Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 82 (2007)

Artikel: Centralisateurs d'éléments dans les PD(3)-paires

Autor: Castel, Fabrice

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-98892

Comment. Math. Helv. 82 (2007), 499–517 **Commentarii Mathematici Helvetici**

Centralisateurs d'éléments dans les PD(3)-paires

Fabrice Castel

Résumé. On établit pour les centralisateurs dans une PD(3)-paire des résultats analogues à ceux connus pour les centralisateurs dans un groupe fondamental de variété de dimension 3. Comme dans le cas des groupes fondamentaux de variétés de dimension 3, la preuve de ces résultats repose sur une décomposition JSJ pour les PD(3)-paires obtenue à l'aide de la théorie des voisinages algébriques réguliers de Scott et Swarup.

Mathematics Subject Classification (2000). 20F65, 20J05.

Keywords. Groupes PD(3), décomposition JSJ, centralisateurs, relations de Baumslag–Solitar.

Table des matières

1. Introduction

Un groupe à dualité de Poincaré de dimension n est un groupe ayant des propriétés homologiques analogues à celles du groupe fondamental d'une variété de dimension n fermée et asphérique. Plus précisément un groupe G est dit à dualité de Poincaré de dimension n (en abrégé : groupe PD(n)) s'il vérifie les trois propriétés suivantes : G est de type FP, pour tout entier $i \neq n$ $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ et $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ est infini cyclique en tant que groupe abélien. Le groupe G est dit orientable lorsque l'action de G sur $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ est triviale, non orientable sinon. Une définition antérieure différente mais équivalente (voir le chapitre VIII de [6] pour une preuve de cette équivalence) de groupe PD(n) est donnée dans [2]. Un groupe PD(n) est nécessairement de génération finie, de dimension cohomologique n (et donc sans torsion) et n'a qu'un bout [2].

Un groupe PD(2) est toujours isomorphe au groupe fondamental d'une surface fermée (voir [12]). Pour $n \geq 4$, M. Davis [9] a construit des groupes PD(n) qui ne sont pas de présentation finie et ne peuvent donc pas être des groupes fondamentaux de variétés fermées de dimension n. La question de savoir si un groupe PD(3) est toujours le groupe fondamental d'une variété fermée de dimension 3 reste ouverte. Cependant, C. B. Thomas a montré dans [31] qu'un groupe PD(3) résoluble est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de dimension 3. Plus récemment, B. Bowditch a montré dans [5] qu'un groupe PD(3) possédant un sous-groupe normal infini cyclique est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert de dimension 3. Ce théorème et un théorème de R. Bieri et J. A. Hillman [4] impliquent qu'un groupe PD(3) contenant un sous-groupe sous-normal de présentation finie est isomorphe au groupe fondamental d'une variété fermée de dimension 3.

Une *paire de groupes* (G, Ω), est la donnée d'un groupe G et d'un ensemble Ω de sous-groupes de G. Le double de la paire (G, Ω) est le groupe obtenu en amalgamant deux copies de G le long des éléments de Ω. Une PD(n)-paire (G, Ω) est une paire de groupes telle que le double de G le long de Ω est un groupe PD(n) (si $\Omega = \emptyset$ on demande que G soit PD(n)). Une PD(n)-paire (G, Ω) est donc l'analogue algébrique du groupe fondamental d'une variété M compacte, asphérique, dont les groupes fondamentaux des composantes connexes du bord s'injectent dans $\Pi_1(M)$ et correspondent aux éléments de Ω. Cette définition implique ([3] et [1]) qu'une PD(n)-paire (G, Ω) vérifie les propriétés suivantes : le groupe G est sans torsion, de dimension cohomologique $n-1$ lorsque $\Omega \neq \emptyset$, n'a qu'un seul bout, et Ω est un ensemble fini de sous-groupes PD$(n-1)$ de G.

Pour une PD(3)-paire, (G, Ω), avec $\Omega = \{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$, on introduit la terminologie suivante :

Definition 1. (1) La paire (G, Ω) est dite de type Seifert s'il existe une variété de Seifert M de dimension 3 compacte et connexe, dont le bord est composé de n composantes connexes $S_1, \ldots, S_n$, et un isomorphisme φ entre G et $\Pi_1(M)$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $1 \leq i \leq n$, $\varphi(\Omega_i)$ est conjugué à $\Pi_1(S_i)$.

(2) Si aucun élément virtuellement abélien de Ω n'est d'indice fini dans G et si chaque sous-groupe de G abélien libre de rang 2 est conjugué dans G à un sous-groupe de Ω, la paire (G, Ω) est dite atoroïdale.

Un des principaux résultats sur la structure d'une variété M de dimension 3, compacte, connexe et irréductible, découle du théorème de décomposition JSJ le long de tores incompressibles. Ce théorème implique que $\Pi_1(M)$ admet une décomposition en graphe de groupes dans laquelle :

– les groupes associés aux arêtes de Γ sont virtuellement abéliens libres de rang 2.

– les groupes associés aux sommets de Γ sont soit de type Seifert, soit atoroïdaux.
– chaque sous-groupe virtuellement abélien libre de Γ est conjugué dans un des groupes associé à un sommet de Γ.

Le théorème de décomposition JSJ a été montré par W. H. Jaco, P. Shalen ([18]) et K. Johannson ([19]) dans le cas des variétés dites Haken. Sa preuve dans le cas général découle des résultats de P. Scott ([27]), G. Mess ([25]) , P. Tukia ([32]), D. Gabai ([13]), A. J. Casson et D. Jungreis ([7]), qui caractérisent les variétés irréductibles ayant un groupe fondamental atoroïdal.

Dans le chapitre VI de [18] Jaco et Shalen utilisent le théorème de décomposition JSJ pour décrire la structure du centralisateur d'un élément du groupe fondamental d'une variété Haken de dimension 3. Ce résultat montre en particulier que si la variété M est Haken, le centralisateur d'un élément de $\pi_1(M)$ est toujours de génération finie. Ils montrent également que si M est Haken, pour tout couple (a, b) d'éléments de $\Pi_1(M)$ la relation $ab^pa^{-1} = b^q$ implique que $|p| = |q|$.

Le but de cet article est de démontrer des résultats analogues dans une PD(3)-paire. Plus précisément on démontre les deux résultats suivants :

Théorème 1. *Soit (G, Ω) une* PD(3) *paire. Soit h un élément non trivial de G. Posons $C = C_G(h)$, où $C_G(h)$ désigne le centralisateur de h dans G. Si h n'est pas infiniment divisible, alors C est nécessairement d'un des trois types suivants :*

(1) *C est infini cyclique.*
(2) *C est abélien libre de rang 2 ou isomorphe au groupe fondamental d'une bouteille de Klein.*
(3) *C est conjugué à un sous-groupe d'indice au plus 2 d'un des morceaux de Seifert de la décomposition JSJ de G.*

Si h est infiniment divisible alors C fixe un sommet atoroïdal de la décomposition JSJ de G et C contient un sous-groupe d'indice 2 isomorphe à un sous-groupe non cyclique des rationnels additifs.

Théorème 2. *Soit G un groupe* PD(3). *Soient a et b deux éléments de G. Si a et b sont liés par une relation du type $ab^pa^{-1} = b^q$, alors $|p| = |q|$.*

Remarques. (1) P. Shalen a montré ([28]) que le groupe fondamental d'une variété Haken M ne contient pas d'élément infiniment divisible. Cette preuve utilise l'existence d'une hiérarchie de Haken pour M. La question de savoir si un groupe PD(3) G contient un élément infiniment divisible reste ouverte, même si G est le groupe fondamental d'une variété fermée et atoroïdale de dimension 3. Dans ce dernier cas, notons que si la conjecture de géométrisation est vraie, $\Pi_1(M)$ ne contient pas d'élément infiniment divisible. L'éventuelle présence d'un élément infiniment divisible dans G empêche d'affirmer que le centralisateur dans G d'un élément non trivial est toujours de génération finie. C'est pourquoi le théorème de structure des centralisateurs reste plus précis dans le cadre topologique des variétés Haken que dans le cadre des groupes PD(3).

(2) Le théorème 2 généralise un résultat de M. Kapovitch et B. Kleiner affirmant qu'un groupe de Baumslag–Solitar $B_{p,q}$ de présentation $\langle a, b; ab^pa^{-1} = b^q\rangle$ ne s'injecte pas dans un groupe PD(3) lorsque $|p| \neq |q|$ (voir section 9 de [20]). La preuve du théorème 2 utilise leur résultat. Dans le cas des groupes fondamentaux de variété de dimension 3, le théorème 2 a été montré par P. H. Kropholler [22] et indépendamment par P. B. Shalen [29].

Tout comme dans le cas des variétés de dimension 3, la preuve de ces résultats s'appuie sur un théorème de décomposition JSJ pour les PD(3)-paires obtenue à l'aide de la théorie des voisinages algébriques réguliers de P. Scott et G. A. Swarup (voir chapitre 2).

2. Décomposition JSJ pour les PD(3)-paires

Soit (G, Ω) une PD(3)-paire. Dans cette section on donne la définition de décomposition JSJ de la paire (G, Ω) et on explique brièvement comment obtenir une telle décomposition à l'aide de la théorie des voisinages algébriques réguliers de Scott et Swarup ([26]).

Soit G un groupe et Γ un graphe de décomposition de G. On rappelle que Γ est dit minimal lorsque l'arbre de Bass–Serre T associé à Γ ne contient aucun sous-arbre propre G-invariant. Un sommet v de Γ est dit redondant lorsqu'il vérifie les deux propriétés suivantes :

– v est de valence 2.
– si e est une arête de Γ incidente à v, l'inclusion du groupe associé à e dans le groupe associé à v est un isomorphisme.

Soit (G, Ω) une PD(3)-paire. On suppose que G admet une décomposition en un graphe fini Γ de groupes, adapté à Ω (i.e. tel que chaque sous-groupe de Ω est conjugué dans un des groupes de sommets de Γ), et telle que les groupes associés aux arêtes de Γ sont abéliens libres de rang 2. Soit T l'arbre de Bass–Serre associé à Γ et p la projection usuelle de T sur Γ. Soit v un sommet de T. Soit G_v le stabilisateur dans G de v. Alors le théorème 8.4 de [3] implique que G_v est le groupe de base d'une PD(3)-paire (G_v, Ω_v). Lorsque cette PD(3)-paire est de type Seifert (resp. atoroïdale), on dira que v est Seifert (resp. atoroïdal).

Definition 2 (décomposition JSJ). Soit (G, Ω) une PD(3)-paire. Soit Γ un graphe minimal de décomposition de G en graphe de groupes, adapté à Ω. On dit que Γ est une décomposition JSJ de la PD(3)-paire (G, Ω) s'il vérifie les propriétés suivantes :

– 0) Γ n'a pas de sommets redondants.
– 1) La PD(3)-paire de groupes associée à chaque sommet de Γ est soit de type Seifert, soit atoroïdale.
– 2) Les groupes associés aux arêtes de Γ sont virtuellement abéliens libres de rang 2.
– 3) Chaque sous-groupe abélien libre de rang 2 de G est conjugué à un sous-groupe d'un des groupes de sommet de Γ.

On peut maintenant énoncer le théorème de décomposition JSJ d'une PD(3)-paire :

Théorème 3. *Soit* (G, Ω) *une* PD(3)*-paire. Il existe une décomposition JSJ de* (G, Ω). *De plus, deux décompositions JSJ de* (G, Ω) *sont* G*-isomorphes.*

Preuve. On prouve d'abord ce théorème dans le cas où G est un groupe PD(3). Le cas des PD(3) paires (G, Ω) dont le bord Ω est non vide s'en déduit en amalgamant à G, le long de chaque élément Ω_i de Ω, le groupe fondamental d'une variété de dimension 3 atoroïdale et acylindrique ayant un bord connexe et incompressible. Pour une telle variété M_{Ω_i} le groupe fondamental $\Pi_1(\Omega'_i)$ de la composante connexe du bord Ω'_i de M_{Ω_i} s'injecte dans $\Pi_1(M_{\Omega_i})$ et est malnormal dans $\Pi_1(M_{\Omega_i})$. Le produit amalgamé ainsi obtenu est un groupe PD(3) dont la décomposition JSJ induit une décomposition JSJ de G.

On suppose donc que G est un groupe PD(3). Le théorème 12.5 de [26] convenablement adapté au cas des groupes PD(3) (suivant les indications données par Scott et Swarup) montre l'existence d'une décomposition de G en un graphe fini de groupes Γ' vérifiant, entre autres, les propriétés suivantes :

(1) Les sommets de Γ' sont de deux types ; les sommet de type V_0 et les sommets de type V_1. De plus deux sommets de même type ne peuvent être adjacents.
(2) Les groupes d'arêtes de Γ' sont virtuellement abéliens libres de rang 2.
(3) Tout sous-groupe abélien libre de rang 2 de G admet un sous-groupe d'indice fini conjugué dans G à un sous-groupe du groupe d'un sommet de type V_0 de Γ'.
(4) Les sommets de type V_1 de Γ' sont simples dans le sens où la décomposition Γ' ne peut être raffiné en scindant un sommet de ce type le long d'un sous-groupe virtuellement abélien libre de rang 2.

Cette décomposition de G sera appelée décomposition de Scott et Swarup de G. Le théorème de Bowditch [5], le théorème 2 de [15], et les méthodes de Dunwoody et Swenson [11], permettent de montrer que les paires de groupes associées aux sommets de type V_0 de Γ' sont de type Seifert. Soit Γ le graphe de décomposition de G obtenu à partir de Γ' en supprimant les sommets de type V_0 pour lesquels l'inclusion des groupes d'arêtes dans le groupe de sommet est un isomorphisme. Le reste de la preuve du théorème de décomposition JSJ d'un groupe PD(3) consiste à établir les points suivants :

– Les sommets simples de Γ sont atoroïdaux.
– Les sous-groupes abéliens libres de rang 2 de G sont conjugués dans des groupes de sommets de Γ.
– Le graphe Γ a un nombre minimal de sommets Seifert.
– Toute décomposition de G vérifiant les propriétés 1) à 3) de la définition 2 et possédant un nombre minimal de sommets Seifert est G-isomorphe à Γ.

Pour les détails complets de cette preuve, nous renvoyons au chapitre 4 de [8] (voir aussi la section 12 de [26]). □

Le théorème 3 a été établi par Kropholler [21] dans le cadre de PD(n)-paires, $n \geq 2$ vérifiant l'hypothèse supplémentaire (max-c) que toute suite croissante de centralisateurs est stationnaire. Cependant certains groupes PD(4) ne vérifient pas cette hypothése ([16]). Il découle de nos résultats que toutes les PD(3)-paires possèdent la propriété max-c (cf proposition 3).

C. T. C. Wall a établi le théorème 3 dans le cas des groupes PD(3) de présentation finie [33]. Sa preuve repose sur le théorème du tore algébrique de Dunwoody et Swenson [11] et le théorème de décomposition JSJ de Dunwoody et Sageev [10] pour les groupes de présentation finie.

3. Centralisateurs dans une PD(3)-paire

Dans cette section, on utilise la décomposition JSJ donnée par le théorème 3 pour démontrer les théorèmes 1 et 2.

3.1. Centralisateurs dans une PD(3)-paire atoroïdale.

Le but de cette sous-section est de montrer la proposition suivante :

Proposition 1. *Soit (G, Ω) une* PD(3) *paire atoroïdale et orientable. Soit h un élément de G. Alors le centralisateur de h dans G est un sous-groupe abélien de G, maximal pour la propriété d'être abélien.*

On rappelle la définition suivante de morphisme de paires que l'on trouve dans [3].

Definition 3 (morphisme de paire). Soient (G, Ω) et (H, Λ) des paires de groupes, avec $\Omega = \{\Omega_i, i \in I\}$ et $\Lambda = \{\Lambda_j, j \in J\}$. Un morphisme de paires entre (G, Ω) et (H, Λ) consiste en la donnée d'un homomorphisme φ de G dans H et d'une application π de I dans J tels que $\varphi(\Omega_i) \subseteq \Lambda_{\pi(i)}$ pour tout $i \in I$,.

La définition suivante généralise au cas relatif la notion de degré entre groupes PD(n) introduite dans [17].

Definition 4. Soient (G, Ω) et (H, Λ) des PD(n)-paires orientables et φ un homomorphisme de paires de (G, Ω) dans (H, Λ). L'homomorphisme φ_* de $H_n(G, \Omega; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ dans $H_n(H, \Lambda; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ induit par φ est appellé degré de φ.

Lemme 1. *Soient (G, Ω) et (H, Λ) des* PD(n)*-paires orientables et φ un homomorphisme de paires de (G, Ω) dans (H, Λ). Si φ est de degré non nul, alors l'image $\varphi(G)$ de G par φ est d'indice fini dans H.*

Preuve. Lorsque les groupes G et H sont PD(n), le résultat vient du lemme 1 de [17]. Lorsque les bords des PD(n)-paires (G, Ω) et (H, Λ) sont non vides, notons par $\tilde{\varphi}$ l'homomorphisme naturel induit par φ allant du double $D(G)$ de la paire (G, Ω) dans le double $D(H)$ de la paire (H, Λ). Un argument standard utilisant les suites exactes de Mayer–Vietoris relatives montre que si φ est de degré non nul alors $\tilde{\varphi}$ est de degré non nul entre les groupes PD(n) $D(G)$ et $D(H)$. Cela implique que $\tilde{\varphi}(D(G))$ est d'indice fini dans $D(H)$ et donc que $\varphi(G)$ est d'indice fini dans $\varphi(H)$. □

Le résultat suivant de R. Bieri (corollaire 8.9 de [1]) sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite.

Proposition 2. *Soit C un groupe de dimension cohomologique 2, de génération finie et non abélien. Soit $Z(C)$ le centre de C. Si $Z(C)$ n'est pas trivial alors $Z(C)$ est nécessairement infini cyclique et le quotient de C par $Z(C)$ est l'extension d'un groupe libre par un groupe fini.* □

Definition 5. Soient G un groupe et H et K des sous-goupes de G.

(1) On dit que H et K sont commensurables lorsque $H \cap K$ est d'indice fini dans H et K.

(2) Le commensurateur de H dans G, noté $\mathrm{Comm}_G(H)$, est le sous-groupe de G défini de la manière suivante : $\mathrm{Comm}_G(H) = \{g \in G$ tels que gHg^{-1} et H soient commensurables$\}$.

La preuve des lemmes 2 et 3 a été suggérée par P. Scott.

Lemme 2. *Soit (G, Ω) une* PD(3)*-paire atoroïdale et orientable. Soit Ω_1 un sous-groupe abélien libre de rang 2 de G appartenant à Ω. Pour tout élément g de G n'appartenant pas à Ω_1, $\Omega_1 \cap g\Omega_1 g^{-1}$ est trivial.*

Preuve. Supposons le contraire. Si $\Omega_1 \cap g\Omega_1 g^{-1}$ est abélien libre de rang 2, $g \in \mathrm{Comm}_G(\Omega_1)$. D'après le lemme 2.2 de [24], $\mathrm{Comm}_G(\Omega_1) = \Omega_1$. Le résultat est donc vrai dans ce cas.

Si $\Omega_1 \cap g\Omega_1 g^{-1} = L$ est infini cyclique, appellons c un générateur de L. Quitte à remplacer Ω_1 et $g\Omega_1 g^{-1}$ par des sous-groupes d'indice fini, on peut supposer que

Ω_1/L et $(g\Omega_1 g^{-1})/L$ sont infinis cycliques et qu'il existe $a \in \Omega_1$ et $b \in g\Omega_1 g^{-1}$ tels que Ω_1 est engendré par a et c et que $g\Omega_1 g^{-1}$ est engendré par b et c. Le centre du sous-groupe Z de G engendré par Ω_1 et $g\Omega_1 g^{-1}$ est inclus dans $\mathrm{Comm}_G(\Omega_1) = \Omega_1$ et dans $\mathrm{Comm}_G(g\Omega_1 g^{-1}) = g\Omega_1 g^{-1}$ et est donc égal à L. Par construction, Z n'est pas libre. Comme le bord de la PD(3)-paire (G, Ω) est non vide, Z est de dimension cohomologique 2. La proposition 2 implique alors que le quotient de Z par L est l'extension d'un groupe libre par un groupe fini. Ce groupe libre n'est ni trivial, sans quoi Z serait infini cyclique, ni infini cyclique, sans quoi Z serait virtuellement résoluble et donc, d'après la classification des groupes résolubles de dimension cohomologique 2 donnée dans [14], Z serait abélien libre de rang 2. Comme Z est engendré par a, b et c, le groupe quotient Z/L est engendré par les projetés $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de a et b dans Z/L. Des puissances suffisamment grandes de $\bar{a}^n$ et de $\bar{b}^m$ engendrent donc un sous-groupe libre à deux générateurs de Z/L. Quitte à remplacer a et b par a^n et b^m, on peut donc supposer que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ engendrent un sous-groupe libre à deux générateurs de Z/L.

Posons $S = \Omega_1 *_L (g\Omega_1 g^{-1})$. Le groupe S s'identifie au groupe fondamental de la variété de Seifert M obtenue en prenant le produit d'un disque à deux trous par un cercle. Cette identification peut toujours être effectuée de telle sorte que l'homomorphisme naturel φ de S dans G applique isomorphiquement les groupes fondamentaux $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ de deux des trois bords de M sur Ω_1 et $(g\Omega_1 g^{-1})$. Soit $\tilde{P}$ le groupe fondamental du troisième bord de M et $\Lambda = \{\tilde{H}, \tilde{K}, \tilde{P}\}$. La paire (S, Λ) est une PD(3)-paire. On considère deux cas :

Cas 1. *$\varphi(\tilde{P})$ est infini cyclique.* Soient $\tilde{c}$ un générateur de $\tilde{H} \cap \tilde{K}$ et $\tilde{a} \in \tilde{H}$ et $\tilde{b} \in \tilde{K}$ les préimages de a et b dans $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$. Par construction on a $\varphi(\tilde{c}) = c$. Soit $\tilde{p} \in \tilde{P}$ tel que $\tilde{p}$ et $\tilde{c}$ engendrent $\tilde{P}$. Comme $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ et $\tilde{c}$ engendrent S, on peut écrire $\tilde{p}$ comme un mot $m(\tilde{a}, \tilde{b})\tilde{c}^n$, où $m(\tilde{a}, \tilde{b})$ désigne un mot non trivial en $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$. Comme $\varphi(\tilde{P})$ est infini cyclique et engendré par c, on a dans Z une relation de la forme $m(a, b) = c^k$. Cette relation se projette dans Z/L en une relation de la forme $m(\bar{a}, \bar{b}) = 1$ ce qui contredit le fait que $\bar{a}$ et $\bar{b}$ engendrent un sous-groupe libre de Z/L. Le cas 1 n'est donc pas possible.

Cas 2. *$\varphi(\tilde{P})$ est abélien libre de rang* 2. Dans ce cas, comme la paire (G, Ω) est atoroïdale, φ réalise une injection de P dans un conjugué d'un sous-groupe de Ω. Notons respectivement par $\varphi_{|\tilde{H}}$ et $\varphi_{|\tilde{K}}$ les restrictions de φ à $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$. Considérons l'isomorphisme α de $\tilde{H}$ dans $\tilde{K}$ défini par : $\alpha(\tilde{h}) = \varphi^{-1}{}_{|gHg^{-1}}(g.\varphi_{|\tilde{H}}(\tilde{h}).g^{-1})$. Remarquons que si $\tilde{c} = \varphi^{-1}{}_{|\tilde{H}}(c)$, alors $\alpha(\tilde{c}) = \tilde{c}$. Soit S' l'extension HNN obtenue à partir de S en amalgamant $\tilde{H}$ à $\tilde{K}$ au moyen de l'isomorphisme α et $\tilde{P}'$ l'image de $\tilde{P}$ par l'inclusion naturelle de S dans S'. Le théorème 8.4 de [3] montre que la paire $(S', \tilde{P}')$ est une PD(3)-paire. Appellons t la lettre stable correspondant à cette extension HNN. Comme la paire (G, Ω) est atoroïdale, l'application ψ de S' dans

G appliquant la base S de S' sur $\varphi(S)$ et t sur g est un morphisme de paires entre $(S', \tilde{P}')$ et (G, Ω). Comme de plus $t.\tilde{c}.t^{-1} = \alpha(\tilde{c}) = \tilde{c}$, $\tilde{c}$ est dans le centre de S' et le théorème 2 de [15] implique que S' est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert obtenue à partir de M en recollant les bord correspondant à $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ au moyen d'un homéomorphisme induisant α. D'après la proposition 1.1 de [3], le morphisme de paire ψ induit le diagramme commutatif suivant de suites exactes relatives (les modules de coefficients sont tous isomophes à $\mathbb{Z}$ considéré comme S'-module et G-module trivial) :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longmapsto & H_3(S') & \xrightarrow{p_*} & H_3(S', \tilde{P}') & \xrightarrow{\delta_*} & H_2(\tilde{P}') & \xrightarrow{i_*} & H_2(S') & \longmapsto \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_*} & \\
\cdots \longmapsto & H_3(G) & \xrightarrow{p'_*} & H_3(G, \Omega) & \xrightarrow{\delta'_*} & H_2(\Omega) & \xrightarrow{i'_*} & H_2(G) & \longmapsto \cdots
\end{array}$$

Dans ce diagramme on a les identifications suivantes : $H_3(S') \simeq H_3(G) \simeq 0$, $H_3(S', \tilde{P}') \simeq H_3(G, \Omega) \simeq \mathbb{Z}$, $H_2(\tilde{P}') \simeq \mathbb{Z}$ et $H_2(\Omega) \simeq \mathbb{Z}^n$ (avec n égal au nombre de composantes de Ω). Comme $\psi(\tilde{P}') = \varphi(\tilde{P})$, ψ réalise une injection de $\tilde{P}'$ dans le conjugué d'un élément de Ω. L'homomorphisme induit ψ_* de $H_2(\tilde{P}')$ dans $H_2(\Omega)$ est donc non trivial. Comme le diagramme ci-dessus est commutatif, cela implique que l'application ψ_* de $H_3(S', \tilde{P}')$ dans $H_3(G, \Omega)$ est non triviale. L'homomorphisme ψ est donc de degré non nul. Le lemme 1 montre que $\psi(S')$ est d'indice fini dans G. En particulier $\psi(S')$ est le groupe de base d'une PD(3)-paire et comme $\psi(S')$ a un centre non trivial, cette PD(3)-paire est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert de dimension 3. Donc G est également isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert de dimension 3. Cela contredit le fait que la paire (G, Ω) est atoroïdale. Aucun des deux cas précédents n'est donc possible. On en conclut que $\Omega_1 \cap g\Omega_1 g^{-1}$ n'est pas infini cyclique. □

Lemme 3. *Soit* (G, Ω) *une* PD(3)*-paire atoroïdale et orientable. Soient* H *et* K *des sous-groupes abéliens libres de rang 2 de* G. *On suppose que* $H \cap K$ *contient un sous-groupe infini cyclique. Alors il existe un sous-groupe* J *de* G, *abélien libre de rang 2, tel que* H *et* K *soient tout deux des sous-groupes de* J.

Preuve. Comme (G, Ω) est atoroïdale, il existe des éléments g_1 et g_2 de G et des sous-groupes Ω_1 et Ω_2 appartenant au bord Ω de la paire (G, Ω) tels que $H \subseteq g_1\Omega_1 g_1{}^{-1}$ et $K \subseteq g_2\Omega_2 g_2{}^{-1}$. Si $\Omega_1 = \Omega_2$, le lemme 2 implique que $g_1{}^{-1}g_2 \in \Omega_1$ et donc que les groupes H et K sont inclus dans $g_1\Omega_1 g_1{}^{-1} = g_2\Omega_1 g_2{}^{-1} = J$. Le résultat est vrai dans ce cas. On peut donc supposer que Ω_1 et Ω_2 sont distincts. Quitte à remplacer dans Ω le sous-groupe Ω_1 par $g_1\Omega_1 g_1{}^{-1}$ et le sous-groupe Ω_2 par $g_2\Omega_2 g_2{}^{-1}$ on peut supposer que $H \subseteq \Omega_1$ et que $K \subseteq \Omega_2$. Soit $L = H \cap K$. Si L est abélien libre de rang 2, le lemme 2.2 de [24] implique le résultat.

On suppose donc que $L = H \cap K$ est infini cyclique engendré par l'élément c. Quitte à remplacer H et K par des sous-groupes d'indice finis, on peut supposer que H/L et K/L sont infinis cycliques et qu'il existe $a \in H$ et $b \in K$ tels que H est engendré par a et c et que K est engendré par b et c. Posons Z le sous-groupe de G engendré par H et K. En utilisant la proposition 2 de la même manière que dans le lemme 2, on peut supposer que les projections $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de a et b dans Z/L engendrent un sous-groupe libre à deux générateurs.

Posons $S = H *_L K$. Le groupe S s'identifie au groupe fondamental de la variété de Seifert M obtenue en prenant le produit d'un disque à deux trous par un cercle. Cette identification peut toujours être effectuée de telle sorte que l'homomorphisme naturel φ de S dans G applique isomorphiquement les groupes fondamentaux $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ de deux des trois bords de M sur H et K. Soit $\tilde{P}$ le groupe fondamental du troisième bord de M et $\Lambda = \{\tilde{H}, \tilde{K}, \tilde{P}\}$. Comme $\varphi(\tilde{P})$ contient L, $\varphi(\tilde{P})$ n'est pas trivial.

On considère deux cas :

Cas 1. *$\varphi(\tilde{P})$ est infini cyclique.* On montre comme dans le cas 1 du lemme 2 que ce cas n'est pas possible en construisant une relation non triviale dans le sous-groupe libre de Z/L engendré par $\bar{a}$ et $\bar{b}$.

Cas 2. *$\varphi(\tilde{P})$ est abélien libre de rang* 2. Dans ce cas, comme la paire (G, Ω) est atoroïdale, il existe $g \in G$ et $\Omega_3 \in \Omega$ tel que $\varphi(\tilde{P}) = g\Omega_3 g^{-1}$. Si $\Omega_3 = \Omega_1$ ou si $\Omega_3 = \Omega_2$ le lemme 2 implique que $\varphi(S) \subseteq \Omega_1$ ou que $\varphi(S) \subseteq \Omega_1$. Comme $\varphi(S)$ contient H et K cela implique que $\Omega_1 = \Omega_2$ ce qui est impossible. Quitte à remplacer dans Ω le sous-groupe Ω_3 par le sous-groupe $g\Omega_3 g^{-1}$ on peut donc supposer que φ définit un morphisme de paires entre (S, Λ) et (G, Ω). Considérons le diagramme commutatif de suites exactes relatives suivant (les modules de coefficients sont tous isomophes à $\mathbb{Z}$ considéré comme S-module et G-module trivial) :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, mapsto] & H_3(S) \arrow[r, mapsto, "p_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & H_3(S, \Lambda) \arrow[r, mapsto, "\delta_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & H_2(\Lambda) \arrow[r, mapsto, "i_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & H_2(S) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, mapsto] & H_3(G) \arrow[r, mapsto, "p'_*"] & H_3(G, \Omega) \arrow[r, mapsto, "\delta'_*"] & H_2(\Omega) \arrow[r, mapsto, "i'_*"] & H_2(G) \arrow[r, mapsto] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Comme $H_3(S) \simeq H_3(G) \simeq 0$, $H_3(S, \Lambda) \simeq H_3(G, \Omega) \simeq \mathbb{Z}$, $H_2(\Lambda) \simeq \mathbb{Z}^3$ et $H_2(\Omega) \simeq \mathbb{Z}^n$ (avec n égal au nombre de composantes de Ω), ce diagramme devient :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto, "p_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \mathbb{Z} \arrow[r, mapsto, "\delta_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \mathbb{Z}^3 \arrow[r, mapsto, "i_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & H_2(S) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\varphi_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto, "p'_*"] & \mathbb{Z} \arrow[r, mapsto, "\delta'_*"] & \mathbb{Z}^n \arrow[r, mapsto, "i'_*"] & H_2(G) \arrow[r, mapsto] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Comme φ injecte $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ dans Ω_1 et Ω_2, l'application induite φ_* de $H_2(\Lambda)$ dans $H_2(\Omega)$ est non triviale. Considèrons :

– e un générateur de $H_3(S; \Lambda)$
– a un générateur de $H_3(G; \Omega)$
– e_1, e_2, e_3 une base de $H_2(\Lambda)$
– $a_1, \dots, a_n$ une base de $H_2(\Omega)$.

On suppose de plus que les notations sont telles que e_1 et e_2 correspondent aux générateurs de $H_2(\Lambda)$ donnés par $\tilde{H}$ et $\tilde{K}$ et que a_1 et a_2 correspondent aux générateurs de $H_2(\Omega)$ donnés par Ω_1 et Ω_2. En particulier $\varphi_*(e_1)$ et $\varphi_*(e_2)$ sont des multiples de a_1 et de a_2. Comme de plus $\varphi(\tilde{P})$ n'est pas infini cyclique, φ injecte $\tilde{P}$ dans Ω_3 et on peut donc également supposer que $\varphi_*(e_3)$ est un multiple de a_3. En particulier φ_* induit un homomorphisme injectif de $H_2(\Lambda)$ dans $H_2(\Omega)$. Comme le diagramme est commutatif, cela n'est pas possible si le degré de φ est nul. Donc le degré de φ n'est pas nul et le lemme 1 montre que $\varphi(S)$ est d'indice fini dans G. Cela implique comme dans le lemme 2 que G est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert de dimension 3, ce qui contredit le fait que la PD(3)-paire (G, Ω) est atoroïdale. On en déduit que le cas 2 n'est pas possible, d'où le résultat. □

Preuve de la proposition 1. Soient a_1, a_2, deux éléments de G commutant avec h. Il faut montrer que a_1 et a_2 commutent. On va considérer trois cas.

Cas 1. *Les groupes $\langle a_1, h\rangle$ et $\langle a_2, h\rangle$ sont tout deux abéliens libres de rang* 2. Le lemme 3 nous assure alors que a_1 commute avec a_2.

Cas 2. *Le groupe $\langle a_1, h\rangle$ est abélien libre de rang* 2 *et le groupe $\langle a_2, h\rangle$ est infini cyclique.* Le conjugué de $\langle a_1, h\rangle$ par a_2 est alors le groupe $\langle a_2a_1a_2{}^{-1}, h\rangle$ qui est aussi abélien libre de rang 2. D'après le lemme 3, ces 2 groupes sont commensurables. On en déduit que $a_2 \in \mathrm{Comm}_G(\langle a_1, h\rangle)$. Comme $\langle a_1, h\rangle$ est conjugué dans un des sous-groupes du bord Ω de la paire (G, Ω), le lemme 2.2 de [24] montre que $\mathrm{Comm}_G(\langle a_1, h\rangle)$ est PD(2). Comme la paire (G, Ω) est orientable, $\mathrm{Comm}_G(\langle a_1, h\rangle)$ ne peut être isomorphe au groupe fondamental d'une bouteille de klein. On en déduit que $\mathrm{Comm}_G(\langle a_1, h\rangle)$ est abélien libre de rang 2 et a_1 commute avec a_2.

Cas 3. *Les groupes $\langle a_1, h\rangle$ et $\langle a_2, h\rangle$ sont tous deux infinis cycliques.* Considérons le groupe $C = \langle a_1, a_2, h\rangle$. Si C n'est pas abélien, C vérifie les hypothèses de la proposition 2. On en déduit que C a un centre infini cyclique engendré par un élément t et que $C/\langle t\rangle$ est l'extension d'un groupe libre L par un groupe fini. Le groupe L n'est pas trivial sinon $\langle t\rangle$ serait d'indice fini dans C et C serait infini cyclique et donc abélien. On en déduit que le groupe $C/\langle t\rangle$ possède un élément d'ordre infini x'. Si x est un antécédent de x' dans C, $\langle x, t\rangle$ est abélien libre de rang 2. Comme a_1, a_2 et x commutent avec t, le cas 2 successivement appliqué aux groupes $\langle x, h\rangle$, $\langle a_1, h\rangle$ et $\langle x, h\rangle$, $\langle a_2, h\rangle$ montre que x commute avec a_1 et a_2. Donc x appartient au centre $\langle t\rangle$ de C ce qui contredit le choix de x qui se projette dans $C/\langle t\rangle$ sur un élément d'ordre infini. Donc C est abélien.

Le fait que C soit maximal pour la propriété d'être abélien dans G est évident. □

3.2. Centralisateurs dans une PD(3)-paire. Dans cette sous-section, on donne une preuve du théorème 1.

Lemme 4. *Soit* (G, Ω) *une* PD(3)*-paire dans laquelle* G *n'est pas un groupe virtuellement abélien libre de rang* 3. *Soit* Γ *la décomposition JSJ de* G. *On suppose* Γ *non réduite à un sommet. Soit* T *l'arbre de Bass–Serre associé à* Γ. *Soit* γ *un chemin dans* T. *Alors si les stabilisateurs de chacune des arêtes de* γ *ont un élément non trivial* h *en commun, la longueur de* γ *est inférieure où égale à* 2.

Preuve. Remarquons qu'aucun sommet intérieur à γ ne peut être atoroïdal, sinon, d'après le lemme 3, les arêtes de ce sommet stabilisées par h auraient des stabilisateurs commensurables. Cela contredirait le corollaire A1 du théorème A de [23] qui assure que si G se scinde au dessus de sous-groupes PD(2) S et S' et si S et S' sont commensurables, alors $S = S'$. Supposons maintenant que 2 sommets intérieurs a et b de γ soient adjacents et Seifert. Soient G_a et G_b les stabilisateurs de ces sommets. Comme h est commun à deux sous-groupes Ω_1 et Ω_2 de G_a associés à des arêtes de T incidentes à a, h est un élément du sous-groupe normal infini cyclique de G_a. Sinon Ω_1 et Ω_2 auraient en commun h et un élément du sous-groupe normal infini cyclique de G_a et seraient donc commensurables. Cela contredirait à nouveau le corollaire A1 du théorème A de [23]. L'élément h de G est donc commun au sous-groupe normal infini cyclique de G_a et au sous-groupe normal infini cyclique de G_b. Le sous-groupe $\langle G_a, G_b\rangle$ engendré par G_a et G_b a donc un sous-groupe normal infini cyclique engendré par un élément c. Comme $\langle G_a, G_b\rangle$ est le produit amalgamé de G_a et de G_b le long d'un élément de leurs bords, $\langle G_a, G_b\rangle$ est donc un groupe de type Seifert. Soient g_a et g_b des éléments de G_a et G_b n'appartenant pas au sous-groupe normal infini cyclique de $\langle G_a, G_b\rangle$. Alors $g_a.g_b$ ou $(g_a.g_b)^2$ commute avec c et n'est conjugué dans aucun groupe de sommet de la décomposition JSJ Γ de G. Cela contredit la propriété 3) de la définition 2. Le chemin γ contient donc au plus deux arêtes. □

Lemme 5. *Soit* (G, Ω) *une* PD(3)*-paire admettant une décomposition JSJ non triviale. Soit* h *un élément non trivial de* G *et* $C := C_G(h)$ *son centralisateur dans* G. *Alors si* h *fixe un sommet* v *de l'arbre de Bass–Serre* T *associé à la décomposition JSJ de* G, C *fixe un sommet de* T.

Preuve. La preuve découle de l'affirmation suivante :

Affirmation. *Si* a *est un élément de* C *alors* a *fixe un sommet* v' *de* T *situé à une distance inférieure ou égale à* 2 *de* v.

Preuve. Si $\langle a, h\rangle$ est infini cyclique, il existe un élément t de G et des entiers n et m tels que : $t^n = a$ et $t^m = h$. En particulier t^m fixe le sommet v de T. L'élément t fixe donc un sommet v' de T. Cela implique que h fixe les sommets v et v' de T.

Le lemme 4 assure alors que v' est à distance au plus 2 de v. L'affirmation est donc vraie dans le cas où $\langle a, h\rangle$ est infini cyclique.

Si $\langle a, h\rangle$ est abélien libre de rang 2, la propriété 3) de la définition 2 assure que $\langle a, h\rangle$ fixe un sommet v' de T. L'argument précédent assure donc à nouveau que v' se trouve à distance au plus 2 de v. Cela termine la preuve de l'affirmation. □

Pour tout $a \in C$ on a alors : $d(v, a(v)) \leq d(v, v') + d(v', a(v)) \leq d(v, v') + d(a(v'), a(v)) \leq 4$. On en déduit que C déplace v à distance bornée de lui même et donc que C fixe un sommet de T. □

Nous donnons maintenant la preuve du théorème 1.

Preuve du théorème 1. On peut supposer que G n'est pas virtuellement abélien libre de rang 3, sans quoi le résultat est connu. De plus quitte à passer à un sous-groupe de G d'indice au plus 2, on peut supposer que la paire (G, Ω) est orientable. Si C n'est pas abélien, il existe deux éléments a_1 et a_2 de C qui ne commutent pas. En particulier, le groupe K engendré par a_1,a_2 et h satisfait les hypothèses de la proposition 2. Le centre de K est donc infini cyclique engendré par un élément c et le groupe quotient $K/\langle c\rangle$ est l'extension d'un groupe libre L par un groupe fini. Comme K n'est pas abélien, L n'est pas trivial et contient donc un élément non trivial x. En particulier le groupe $\langle x, c\rangle$ est abélien libre de rang 2 et, comme h est une puissance de c, le groupe $\langle x, h\rangle$ est également abélien libre de rang 2. La propriété 3) de la définition 2 montre que h fixe un sommet de l'arbre de Bass–Serre T associé à la décomposition JSJ Γ de G. Le lemme 5 implique alors que C fixe un sommet v de T. Comme C n'est pas abélien v est de Seifert. Les propositions II.4.5 et II.4.7 de [18] montrent alors que C est conjugué à un sous-groupe d'indice au plus 2 d'un des morceaux de Seifert de la décomposition JSJ de G.

Si C est abélien et si C n'est pas infini cyclique, la classification des groupes résolubles de dimension cohomologique 2 donnée dans [14] permet de conclure.

Pour montrer la dernière affirmation du théorème, supposons h infiniment divisible. Si h ne fixe aucun sommet de l'arbre de Bass–Serre T associé à la décomposition JSJ de G, h a un axe invariant unique, A, sur lequel h agit par translation avec la longueur de translation $l(h) = d(x, hx) > 0$ ou x désigne un élément quelconque de A. Cette longueur de translation est additive, c'est a dire vérifie l'égalité $l(h^n) = n \times l(h)$ pour chaque entier n. Si h est infiniment divisible, pour chaque entier m, il existe un élément a de G tel que $a^m = h$. On aurait alors $l(h) = m \times l(a)$ et $l(h)$ serait infini. C'est absurde. L'élément h de G fixe donc un sommet de T. Le lemme 5 montre alors que C fixe un sommet v de T. Ce sommet n'est pas Seifert car cela contredirait le fait qu'aucun groupe fondamental de variété de Seifert ne contient d'élément infiniment divisible ([28]). On en déduit que v est atoroïdal et donc d'après la proposition 1 que C est abélien. La classification des groupes résolubles de dimension cohomologique 2 donnée dans [14] montre que C est isomorphe à un sous-groupe non cyclique des rationels additifs. □

Corollaire 1. *Soit* (G, Ω) *une* PD(3)*-paire dans laquelle G n'est pas virtuellement abélien libre de rang* 3. *Soit H un sous-groupe de G non virtuellement abélien et à centre non trivial . Alors H est conjugué à un sous-groupe d'un des morceaux de Seifert de la décomposition JSJ de G. En particulier, H est un groupe de variété de Seifert de dimension* 3.

Preuve. Soient h, un élément non trivial du centre de H, et $C_G(h)$ le centralisateur de h dans G. Comme $H \subseteq C_G(h)$ et comme H n'est pas virtuellement abélien, le théorème 1 montre que $C_G(h)$ est nécessairement conjugué à un des morceaux de Seifert de la décompostion JSJ de G. □

3.3. Propriété max-c. Le but de cette section est de montrer la proposition 3 qui assure que toutes les PD(3)-paires possédent la propriété max-c. Remarquons que Kropholler a prouvé dans [22] que les groupes fondamentaux de variété de dimension 3 possèdent cette propriété.

Definition 6 (propriété max-c). On dit qu'un groupe G possède la propriété max-c lorsque toute suite croissante $\{0\} \neq C_G(X_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(X_n) \subseteq \cdots$ de centralisateurs de sous-ensembles $X_1, \dots, X_n, \dots$ de G devient stationnaire.

Proposition 3. *Soit* (G, Ω) *une* PD(3) *paire. Alors G possède la propriété max-c.*

Preuve. Quitte à passer à un sous-groupe d'indice 2 de G on peut se contenter de montrer le résultat dans le cas où la paire (G, Ω) est orientable. Si G est virtuellement abélien libre de rang 3, G est le groupe fondamental d'une variété de dimension 3 et possède donc la propriété max-c ([22]). On considère la décomposition JSJ de G. On distingue deux cas.

Cas 1. *La décomposition JSJ de G est triviale : elle n'est composée que d'un sommet Seifert ou atoroïdal.* Si ce sommet est Seifert alors G est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert de dimension 3 et possède donc la propriété max-c d'après [22].

On suppose donc le sommet atoroïdal. Considérons une suite croissante $\{0\} \neq C_G(X_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(X_n) \subseteq \cdots$ de centralisateurs de sous-ensembles de G. On montre que pour tout $h_1 \in X_1, C_G(X_1) = C_G(h_1)$. Il est clair que $C_G(X_1) \subseteq C_G(h_1)$. Soit x un élément de X_1 distinct de h_1 et g un élément non trivial de $C_G(X_1)$. Alors g commute avec x et h_1. Donc x et h_1 sont des éléments de $C_G(g)$. D'après la proposition 1, $C_G(g)$ est abélien donc x commute avec h_1 et comme $C_G(h_1)$ est abélien tout élément de G commutant avec h_1 commute avec x. Donc $C_G(h_1) \subseteq$

$C_G(X_1)$. On montre de la même manière que pour tout n, si $h_n \in X_n$ alors $C_G(X_n) = C_G(h_n)$. La suite croissante $\{0\} \neq C_G(X_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(X_n) \subseteq \cdots$ devient donc une suite $\{0\} \neq C_G(h_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(h_n) \cdots$. Comme G est atoroïdal, la proposition 1 implique que les centralisateurs d'éléments dans G sont abéliens et maximaux pour la propriété d'être abélien. La suite $C_G(h_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(h_n) \subseteq \cdots$ est donc constante. Donc G possède la propriété max-c.

Cas 2. *La décomposition JSJ de G a au moins une arête.* Dans ce cas appelons T l'arbre de Bass–Serre associé à la décomposition JSJ de G. Considérons une suite croissante $\{0\} \neq C_G(X_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(X_n) \subseteq \cdots$ de centralisateurs de sous-ensembles de G.

Affirmation. *À partir d'un certain rang les $C_G(X_n)$ ne sont pas infinis cycliques.*

Preuve. Si chacun de ces centralisateurs est infini cyclique, et si une infinité de ces inclusions sont strictes, alors l'ensemble $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_G(X_i)$ est un sous-groupe abélien de génération infinie de G. Comme A n'est pas de dimension cohomologique 3 sans quoi il serait de génération finie, ni de dimension cohomologique 1, sans quoi il serait libre, A est de dimension cohomologique 2. D'après la classification des groupes résolubles de dimension cohomologique 2 donnée dans [14], A est isomorphe à un sous-groupe non cyclique des rationnels additifs et possède donc un élément infiniment divisible h. Tout les groupes $C_G(X_i)$, $i \in \mathbb{N}$, seront donc contenus dans le centralisateur d'un élément h infiniment divisible dans G. D'après le théorème 1 la suite d'inclusions $C_G(X_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(X_n) \subseteq \cdots$ a donc lieu dans le conjugué du stabilisateur d'un des sommets atoroïdaux de la décomposition JSJ de G. D'après le cas 1 c'est impossible. □

L'affirmation permet de supposer que $C_G(X_1)$ n'est pas infini cyclique. D'après le théoréme 1, pour chaque entier n, $C_G(X_n)$ fixe donc un sommet v_n de T. Si v_1 est atoroïdal et si $C_G(X_1)$ contient un élément infiniment divisible h, alors la suite d'inclusions $\{0\} \neq C_G(X_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(X_n) \subseteq \cdots$ a lieu dans le centralisateur de h et donc dans le stabilisateur d'un sommet de T d'après le théorème 1 et le lemme 5. Elle est donc stationnaire d'après le cas 1.

On peut donc supposer que $C_G(X_1)$ ne contient pas d'éléments infiniment divisible ce qui implique que $C_G(X_1)$ contient un sous-groupe abélien libre de rang 2. On en déduit que chaque $C_G(X_n)$ contient le même sous-groupe H abélien libre de rang 2. Supposons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sommets de T ne soit pas stationnaire et considérons le plus petit entier m pour lequel le sommet de v_m fixé par $C_G(X_m)$ est distinct de v_1. Alors H fixe v_1 et v_m. Le corollaire A1 du théorème A de [24] implique alors que v_m est adjacent à v_1 et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_{n+1} est égal à v_1 ou à v_m. Quitte à remplacer la suite d'inclusions $\{0\} \neq C_G(X_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(X_n) \subseteq \cdots$ par une sous-suite, on peut donc considèrer que tous les $C_G(X_n)$ fixent le sommet v_1 de T. D'après le cas 1, la suite croissante $\{0\} \neq C_G(X_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(X_n) \subseteq \cdots$ devient alors stationnaire. □

Remarque. Il découle de Kropholler [22] que le plus petit rang à partir duquel la suite d'inclusions $\{0\} \neq C_G(X_1) \subseteq \cdots \subseteq C_G(X_n) \subseteq \cdots$ est stationnaire est inférieur ou égal à 16.

3.4. Commensurateurs dans une PD(3)-paire. On donne maintenant une preuve du théorème 2.

Preuve du théorème 2. Supposons $|p| \neq |q|$. Posons $H = \langle a, b\rangle$. La preuve du théorème consiste à montrer que H admet une présentation de la forme $\langle x, y; yxy^{-1} = y^m\rangle$. Cela contredit le résultat de Kapovich et Kleiner [20] qu'aucun groupe de Baumslag–Solitar non trivial (i.e. de présentation $\langle a, b; ab^pa^{-1} = b^q\rangle$ avec $|p| \neq |q|$) ne peut être réalisé comme sous-groupe d'un groupe PD(3).

Les deux faits importants suivants sont dus à Kropholler [22].

Fait 1. $\mathrm{Comm}_H(b) = H$. En effet la relation $ab^pa^{-1} = b^q$ implique que $a \in \mathrm{Comm}_H(b)$. Donc $\mathrm{Comm}_H(b) = H$. Pour chaque g dans H il existe donc un entier $p(g)$ et un entier $q(g)$ tel que $gb^{p(g)}g^{-1} = b^{q(g)}$.

Fait 2. L'application Ψ, $H \overset{\Psi}{\longmapsto} (Q^+, \times)$ qui à g associe $\left|\frac{p(g)}{q(g)}\right|$ est un homomorphisme.

En effet :

$$\begin{aligned} hgb^{p(g)p(h)}g^{-1}h^{-1} &= (hgb^{p(g)}g^{-1}h^{-1})^{p(h)} \\ &= (hb^{q(g)}h^{-1})^{p(h)} \\ &= (hb^{p(h)}h^{-1})^{q(g)} \\ &= b^{q(h)q(g)}, \end{aligned}$$

donc $\Psi(hg) = \Psi(h)\Psi(g)$. De plus Ψ est non trivial car par hypothèse $|p| \neq |q|$.

Affirmation 1. *H fixe un sommet de l'arbre de Bass–Serre T associé à la décomposition JSJ de G.*

Preuve. Remarquons dans un premier temps que b fixe un sommet v de T. Sinon la théorie de Bass–Serre implique que b a un axe invariant, A, sur lequel b agit par translation avec la longueur de translation $l(b) = d(x, bx) \neq 0$ où $x \in A$. Cette longueur de translation est additive et invariante par conjugaison de telle sorte que $l(b^n) = |n| \times l(b)$ et $l(aba^{-1}) = l(b)$. Appliquées à b ces propriétés impliquent $l(ab^pa^{-1}) = l(b^q)$ c'est à dire $|p| \times l(b) = |q| \times l(b)$ et donc $|p| = |q|$ contrairement à l'hypothèse. Pour chaque élément g de H on a : $d(g^{-1}(v), b^{p(g)}g^{-1}(v)) = d(v, gb^{p(g)}g^{-1}(v)) = d(v, b^{q(g)}v) = 0$. Donc, $b^{p(g)}$ fixe $g^{-1}(v)$. Comme $b^{p(g)} \neq \{e\}$ fixe v et $g^{-1}(v)$ le lemme 4 implique que $g^{-1}(v)$ est à distance au plus 2 de v. Donc H envoie v dans un voisinage borné de v. Le groupe H fixe donc un sommet de T. □

Le stabilisateur de ce sommet ne peut pas être de type Seifert car d'après le théorème VI.2.1 de [18], dans un groupe fondamental de variété de Seifert aucune paire d'éléments ne peut vérifier de relation de Baumslag–Solitar non triviale. Le sommet v est donc atoroïdal. Considérons l'homomorphisme Ψ défini ci-dessus.

Affirmation 2. $\ker(\Psi)$ *est abélien.*

Preuve. Si $g \in \ker(\Psi)$, alors $gb^{p(g)}g^{-1} = b^{p(g)}$ ou $gb^{p(g)}g^{-1} = b^{-p(g)}$. Donc soit g commute avec $b^{p(g)}$ soit g^2 commute avec $b^{p(g)}$. Dans le second cas, le groupe engendré par les éléments $b^{p(g)}$, g et g^2 a un centre non trivial contenant g^2. Il est donc inclus dans le centralisateur de g^2 dans G_v. Comme G_v est atoroïdal la proposition 1 implique que ce centralisateur est abélien et donc que g commute avec $b^{p(g)}$. Si g_1 et g_2 sont deux éléments de $\ker\Psi$, g_1 commute avec $b^{p(g_1)}$ et g_2 commute avec $b^{p(g_2)}$. Donc g_1 et g_2 appartiennent à $C_{G_v}(b^{p(g_1)p(g_2)})$ qui est abélien. Donc g_1 et g_2 commutent et $\ker(\Psi)$ est abélien. □

Puisque $b \in \ker(\Psi)$, $\mathrm{Im}(\Psi)$ est engendrée par $\Psi(a)$. Comme par hypothèse Ψ est non triviale, $\Psi(a) \neq 1$. Le groupe $\mathrm{Im}(\Psi)$ est donc infini cyclique. Donc H est une extension d'un groupe abélien par un groupe infini cyclique. En particulier H est résoluble. Le groupe H ne peut pas être de dimension cohomologique 3, sinon d'après [30] H serait PD(3), donc d'indice fini dans G, et d'après [31] G serait isomorphe au groupe fondamental d'une variété de dimension 3. Cela contredirait le fait ([22] et [29]) qu'un tel groupe ne contient aucun sous-groupe de Baumslag–Solitar non trivial. Comme H n'est pas de dimension cohomologique 1 sans quoi il serait libre, H est de dimension cohomologique 2. La classification des groupes résolubles de dimension cohomologiques 2 [14] et l'hypothèse $|p| \neq |q|$ montrent que H admet nécessairement une présentation de la forme $\langle x, y;\, yxy^{-1} = y^m\rangle$. □

Les théorèmes 1 et 2 permettent de donner une description précise du commensurateur d'un élément non trivial dans une PD(3)-paire.

Proposition 4. *Soit* (G, Ω) *une* PD(3)*-paire. Soit h un élément non trivial de G. Alors si h est non infiniment divisible* $\mathrm{Comm}_G(h)$ *est nécessairement d'un des quatre types suivants :*

(1) $\mathrm{Comm}_G(h)$ *est infini cyclique.*

(2) $\mathrm{Comm}_G(h)$ *est abélien libre de rang* 2 *ou isomorphe au groupe fondamental d'une bouteille de Klein.*

(3) $\mathrm{Comm}_G(h)$ *est isomorphe au groupe fondamental d'une variété de Seifert de dimension* 3.

Si h est infiniment divisible, $\mathrm{Comm}_G(h)$ *contient un sous-groupe d'indice au plus* 2 *isomorphe à un sous-groupe non cyclique des rationnels additifs.*

Preuve. Soit a un élément de $\mathrm{Comm}_G(h)$ distinct de h. Par définition de $\mathrm{Comm}_G(h)$ il existe des entiers $p(a)$ et $q(a)$ tels que a et h sont liés par une relation du type $ah^{p(a)}a^{-1} = h^{q(a)}$. D'après le théorème 2 $|p(a)| = |q(a)|$. On en déduit que soit $a \in C_G(h^{p(a)})$ soit $a^2 \in C_G(h^{p(a)})$. D'après la proposition 3 la suite de centralisateurs $C_G(h) \subseteq C_G(h^2) \cdots \subseteq C_G(h^q) \cdots$ est stationnaire. Il existe donc un entier p tel que pour tout $a \in \mathrm{Comm}_G(h)$ on ait soit $a \in C_G(h^p)$ soit $a^2 \in C_G(h^p)$. Le théorème 1 permet de conclure. □

Références

[1] R. Bieri, *Homological dimensions of discrete groups*. Queen Mary College Math. Notes, 1976. Zbl 0357.20027 MR 0466344

[2] R. Bieri and B. Eckman, Groups with homological duality generalizing Poincaré duality. *Invent. Math.* **20** (1973), 103–124. Zbl 0274.20066 MR 0340449

[3] R. Bieri and B. Eckman, Relative homology and Poincaré duality for groups pairs. *J. Pure Appl. Algebra* **13** (1978), 277–319. Zbl 0392.20032 MR 0509165

[4] R. Bieri and J. A. Hillman, Subnormal subgroups in 3-dimensional Poincaré duality groups. *Math. Z.* **206** (1991), 67–69. Zbl 0695.57001 MR 1086813

[5] B. H. Bowditch, Planar groups and the Seifert conjecture. *J. Reine Angew. Math.* **576** (2004), 11–62 Zbl 1056.20029 MR 2099199

[6] K. S. Brown, *Cohomology of groups*. Grad. Texts in Math. 87, Springer-Verlag, New York, Berlin 1982. Zbl 0584.20036 MR 0672956

[7] A. J. Casson and D. Jungreis, Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds. *Invent. Math.* **118** (1994), 441–456. Zbl 0840.57005 MR 1296353

[8] F. Castel, Centralisateurs et commensurateurs dans une PD(3)-paire. *Thèse*, 2004.

[9] M. W. Davis, The cohomology of a coxeter group with group rings coefficients. *Duke Math. J.* **91** (1998), 297–314. Zbl 0995.20022 MR 1600586

[10] M. J. Dunwoody and M. E. Sageev, JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups. *Invent. Math.* **135** (1999), 25–44. Zbl 0939.20047 MR 1664694

[11] M. J. Dunwoody and E. L. Swenson, The algebraic torus theorem. *Invent Math.* **140** (2000), 605–637. Zbl 1017.20034 MR 1760752

[12] B. Eckman, Poincaré duality groups of dimension 2 are surface groups. In *Combinatorial group theory and topology* (ed by S. M. Gersten and J. R. Stallings), Ann. of Math. Stud. 111, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987. Zbl 0656.20037 MR 0895608

[13] D. Gabai, Convergence groups are Fuchsian groups. *Ann. of Math* **136** (1992), 447–510. Zbl 0785.57004 MR 1189862

[14] D. Gildenhuys, Classification of soluble groups of cohmological dimension two. *Math. Z.* **166** (1979), 21–25. Zbl 0414.20032 MR 0526863

[15] J. A. Hillman, Seifert fibre spaces and Poincaré duality groups. *Math. Z.* **190** (1985), 365–369. Zbl 0554.57011 MR 0806894

[16] J. A. Hillman, *Four manifolds, geometry and knots*. Geom. Topol. Monogr. 5, Geometry & Topology Publications, Coventry, 2002. Zbl 1087.57015 MR 1943724

[17] J. A. Hillman, Homomorphism of nonzero degree between PD_n-groups. *J. Austral. Math. Soc.* **77** (2004), 335–348. Zbl 02147001 MR 2099805

[18] W. H. Jaco and P. B. Shalen, Seifert fibered spaces in 3-manifolds. *Mem. Amer. Math. Soc.* **21** (220), 1979. Zbl 0415.57005 MR 0539411

[19] K. Johannson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundary*. Lecture Notes in Math. 761, Springer-Verlag, Berlin 1979. Zbl 0412.57007 MR 0551744

[20] M. Kapovich and B. Kleiner, Coarse Alexander duality and duality groups. *J. Differential Geom.* **69** (2005), 279–352. Zbl 1086.57019 MR 2168506

[21] P. H. Kropholler, An analogue of the torus decomposition theorem for certain Poincaré duality groups. *Proc. London. Math. Soc.* **60** (1990), 503–529. Zbl 0704.20023 MR 1044309

[22] P. H. Kropholler, A note on centrality in 3-manifolds groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **107** (1990), 261–266. Zbl 0709.57011 MR 1027778

[23] P. H. Kropholler and M. A. Roller, Splittings of Poincaré duality groups. *Math. Z.* **197** (1988), 421–438. Zbl 0623.20038 MR 0926850

[24] P. H. Kropholler and M. A. Roller, Splittings of Poincaré duality groups. II. *J. London Math. Soc.* **38** (1988), 410–240. Zbl 0687.20045 MR 0972126

[25] G. Mess, The Seifert conjecture and groups wich are coarse quasiisometric to planes. *Preprint*.

[26] P. Scott and G. A. Swarup, Regular neighboroods and canonical decompositions for groups. *Astérisque* **289** (2003). Zbl 1036.20028 MR 2032389

[27] P. Scott, The symmetry of intersections numbers in group theory. *Geom. Topol.* **2** (1998), 11–29. Zbl 0897.20029 MR 1608688

[28] P. Shalen, Infinitely divisible elements in 3-manifolds groups. In *Knots, Groups, and 3-Manifolds : Papers dedicated to the memory of R. H. Fox* (ed. by L. P Neuwirth), Ann. of Math. Stud. 84, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1975, 293–335. Zbl 0341.57002 MR 0375280

[29] P. Shalen, Three-manifolds and Baumslag-Solitar groups. *Topology Appl.* **110** (2001), 113–118. Zbl 0976.57002 MR 1804702

[30] R. Strebel, A remark on subgroups of infinite index in Poincaré duality groups. *Comment. Math. Helv.* **52** (1977), 317–324. Zbl 0365.20040 MR 0457588

[31] C. B. Thomas, Splitting theorems for certain PD_3 groups. *Math. Z.* **186** (1984), 201–209. Zbl 0546.20033 MR 0741302

[32] P. Tukia, Homeomorphic conjugates of Fuchsian groups. *J. Reine Angew. Math.* **391** (1988), 1–54. Zbl 0644.30027 MR 0961162

[33] C. T. C. Wall, The geometry of abstract groups and their splittings. *Rev. Mat. Complut.* **16** (2003), 5–101. Zbl 1059.20039 MR 2031877

Received March 7, 2005

Fabrice Castel, Université Paul Sabatier, Laboratoire E. Picard, UMR 5580, UFR MIG, 118, Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 04, France

E-mail: castel@picard.ups-tlse.fr