $\mathbb{H}^n$; $\widetilde{\Sigma}$ est une hypersurface totalement géodésique. On identifie C au sous-groupe de $\pi_1(X)$ qui fixe $\widetilde{\Sigma}$. Soit s la symétrie par rapport à $\widetilde{\Sigma}$, on définit

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(X) &\longrightarrow \mathrm{PO}(n, 1), \\ a \in A &\longmapsto a, \\ b \in B &\longmapsto sbs^{-1}. \end{aligned}$$

Lemme 4.6. *L'application ρ définit une représentation de $\pi_1(X)$ dans* $\mathrm{PO}(n, 1)$.

Preuve. Le groupe $\pi_1(X)$ est le quotient du produit libre $A * B$ par les relations qui consistent à identifier un élément de C dans A avec le même élément dans B. Comme ρ est un morphisme en restriction à A et à B respectivement, il suffit de vérifier la compatibilité avec les relations. Or, si $c \in C$

$$scs^{-1} = c$$

d'où le résultat. □

Afin de calculer le volume de cette représentation il faut trouver une application lipschitzienne $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^m$, ρ-équivariante.

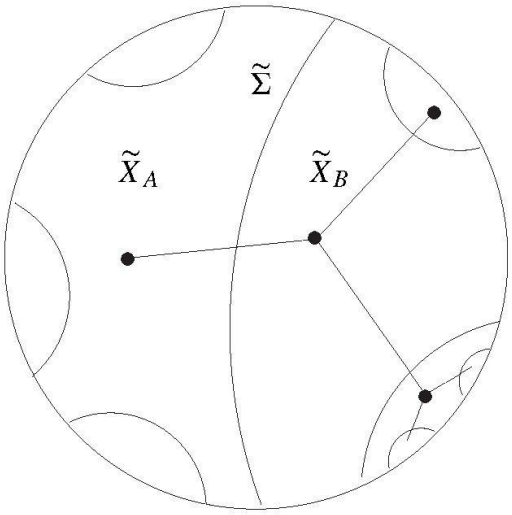
Proposition 4.7. *Avec les notations ci-dessus on a,*

$$\mathrm{vol}(\rho) = \mathrm{vol}(X_A) - \mathrm{vol}(X_B).$$

Preuve. Nous allons décrire $\tilde{f}$ de manière précise et le calcul du volume s'ensuivra. Le fait que $\pi_1(X)$ soit un produit amalgamé est équivalent ([44], p. 48) à l'existence d'un arbre T, sur lequel $\pi_1(X)$ opère (sans inversion) en sorte que le quotient soit un segment (deux sommets joints par une arête). Les sous-groupes A, B et C sont alors les stabilisateurs respectifs des deux sommets et de l'arête de l'arbre quotient. Nous allons donner une description géométrique de cet arbre T. Nous avons choisi un relevé $\widetilde{\Sigma}$ de l'hypersurface compacte Σ plongée dans X ; Σ étant une sous-variété

plongée, sans auto-intersection, les translatés $\gamma\widetilde{\Sigma}$ de $\widetilde{\Sigma}$ par les éléments $\gamma \in \pi_1(X)$ sont deux à deux disjoints ; ils séparent donc $\mathbb{H}^n$ en une infinité de composantes connexes. Les deux composantes connexes dont l'adhérence contient $\widetilde{\Sigma}$ sont des revêtements universels de X_A et X_B respectivement, que nous noterons $\widetilde{X}_A$ et $\widetilde{X}_B$. Les autres composantes connexes sont les translatés par les éléments de $\pi_1(X)$ de $\widetilde{X}_A$ et $\widetilde{X}_B$. Les sous-groupes A et B préservent $\widetilde{X}_A$ et $\widetilde{X}_B$ respectivement (après un choix convenable d'un point base et d'un de ses relevés).

Maintenant, choisissons un point $x_a \in \widetilde{X}_A$ et un point $x_b \in \widetilde{X}_B$. Nous allons définir un arbre de la façon suivante : les sommets sont les $\gamma(x_a)$ et $\gamma(x_b)$, où γ parcourt $\pi_1(X)$; on joint deux sommets $\gamma(x_a)$ et $\gamma'(x_b)$ par une arête si, et seulement si, les composantes connexes correspondantes $\gamma\widetilde{X}_A$ et $\gamma'\widetilde{X}_B$ sont telles que $\overline{\gamma\widetilde{X}_A} \cap \overline{\gamma'\widetilde{X}_B} \neq \emptyset$. On vérifie aisément qu'il s'agit d'un arbre car chaque arête correspond à une hypersurface $\gamma(\widetilde{\Sigma})$ qui sépare $\widetilde{X}$ en deux composantes connexes.



Soit alors $x \in \widetilde{X} \setminus \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma\widetilde{\Sigma}$, il appartient à une composante connexe du complémentaire de $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma\widetilde{\Sigma}$ qui correspond à un sommet de l'arbre précédent. Dans cet arbre il existe un unique chemin joignant la composante $\widetilde{X}_A$ à celle de x ; ce chemin est une succession d'arêtes $e_1, e_2, \ldots, e_k$ prises dans l'ordre, de la composante $\widetilde{X}_A$ à celle de x. Chacune de ces arêtes correspond à une image de $\widetilde{\Sigma}$ et nous noterons s_{e_i} la symétrie orthogonale hyperbolique par rapport à cette hypersurface totalement géodésique.

Definition 4.8. On pose $\tilde{f}(x) = s_{e_1} \circ s_{e_2} \circ \cdots \circ s_{e_k}(x)$.

L'application $\tilde{f}$ est bien définie. Elle est $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux et continue ; en effet, la seule ambiguïté dans la formule ci-dessus est lorsque x est sur l'hypersurface définie par e_k, mais dans ce cas $s_{e_k}(x) = x$.

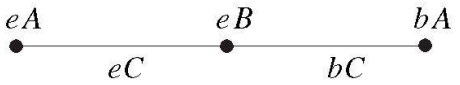
Lemme 4.9. *L'application $\tilde{f}$ est ρ-équivariante.*

Preuve. Il suffit de vérifier l'équivariance pour les éléments de A et ceux de B qui engendrent le groupe fondamental de X.

a) Si $a \in A$, le chemin dans l'arbre joignant la composante $\widetilde{X}_A$ à celle de ax est constitué des arêtes $ae_1, \ldots, ae_k$; en effet, puisque $a \in A$, $a\widetilde{X}_A = \widetilde{X}_A$ et l'arête ae_1 a son origine dans $\widetilde{X}_A$. D'où

$$\tilde{f}(ax) = s_{ae_1} \ldots s_{ae_k}(ax) = as_{e_1}a^{-1} \ldots as_{e_k}a^{-1}(ax) = a\tilde{f}(x) = \rho(a)\tilde{f}(x).$$

b) Si $b \in B$, le chemin joignant la composante $\widetilde{X}_A$ à celle de bx est constitué du chemin dans l'arbre joignant $\widetilde{X}_A$ à $b\widetilde{X}_A$ suivi de l'image par b du chemin précédent. Rappelons que les sommets de l'arbre sont les éléments de Γ/A et Γ/B et les arêtes sont les éléments de Γ/C (voir [44]). Par exemple, la composante connexe $\widetilde{X}_A$ correspond à eA (classe de l'élément neutre e), celle de $\widetilde{X}_B$ à eB ; elles sont



reliées par l'arête eC. Par ailleurs $b\widetilde{X}_A$ correspond à la classe bA reliée à eB par l'arête bC. En conclusion, nous avons

$$\tilde{f}(bx) = s \circ s_{be} \circ (bs_{e_1} \ldots s_{e_k}b^{-1})(bx)$$

où e désigne par abus de langage l'arête eC et $s_e = s$. D'où

$$\tilde{f}(bx) = (sbsb^{-1}) \circ (bs_{e_1} \ldots s_{e_k}b^{-1})(bx) = \rho(b)\tilde{f}(x). \qquad \square$$

Fin de la preuve de la proposition. La fin de la preuve est évidente ; en effet $\tilde{f}$ renverse l'orientation sur $\widetilde{X}_B$ et est l'identité sur $\widetilde{X}_A$, il suffit donc de choisir un domaine fondamental dans la réunion $\widetilde{X}_A \cup \widetilde{X}_B$ pour lequel Σ se relève sur $\widetilde{\Sigma}$. $\square$

Pour être complet, il faut construire des variétés X hyperboliques admettant une hypersurface connexe séparante qui sépare la variété en deux parties de volume distinct. Cette construction nous a été suggérée par N. Bergeron. Soit M_1 une variété compacte de dimension 3, hyperbolique à bord totalement géodésique qui est une surface compacte connexe notée Σ. De tels exemples existent (voir [38], [12], th. 4.3 et [6]). Considérons le double M obtenu par recollement de deux copies de M_1 le long de Σ. La variété compacte M sans bord est hyperbolique car Σ est totalement géodésique. Le théorème 2 de [5] montre que l'on peut construire un revêtement fini $\widehat{M}$ de M tel que Σ se relève isométriquement à $\widehat{M}$ en une sous-variété totalement géodésique $\widehat{\Sigma}$ non séparante. On découpe alors $\widehat{M}$ le long de $\widehat{\Sigma}$ pour obtenir une variété à bord dont les deux composantes du bord, notée $\widehat{\Sigma}_1$, $\widehat{\Sigma}_2$, sont isométriques à

$\widehat{\Sigma} \simeq \Sigma$ et on recolle à chacune de ces composantes une copie de M_1. Alors, $\widehat{\Sigma}_1$ (et $\widehat{\Sigma}_2$) découpe la nouvelle variété hyperbolique en deux composantes l'une de volume égal à $\mathrm{vol}(M_1)$ et l'autre de volume égal à $\mathrm{vol}(\widehat{M}) + \mathrm{vol}(M_1) > \mathrm{vol}(M_1)$.

Il serait intéressant de disposer de tels exemples en dimension $n \geq 4$. Remarquons, par ailleurs, que l'ensemble des valeurs de $\mathrm{vol}(\rho)$ ainsi obtenu est discret (pour une variété donnée) ; une explication précise à ce phénomène est fournie par le chapitre suivant.

5. Volume et déformations

Nous avons déjà remarqué que, lorsque la dimension de X est paire, le volume d'une représentation ($\widetilde{X}$ est supposée symétrique) est le nombre d'Euler du fibré plat correspondant. En particulier, ce nombre est constant le long des déformations continues de représentations. Nous allons prouver un résultat analogue dans le cas où la dimension de X est impaire. De telles déformations existent en dimension 3 ([4]) et nous en donnons des exemples. La constance du volume est prouvée en dimension 3 par S. Reznikov [42] ; nous donnons ici une preuve, valable en toute dimension, qui repose sur la formule de Schläfli. Dans ce qui suit M désigne une variété riemannienne fermée et orientée de dimension n et $\widetilde{X}$ l'espace hyperbolique réel simplement connexe de dimension n.

Théorème 5.1. *Soit M une variété différentielle fermée et orientée et $\rho_t : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(\widetilde{X})$ une famille de représentations qui dépend de manière C^1 du paramètre $t \in \mathbb{R}$, alors le volume $\mathrm{vol}(\rho_t)$ est constant.*

Ce résultat peut se déduire des travaux de A. Goncharov (voir [27], Theorem 2.17). Nous en présentons ici une preuve plus simple qui repose sur un lemme technique dont le but est de construire une application équivariante affine par morceaux particulière. Par application affine nous entendons une application affine entre des simplexes munis de leur coordonnées barycentriques.

Lemme 5.2. *Sous les hypothèses du théorème 5.1, il existe une triangulation $\mathcal{T}$ de $\widetilde{M}$ et une application continue et affine par morceaux $\tilde{f}_0 : \widetilde{M} \to \widetilde{X}$ qui est ρ_0-équivariante et non dégénérée au sens où l'image par $\tilde{f}_0$ d'un simplexe de la triangulation $\mathcal{T}$ est un simplexe géodésique de $\widetilde{X}$ non dégénéré.*

Preuve. L'idée est de construire une triangulation $\mathcal{T}_{\widetilde{M}}$ de $\widetilde{M}$, π_1-équivariante, et de définir $\tilde{f}_0$ de façon affine sur chaque simplexe.

Un théorème classique affirme que toute variété lisse compacte M est homéomorphe à un complexe simplicial K ; plus précisément K est un espace triangulé

muni d'une métrique euclidienne par morceaux (que l'on peut réaliser dans $\mathbb{R}^n$). Cet homéomorphisme peut, de plus, être choisi Lipschitzien. Le volume de toute représentation de $\pi_1(M) = \pi_1(K)$ peut donc se calculer en intégrant sur M ou bien sur K. Dans la suite nous noterons également M ce complexe euclidien par morceaux et toute triangulation sera une subdivision de la décomposition de K en simplexes.

Choisissons alors une triangulation suffisamment fine de M et appelons $\mathcal{T}_{\widetilde{M}}$ la triangulation invariante par $\pi_1(M)$ sur $\widetilde{M}$ qui s'en déduit par image réciproque. Soit D un domaine fondamental (de Dirichlet) dans $\widetilde{M}$ pour l'action de $\pi_1(M)$. Quitte à modifier un peu $\mathcal{T}_{\widetilde{M}}$ ou bien D on peut supposer qu'aucun sommet de la triangulation n'est sur ∂D.

Notons $(m_1, \ldots, m_N)$ la liste des sommets de $\mathcal{T}_{\widetilde{M}}$ qui sont dans l'intérieur de D, N est alors le cardinal des sommets de la triangulation de départ sur M. Choisissons maintenant N points dans $\widetilde{X}$, notés $(y_1, \ldots, y_N)$ de sorte que si $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_{k+1}})$ est un k-simplexe de $\mathcal{T}$ alors le simplexe géodésique de $\widetilde{X}$ de sommets $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_{k+1}})$ est non dégénéré pour tout $k \leq \dim M + 1$. Ceci est toujours possible car, pour chaque sommet y_j, la réunion des conditions de dégénérescence des simplexes contenant y_j est un ensemble fermé d'intérieur vide (une réunion finie de $k-1$-plans). Ces choix étant fait, il existe autour de chaque point y_j un petit voisinage V_j en sorte que, pour n'importe quel choix de points $y'_1, \ldots, y'_N$ avec $y'_j \in V_j$, la propriété de non dégénérescence ci-dessus soit encore vérifiée. Par la suite nous aurons également besoin de choisir les point y_j de sorte que

$$y_i \neq \rho_0(\gamma) y_j \quad \text{pour tous } \gamma \in \pi_1(M) \text{ et } j \neq i,$$

ceci est toujours possible car la réunion des points de l'orbite des y_j, pour $j \neq i$, qui sont dans V_i est un ensemble dénombrable. On procède donc par récurrence, y_1 étant fixé on choisit $y_2 \in V_2$ dans l'ensemble partout dense qui est le complémentaire de l'orbite de y_1, puis y_3 dans le complémentaire des orbites de y_1 et y_2 et ainsi de suite.

On définit alors $\tilde{f}_0$ par :

$$\tilde{f}_0(\gamma m_i) = \rho_0(\gamma) y_i \quad \text{pour tous } \gamma \in \pi_1(M) \text{ et } i = 1, \ldots, N$$

et on étend $\tilde{f}_0$ à l'intérieur d'un simplexe $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_N})$ en une application affine sur le simplexe géodésique engendré par les points $y_{i_1}, \ldots, y_{i_N}$; on utilise pour cela la métrique euclidienne sur les simplexes de $\widetilde{M}$ et la métrique hyperbolique sur ceux de $\widetilde{X}$. Par le choix des points $y_i \in \widetilde{X}$, tous les simplexes dont les sommets sont dans l'intérieur de D sont transformés par $\tilde{f}_0$ en des simplexes non dégénérés. Considérons maintenant le cas où certains sommets sont dans l'intérieur de D et d'autres à l'extérieur. Soit $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_p}, \gamma_{j_1} m_{j_1}, \ldots, \gamma_{j_q} m_{j_q})$ un tel simplexe et supposons que son image par $\tilde{f}_0$, c'est-à-dire le simplexe noté $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_p}, \rho(\gamma_{j_1}) y_{j_1}, \ldots, \rho(\gamma_{j_q}) y_{j_q})$, soit dégénéré ; cela signifie qu'il existe $1 \leq k \leq q$ tel que $\rho(\gamma_{j_k}) y_{j_k}$ appartienne au sous-espace totalement géodésique E engendré par les points $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_p}, \rho(\gamma_{j_1}) y_{j_1}, \ldots,$

$\rho(\gamma_{j_{k-1}})y_{j_{k-1}})$ (rappelons que, par construction, $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_p})$ est un $(p-1)$-simplexe non dégénéré) ; on déplace alors y_{j_k} à l'intérieur de V_{j_k} pour le séparer de $\rho(\gamma_{j_k})^{-1}E$; ceci est possible si E reste fixe lorsque l'on déplace y_{j_k}, c'est-à-dire si aucun des points $y_{i_1}, \ldots, y_{i_p}, \rho(\gamma_{j_1})y_{j_1}, \ldots, \rho(\gamma_{j_{k-1}})y_{j_{k-1}}$ n'est dans l'orbite de y_{j_k}. Par le choix des y_i ceci ne peut se produire que si $y_{j_k} = y_{j_l}$ avec $l = 1, \ldots, q$ et $l \neq k$ ou bien $y_{i_k} = y_{i_l}$, $l = 1, \ldots, p$. Les points y_i étant en bijection avec les points m_i cela impliquerait que dans le simplexe $(m_{i_1}, \ldots, m_{i_p}, \gamma_{j_1}m_{j_1}, \ldots, \gamma_{j_q}m_{j_q})$ deux des points m_l coïncident et donc qu'au quotient sur M il se projette sur un simplexe dégénéré ce qui est impossible. On peut donc séparer y_{j_k} du sous-espace totalement géodésique $\rho(\gamma_{j_k})^{-1}E$. On utilise ensuite l'argument de densité pour choisir le nouveau point y_{j_k} disjoint de la réunion des orbites par $\rho(\pi_1(M))$ des autres points y_l. On procède alors par récurrence sur les simplexes considérés qui sont en nombre fini.

Les autres simplexes sont des images par un élément $\rho(\gamma)$, pour $\gamma \in \pi_1(M)$ des simplexes d'un des deux types précédents. Ceci prouve le lemme 5.2. □

Preuve du théorème. Nous noterons $\mathcal{T}_{\widetilde{X}}$ la collection des simplexes de $\widetilde{X}$ ainsi obtenue. Soit F une face de codimension 2 de $\mathcal{T}_{\widetilde{M}}$ et F' son image dans $\mathcal{T}_{\widetilde{X}}$. L'étoile de F dans $\mathcal{T}_{\widetilde{M}}$ contient un nombre fini de n-simplexes $s_1, \ldots, s_k$ dont les images sont notées $s'_1, \ldots, s'_k$. Le link autour de F est un cercle. Précisément, considérons un voisinage tubulaire de rayon assez petit, noté $\mathrm{Tub}(F)$, de cette face F de codimension 2. Alors le bord de $\mathrm{Tub}(F)$ est difféomorphe à $F \times S^1$. La variété M est supposée orientée, et donc aussi $\widetilde{M}$. Sur le bord de $\mathrm{Tub}(F)$ nous choisissons une courbe $\mathcal{C}$ générateur de $H_1(\partial\mathrm{Tub}(F), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$; nous pouvons, par exemple, prendre l'intersection de $\partial\mathrm{Tub}(F)$ avec un hyperplan orthogonal à F en un point (on peut définir un tel hyperplan bien que la métrique sur $\widetilde{M}$, qui est euclidienne sur chaque simplexe, soit singulière en F). Si nous choisissons arbitrairement une orientation sur chaque face de codimension 2, donc en particulier sur F, cela fournit une orientation du cercle $\mathcal{C}$ compatible avec celle de $\widetilde{M}$.

L'application $\tilde{f}_0$, linéaire par morceaux, envoie F sur F' (par construction) et donc $\partial\mathrm{Tub}(F)$ sur un cylindre topologique que l'on peut projeter, à partir de F', sur le bord $\partial\mathrm{Tub}(F')$ d'un petit voisinage tubulaire de F' (pour la métrique hyperbolique). Cela induit une application,

$$\tilde{f}_0 : H_1(\partial\mathrm{Tub}(F), \mathbb{Z}) \longmapsto H_1(\partial\mathrm{Tub}(F'), \mathbb{Z})$$

et on appelle degré transverse de $\tilde{f}_0$ en F, l'image par $\tilde{f}_{0_*}$ du générateur de $H_1(\partial\mathrm{Tub}(F), \mathbb{R})$; cette classe est un multiple entier de la classe fondamentale de $H_1(\partial\mathrm{Tub}(F'), \mathbb{Z})$ et nous pouvons donc, par abus de langage, identifier le degré transverse à un nombre entier relatif. On peut également définir ce degré en utilisant le cercle $\mathcal{C}$ tracé sur $\partial\mathrm{Tub}(F)$ et un cercle $\mathcal{C}'$ analogue sur $\partial\mathrm{Tub}(F')$ sur lequel on projette $\tilde{f}_0(\mathcal{C})$.

Soit $\theta(F,s)$ (resp. $\theta'(F',s')$) l'angle diédral (euclidien) du simplexe $s \in \mathcal{T}_{\widetilde{M}}$ en la face F (resp. du simplexe $s' \in \mathcal{T}_{\widetilde{X}}$ en la face F'). Les nombres θ et θ' sont choisis positifs. L'application $\tilde{f}_0$ d'un simplexe s sur un simplexe s' peut préserver ou renverser l'orientation (on rappelle que cette application est affine en restriction à s) et nous poserons $\epsilon(s) = \epsilon(s') = \pm 1$ suivant le cas considéré.

Lemme 5.3. *Soit F' une face de codimension 2 image de F, le degré transverse de $\tilde{f}_0$ en F, noté $deg_F \tilde{f}_0$, vérifie,*

$$2\pi\, deg_F \tilde{f}_0 = \pm \sum_{s'/F' \subset s'} \epsilon(s')\theta'(F',s').$$

Preuve. Pour F telle que $\tilde{f}_0(F) = F'$ et $s \in \mathcal{T}_{\widetilde{M}}$ tels que $F \subset s$, $\tilde{f}_0(\mathcal{C} \cap s)$ se projette sur $\mathcal{C}' \cap s'$ (où $s' = \tilde{f}_0(s)$) qui est un arc d'angle de valeur absolue $\theta'(F',s')$. On peut choisir les orientations de $\widetilde{X}$ et F' de sorte que l'angle orienté de la projection de $\tilde{f}_0(\mathcal{C} \cap s)$ est $+\theta'(F',s')$ si $\epsilon(S') = +1$, et $-\theta'(F',s')$ si $\tilde{f}_0$ renverse l'orientation de s. La quantité $\sum_{s'/F' \subset s'} \epsilon(s')\theta'(F',s')$ représente donc l'angle orienté total de la projection de $\tilde{f}_0(\mathcal{C})$ sur $\mathcal{C}'$, c'est-à-dire $2\pi \deg_{F'} \tilde{f}_0$. Si l'orientation de $\widetilde{X}$ est renversée la relation devient $2\pi \deg_{F'} \tilde{f}_0 = -\sum_{s'/F' \subset s'} \epsilon(s')\theta'(F',s')$.

Considérons alors une déformation de ρ_0, soit ρ_t, que nous supposerons C^1 en t. Nous construisons l'application $\tilde{f}_t$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{f}_t(m_i) &= y_i && i = 1, \dots, N, \\ \tilde{f}_t(\gamma m_i) &= \rho_t(\gamma) y_i && \text{pour tout } \gamma \in \pi_1(M), \end{aligned}$$

et ensuite on étend $\tilde{f}_t$ de manière affine dans chaque simplexe. La collection des simplexes images et leurs sommets varient de manière C^1 en t. Nous noterons cette collection $\mathcal{T}_{\widetilde{X}}(t)$. Tous les simplexes de $\mathcal{T}_{\widetilde{X}}(t)$ sont non dégénérés, pour t assez petit ; en effet, il suffit de n'en considérer qu'un nombre fini, les autres s'en déduisant par équivariance. Notons également que, par construction, $\tilde{f}_t$ dépend de manière C^1 en t, en particulier, le volume hyperbolique d'un simplexe de $\mathcal{T}_{\widetilde{X}}(t)$ est une fonction C^1 de t. Soit F une face de codimension 2 de $\mathcal{T}_{\widetilde{M}}$ et $F'(t)$ son image par $\tilde{f}_t$. Pour $s \in \mathcal{T}_{\widetilde{X}}(t)$, nous noterons $\theta'(t; F', s')$ l'angle (positif) diédral de s' en F'. Nous ne mentionnerons pas la dépendance en t des simplexes de $\mathcal{T}_{\widetilde{X}}(t)$ et de leurs faces de codimension 2 s'il n'y a pas d'ambiguïté. Par ailleurs si $s'(t) = \tilde{f}_t(s)$ et t est assez petit $\epsilon(s'(t))$ ne dépend pas de t. □

Lemme 5.4.

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{s'/F' \subset s'} \epsilon(s')\theta'(t; F', s') \Big) = 0.$$

Preuve. Pour t assez petit, la face $F'(t)$ est homéomorphe à $F'(0)$; de même $s'(t)$ est homéomorphe à $s'(0)$ si $s'(t) \in \mathcal{T}_{\widetilde{X}}(t)$ et ils sont tous non-dégénérés. Les voisinages tubulaires de $F'(t)$ et $F'(0)$ sont aussi homéomorphes et on peut définir le degré transverse de $\tilde{f}_t$ grâce à $F'(0)$. Alors, par constance du degré par déformation, pour t assez petit, on a $\deg_{F'(t)}(\tilde{f}_t) = \deg_{F'(0)}(\tilde{f}_0)$. □

Rappelons la formule de Schläfli (cf. [43] and [36]). Soit s' un simplexe hyperbolique géodésique et F' une de ses faces de codimension 2 ; si $s'(t)$ est une déformation de classe C^1 de $s' = s'(0)$, alors

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \operatorname{vol}(s'(t)) = -\sum_{F' \subset s'} \frac{d}{dt}_{|t=0} (\theta'(t;\, F'(t), s'(t))) \operatorname{vol}_{n-2}(F'(t))$$

où vol_{n-2} désigne le volume $(n-2)$-dimensionnel de la face considéré.

Pour $\bar{s} \in \mathcal{T}_M$ choisissons un relevé $s \in \mathcal{T}_{\widetilde{M}}$; alors $\tilde{f}_t$ identifie de manière $\mathcal{C}^\infty$ jusqu'au bord s avec un simplexe hyperbolique de $\mathcal{T}_{\widetilde{X}}$. L'équivariance de $\tilde{f}_t$ permet de définir de manière unique une métrique hyperbolique sur $\bar{s}$ dont la collection produit une métrique $\bar{g}(t)$ sur M qui est continue et hyperbolique par morceaux. En particulier le volume des faces de codimension 2 et les angles diédraux en celles-ci sont ceux du simplexe hyperbolique $\tilde{f}_t(s)$. Soit ω la forme volume hyperbolique de $\widetilde{X}$, alors

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(\rho_t) &= \int_M \tilde{f}_t^*(\omega) = \sum_{\bar{s} \in \mathcal{T}_M} \int_{\bar{s}} \tilde{f}_t^*(\omega) \\ &= \sum_{\bar{s} \in \mathcal{T}_M} \epsilon(s) \operatorname{vol}(\tilde{f}_t(s)) = \sum_{\bar{s} \in \mathcal{T}_M} \epsilon(\bar{s}) \operatorname{vol}(\bar{s}, \bar{g}(t))\end{aligned}$$

en définissant $\epsilon(\bar{s}) = \epsilon(s) = \epsilon(\tilde{f}_t(s))$. Ici on a identifié, par abus de langage, $\tilde{f}_t^*(\omega)$ avec une forme différentielle sur M grâce à l'équivariance de $\tilde{f}_t$. La formule de Schläfli donne,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(\rho_t) &= \sum_{\bar{s} \in \mathcal{T}_M} \frac{d}{dt} (\epsilon(\bar{s}) \operatorname{vol}(\bar{s}, \bar{g}(t))) \\ &= \sum_{\bar{s} \mathcal{T}_M} \sum_{\bar{F} \subset \bar{s}} \epsilon(\bar{s}) \frac{d}{dt} (\bar{\theta}(t;\, \bar{s}, \bar{F})) \operatorname{vol}_{n-2}(\bar{F}, \bar{g}(t))\end{aligned}$$

où $\bar{\theta}(t;\, \bar{s}, \bar{F})$ désigne l'angle diédral en $\bar{F}$ du simplexe $\bar{s}$ mesuré à l'aide de la métrique $\bar{g}(t)$. Il est égal à $\theta'(t;\, \tilde{f}_t(s), \tilde{f}_t(F))$ où s et F sont des relevés respectifs de $\bar{s}$ et $\bar{F}$.

$$\frac{d}{dt} \operatorname{vol}(\rho_t) = \sum_{\bar{F}} \Big(\sum_{\bar{s}/\bar{F} \subset \bar{s}} \epsilon(\bar{s}) \frac{d}{dt} (\bar{\theta}(t;\, \bar{F}, \bar{s})) \Big) \operatorname{vol}_{n-2}(\bar{F}, \bar{g}(t))$$

La quantité entre parenthèse peut se calculer sur M ou bien sur $\widetilde{M}$ car elle ne concerne que l'étoile d'une face $\overline{F}$; elle peut également se calculer sur $\widetilde{X}$ par définition de $\overline{g}(t)$. Le lemme précédent montre que, pour toute face $\overline{F}$,

$$\sum_{\overline{s}\supset\overline{F}} \epsilon(\overline{s})\frac{d}{dt}(\overline{\theta}(t;\,\overline{F},\overline{s})) = 0$$

Ce qui prouve que $\frac{d}{dt}\,\mathrm{vol}(\rho_t) = 0$. □

Une conséquence immédiate du théorème 5.1 est le corollaire suivant. Notons $\mathcal{R}(\pi_1(M), \mathrm{Isom}(\widetilde{X}))$ l'espace des représentations du groupe fondamental d'une variété M dans le groupe d'isométries de l'espace hyperbolique.

Corollaire 5.5. *Soit M une variété différentielle fermée et orientée, alors la fonctionnelle,*

$$\mathrm{vol}\colon \mathcal{R}(\pi_1(M), \mathrm{Isom}(\widetilde{X})) \to \mathbb{R}^+$$

prend un nombre fini de valeurs.

Preuve. Le groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(\widetilde{X}) = \mathrm{PO}(n, 1)$ est un groupe algébrique ; par ailleurs, $\pi_1(M)$ est de présentation finie donc $\mathcal{R}(\pi_1(M), \mathrm{Isom}(\widetilde{X}))$ est une variété algébrique (avec singularités) et possède un nombre fini de composantes connexes. Le théorème 5.1 affirme que la fonctionnelle vol est constante sur chaque composante connexe. □

Remarque. Ce résultat est énoncé dans [42], toutefois la preuve est incomplète sauf, peut-être, en dimension 3. Celle présentée ci-dessus nous a été suggérée par J.-P. Otal (voir [11]).

Considérons alors les variétés hyperboliques fermées de dimension n. Un théorème de Wang [48] affirme que, pour $n \geq 4$ et $V > 0$ le nombre de variétés hyperboliques fermées de volume inférieur à V est fini. Ce résultat est notoirement faux en dimension 3 et en dimension 2. Si X désigne une variété hyperbolique fermée et M une variété différentielle fermée, nous dirons (voir [28]) que M domine X s'il existe une application continue de degré non nul de M sur X. Le théorème 5.1 permet de donner une preuve très simple du résultat suivant :

Théorème 5.6 (T. Soma [45]). *Soit M une variété différentielle fermée de dimension 3, alors il n'existe qu'un nombre fini de variétés hyperboliques de dimension 3 fermées dominées par M.*

Preuve. Désignons par $f : M \to X$ l'application continue de degré non nul de M sur X, où X est une variété hyperbolique fermée. L'application f induit un morphisme

$f_*\colon \pi_1(M) \to \pi_1(X)$, c'est-à-dire une représentation ρ de $\pi_1(M)$ dans $\mathrm{PO}(n,1)$. Par définition du degré de f nous avons,

$$\mathrm{vol}(\rho) = \deg(f)\,\mathrm{vol}(X).$$

Par ailleurs, si on munit M d'une métrique riemannienne quelconque, le théorème 3.2 montre que ce volume est borné par un nombre ne dépendant que de M (et de cette métrique) que nous noterons $C(M)$. Nous avons donc,

$$\deg(f)\,\mathrm{vol}(X) \leq C(M)$$

c'est-à-dire, $\deg(f) \leq C(M)/\mathrm{vol}(X)$. Le volume d'une variété hyperbolique compacte est bornée inférieurement par une constante universelle v_n ne dépendant que de la dimension n grâce au lemme de Margulis (voir [13]). En conséquence,

$$\deg(f) \leq C(M)/v_3.$$

Il n'y a donc qu'un nombre fini de valeurs possibles pour le degré de l'application f. De même $\deg(f)\,\mathrm{vol}(X) = \mathrm{vol}(\rho)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs d'après le corollaire 5.5. Le volume des variétés X fermées dominées par une variété fermée fixe M ne peut donc prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui, d'après une résultat de W. Thurston ([47]), montre qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de telles variétés. □

Nous terminons en donnant un exemple de telles déformations, montrant la pertinence du théorème 5.1. Il nous a été communiqué par Daryl Cooper par l'intermédiaire de Michel Boileau.

Exemple (D. Cooper). Soit N une variété hyperbolique fermée de dimension 3. Considérons la somme connexe de N avec $S^1 \times S^2$, notée $N\#(S^1 \times S^2)$, le groupe fondamental de cette variété est le produit libre $\pi_1(M) * \mathbb{Z}$. Soit k un noeud homotopiquement nul dans $N\#(S^1 \times S^2)$ qui rencontre $S^1 \times S^2$ en au moins deux points. D'après R. Myers ([37]) on peut trouver de tels noeuds en sorte qu'une chirurgie de Dehn autour de k transforme $N\#(S^1 \times S^2)$ en une variété hyperbolique fermée M (voir aussi [10] page 797). La proposition 3.2 de [10] permet de construire une application continue $f\colon M \to N\#(S^1 \times S^2)$ de degré 1. Par ailleurs il existe également une application continue, $h\colon N\#(S^1 \times S^2) \to N$ de degré 1 qui consiste à écraser $S^1 \times S^2$ en un point. Nous obtenons donc une application continue de degré 1,

$$h \circ f\colon M \longrightarrow N$$

et une représentation $\rho_0 = h_* \circ f_*\colon \pi_1(M) \to \pi_1(N) \subset \mathrm{PO}(3,1)$. Le volume de cette représentation est,

$$\mathrm{vol}(\rho) = \mathrm{vol}(N) > 0$$

car $h \circ f$ est degré 1 et l'image de ρ est le groupe fondamental de N. Par ailleurs ρ_0 se décompose en,

$$\rho_0 \colon \pi_1(M) \xrightarrow{f_*} \pi_1(M) * \mathbb{Z} \xrightarrow{h_*} \mathrm{PO}(3,1).$$

Le facteur libre $\mathbb{Z}$ permet alors de déformer h_* sans contrainte et donc de produire des déformations non triviales. Plus précisément, si $\gamma \in \pi_1(M)$ vérifie que $f_*(\gamma)$ est le générateur du facteur $\mathbb{Z}$, alors $\rho_0(\gamma) = 1$. On peut déformer continûment h_* en déformant seulement l'image de $f_*(\gamma)$, par exemple en un élément hyperbolique dont la longueur de translation varie ; de la sorte la déformation ρ_t ainsi obtenue est non-triviale. En augmentant le nombre de facteurs $S^1 \times S^2$ nous pouvons aisément augmenter le nombre de paramètres disponibles pour déformer ρ.

Remarque. Il serait intéressant de construire de telles déformations en dimension supérieure ou égale à 4. Il est facile d'en construire de volume nul, mais des exemples de volume non nul restent à décrire.

Références

[1] P. Albuquerque, Patterson-Sullivan theory in higher-rank symmetric spaces. *Geom. Funct. Anal.* **9** (1) (1999), 1–28. Zbl 0954.53031 MR 1675889

[2] W. Ballmann, M. Gromov, and V. Schroeder, *Manifolds of nonpositive curvature*. Progr. Maths. 61, Birkhäuser, Boston, MA, 1985. Zbl 0591.53001 MR 0823981

[3] E. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*. Ergeb. Math. Grenzgeb. 30, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1961. Zbl 0097.26502 MR 0158038

[4] R. Benedetti and C. Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Universitext, Springer-Verlag, Berlin 1992. Zbl 0768.51018 MR 1219310

[5] N. Bergeron, Premier nombre de Betti et spectre du Laplacien de certaines variétés hyperboliques. *Enseign. Math.* **46** (2000), 109–137. Zbl 0969.58009 MR 1769939

[6] N. Bergeron, Communication privée.

[7] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot, Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.* **5** (5) (1995), 731–799. Zbl 0851.53032 MR 1354289

[8] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot, Minimal entropy and mostow's rigidity theorems. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **16** (1996), 623–649. Zbl 0887.58030 MR 1406425

[9] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot, Lemme de Schwarz réel et applications géométriques. *Acta Math.* **183** (1999), 145–169. Zbl 1035.53038 MR 1738042

[10] M. Boileau and S. Wang, Non-zero degree maps and surface bundles over S^1. *J. Differential Geom.* **43** (1996), 789–806. Zbl 0868.57029 MR 1412685

[11] F. Bonahon, A Schläfli-type formula for convex cores of hyperbolic 3-manifolds. *J. Differential Geom.* **50** (1998), 25–58. Zbl 0944.53021 MR 1678473

[12] F. Bonahon, Geometric structures on 3-manifolds. In *Handbook of geometric topology*, North Holland, Amsterdam 2002, 93–164. Zbl 0997.57032 MR 1886669

[13] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Grundlehren Math. Wiss. 285 Springer-Verlag, Berlin 1988. Zbl 0633.53002 MR 0936419

[14] M. Burger, A. Iozzi, and A. Wienhard, Surface group representations with maximal toledo invariant. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **336** (2003), 387–390. Zbl 1035.32013 MR 1979350

[15] Ch. Connell and B. Farb. Minimal entropy rigidity for lattices in product of rank one symmetric spaces. *Comm. Anal. Geom.* **11** (5) (2003), 1001–1026. Zbl 1088.58006 MR 2032507

[16] K. Corlette, Rigid representations of Kählerian fundamental groups. *J. Differential Geom.* **33** (1991), 239–252. Zbl 0731.53061 MR 1085142

[17] G. Courtois, Thèse d'habilitation. Université d'Orsay, 1998.

[18] A. Douady and C. Earle, Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. *Acta Math.* **157** (1986), 23–48. Zbl 0615.30005 MR 0857678

[19] N. Dunfield, Cyclic surgery, degrees of maps of character curves, and volume rigidity for hyperbolic manifolds. *Invent. Math.* **136** (1999), 623–657. Zbl 0928.57012 MR 1695208

[20] P. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*. Chicago Lectures in Math., The University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996. Zbl 0883.53003 MR 1441541

[21] J. Eells and L. Lemaire, A report on harmonic maps. *Bull. London Math. Soc.* **10** (1) (1978), 1–68. Zbl 0401.58003 MR 1363514

[22] J. Eells and L. Lemaire, Another report on harmonic maps. *Bull. London Math. Soc.* **20** (5) (1988), 385–524. Zbl 0669.58009 MR 0956352

[23] H. Federer, *Geometric Measure Theory*. Grundlehren Math. Wiss. 153, Springer-Verlag, New York 1969. Zbl 0176.00801 MR 0257325

[24] S. Francaviglia and B. Klaff, Maximal volume representation are Fuchsian. *Geom. Dedicata* **117** (2006), 111–124.

[25] S. Gallot, J. Lafontaine, and D. Hulin, *Riemannian Geometry*. 2nd edition, Universitext, Springer-Verlag, Berlin 1990. Zbl 0716.53001 MR 1083149

[26] W. Goldman, Representations of fundamental groups of surfaces. In *Geometry and topology* (College Park, Md., 1983/84), ed. by J. Alexander and J. Karer, Lecture Notes in Math. 1167, Springer-Verlag, Berlin 1985, 95–117. Zbl 0575.57027 MR 0827264

[27] A. Goncharov, Volumes of hyperbolic manifolds and mixed Tate motives. *J. Amer. Math. Soc.* **12** (2) (1999), 569–618. Zbl 0919.11080 MR 1649192

[28] M. Gromov, Volume and bounded cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **56** (1983), 213–307. Zbl 0516.53046 MR 0686042

[29] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*. Grad. Stud. Math. 34, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001. Zbl 0993.53002 MR 1834454

[30] B. Klingler, Volumes des représentations sur un corps local. *Geom. Funct. Anal.* **13** (5) (2003), 1120–1160. Zbl 1032.22003 MR 2024978

[31] G. Knieper, Spherical means on compact Riemannian manifolds of negative curvature. *Differential Geom. Appl.* **4** (4) (1994), 361–390. Zbl 0812.53043 MR 1306567

[32] F. Labourie, Existence d'applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative. *Proc. Amer. Math. Soc.* **111** (3) (1991), 877–882. Zbl 0783.58016 MR 1049845

[33] G. Link, Hausdorff dimension of limit sets of discrete subgroups of higher rank Lie groups. *Geom. Funct. Anal.* **14** (2) (2004), 400–432. Zbl 1058.22010 MR 2062761

[34] G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 17, Springer-Verlag, Berlin 1991. Zbl 0732.22008 MR 1090825

[35] J. Milnor, On the existence of a connection with zero curvature. *Comment. Math. Helv.* **32** (1958), 215–223. Zbl 0196.25101 MR 0095518

[36] J. Milnor, The Schläfli differential equality. In *John Milnor, Collected papers*. Vol. 1, Geometry, Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1994, 281–295. Zbl 0857.01015 MR 1277810

[37] R. Myers, Excellent 1-manifolds in compact 3-manifolds. *Topology Appl.* **49** (1983), 115–127. Zbl 0786.57006 MR 1206219

[38] J.-P. Otal, Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque* **235** (1996). Zbl 0855.57003 MR 1402300

[39] J.-F. Quint, Mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur. *Geom. Funct. Anal.* **12** (4) (2002), 776–809. Zbl 02184586 MR 1935549

[40] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*. Ergeb. Math. Grenzgeb. 68, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972. Zbl 0254.22005 MR 0507234

[41] A. Reznikov, Harmonic maps, hyperbolic cohomology and higher Milnor inequalities. *Topology* **32** (4) (1993), 899–907. Zbl 0804.57013 MR 1241878

[42] A. Reznikov, Rationality of secondary classes. *J. Differential Geom.* **43** (1996), 674–692. Zbl 0874.32009 MR 1412681

[43] L. Schläfli, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. Birkhäuser, Basel 1950. Zbl 0035.21902 MR 0034587

[44] J.-P. Serre, Arbres, amlagames, SL_2. *Astérisque* **46** (1977). Zbl 0369.20013 MR 0476875

[45] T. Soma, Non-zero degree maps to hypebolic 3-manifolds. *J. Differential Geom.* **49** (1998), 517–546. Zbl 0990.57005 MR 1669645

[46] A. Starkov, Vanishing of the first cohomologies for lattices in Lie groups. *J. Lie Theory* **12** (2) (2002), 449–460. Zbl 1011.22005 MR 1923777

[47] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*. Princeton Lecture Notes, revised version, Princeton Univiversity Press, Princeton, NJ, 1997.

[48] H.C. Wang, Topics on totally discontinuous groups. In *Symmetric spaces*, Pure and Appl. Math. 8, Marcel Dekker, New York 1972, 459–487. Zbl 0232.22018 MR 0414787

[49] J. Wood, Bundles with totally disconnected structure group. *Comment. Math. Helv.* **46** (1971), 257–273. Zbl 0217.49202 MR 0293655

Received May 5, 2005

Gérard Besson, Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, UMR5582 (UJF-CNRS), BP 74, 38402 St Martin D'Hères Cedex, France

E-mail: G.Besson@ujf-grenoble.fr

Gilles Courtois, École Polytechnique, Centre de mathématiques, UMR7640 (CNRS),
91128 Palaiseau Cedex, France,

E-mail: Courtois@math.polytechnique.fr

Sylvestre Gallot, Institut Fourier, Laboratoire de Mathématiques, UMR5582 (UJF-CNRS),
BP 74, 38402 St Martin D'Hères Cedex,France,

E-mail: Sylvestre.Gallot@ujf-grenoble.fr