Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 82 (2007)

Artikel: Topologie locale des espaces de feuilletages en surfaces des variétés fermées de dimension 3

Autor: Larcanché, Audrey

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-98888

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Comment. Math. Helv. 82 (2007), 385–411 **Commentarii Mathematici Helvetici**
© Swiss Mathematical Society

Topologie locale des espaces de feuilletages en surfaces des variétés fermées de dimension 3

Audrey Larcanché

Résumé. Dans cet article, on montre que, sur toute variété fermée et orientable de dimension 3, deux feuilletages de codimension 1 qui sont orientables, tendus et suffisamment proches sont homotopes parmi des feuilletages présentant (en général) des composantes de Reeb.

Classification mathématique par sujets. 53C12, 57D30.

Mots clefs. Feuilletage tendu, composante de Reeb, homotopie.

1. Introduction

Étant donnés deux feuilletages $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de même dimension d sur une variété M, peut-on déformer continûment $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$? Si une telle déformation existe, les champs de plans tangents $T\mathcal{F}_1$ et $T\mathcal{F}_2$ sont homotopes dans l'ensemble des sous-fibrés de dimension d de TM. Mais cette condition n'est pas clairement suffisante : pour être tangent à un feuilletage, un champ de plans sur M doit vérifier une condition d'intégrabilité dite de Frobenius ([12], pp. 163–171) et on ne sait pas si parmi les homotopies de $T\mathcal{F}_1$ à $T\mathcal{F}_2$, l'une d'elles est constamment intégrable.

Dans la suite, on se place sur une variété M fermée, orientable et de dimension 3 sauf mention contraire. Tous les objets considérés seront de classe C^∞ et on notera $\mathbb{F}_1(M)$ l'espace des feuilletages orientables de codimension 1 sur M muni de la topologie C^∞ (voir §2.1).

Théorème 1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage tendu de $\mathbb{F}_1(M)$ (voir §2.5). Alors, il existe un voisinage $V(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{F}_1(M)$ tel que pour tout feuilletage $\mathcal{F}'$ dans $V(\mathcal{F})$, on peut trouver une application continue $f\colon [0,1] \to \mathbb{F}_1(M)$ telle que $f(0) = \mathcal{F}$ et $f(1) = \mathcal{F}'$.*

Ce résultat ne nous permet pas de dire si l'espace des feuilletages transverses à une fibration en cercles est localement connexe par arcs puisque les feuilletages considérés au cours de l'homotopie ne restent pas dans $V(\mathcal{F})$ par construction. En particulier,

le théorème ne répond pas à la conjecture de Rosenberg selon laquelle l'espace des feuilletages de codimension 1 du tore $\mathbb{T}^3$ transverses à la fibration naturelle de $\mathbb{T}^3$ sur $\mathbb{T}^2$ est connexe par arcs (voir §3.4). Toutefois, on a un peu plus que le théorème 1 :

Théorème 2. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage tendu sur M. Il existe un voisinage $V(\mathcal{F})$ de $\mathcal{F}$ dont l'inclusion dans $\mathbb{F}_1(M)$ est homotope à une application constante (cependant, cette homotopie n'est pas une rétraction* a priori).

Enfin, le théorème 2 prend une forme plus globale dans un cas particulier intéressant. Supposons que M est l'espace total d'une fibration localement triviale en cercles sur une surface de Riemann fermée de genre $g \geq 1$ et supposons vérifiée l'*inégalité de Milnor–Wood* $|\chi(M)| \leq 2g-2$ où $\chi(M)$ est la classe d'Euler du fibré – ceci pour que l'espace $\mathcal{F}$ des feuilletages de M transverses aux fibres ne soit pas vide. Alors, on a le

Théorème 3. *$\mathcal{F}$ est homotope à un point dans $\mathbb{F}_1(M)$.*

Plan de cet article. Au paragraphe 2 on fait quelques rappels utiles. Dans une troisième partie on motive le problème par quelques exemples. La section 4 contient la construction-clef de ce travail ; elle consiste à trouver une section continue de l'application ∂ qui associe à un feuilletage du tore solide sa trace sur le bord dudit tore. Ceci se fait en adaptant une construction de Thurston qui fournissait, par une méthode un peu différente, une section *a priori* discontinue de ∂. Au paragraphe 5, on prouve d'abord le théorème 3 puis le théorème 2. Les deux preuves empruntent le même chemin, mais dans la seconde il y a des difficultés supplémentaires à lever car on contrôle moins la géométrie de $\mathcal{F}$ et plus du tout celle de M.

Remerciements. Je tiens à remercier tout particulièrement Michel Belliart qui m'a prodigué de nombreux conseils et encouragements au cours de la rédaction de cet article. Je tiens également à remercier le referee dont les suggestions ont grandement contribué à améliorer la première version de cet article. Pour les mêmes raisons, je remercie également Christian Bonatti et Patrice Le Calvez, rapporteurs de ma thèse dont cet article est extrait.

2. Préliminaires

Dans cette section, on décrit les outils principaux utilisés dans la preuve de nos théorèmes.

2.1. Topologie des espaces de feuilletages. Notons $G_1(m)$ la grassmannienne des plans de $T_m(M)$ et $G_1(M)$ le fibré en grasmanniennes au-dessus de M obtenu en

associant à tout plan tangent à M son point base (ce fibré est localement trivial et a pour groupe de structure $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$). Étant donné un feuilletage $\mathcal{F}$ de M, on peut lui associer son champ tangent $T\mathcal{F}$ qui est une section de $G_1(M)$ et l'application $\mathcal{F} \mapsto T\mathcal{F}$ est injective. Identifiant $\mathbb{F}_1(M)$ à son image par celle-ci, dans la suite, on munit $\mathbb{F}_1(M)$ de la topologie induite par son inclusion dans l'espace des sections C^∞ de $G_1(M)$ muni de la topologie de Whitney. Le fait suivant, que nous utiliserons régulièrement, est alors évident :

Fait. *Soit K un compact de M. Au-dessus de K donnons-nous un champ continu $k \mapsto \tau_k$, soit de droites, soit de plans tangent(e)s à M. Alors, l'ensemble des feuilletages $\mathcal{F} \in \mathbb{F}_1(M)$ tels que $T_k\mathcal{F}$ soit transverse à τ_k en tout point de K est un ouvert de $\mathbb{F}_1(M)$.*

2.2. Voisinages tubulaires feuilletés. Nous rappelons rapidement le fait suivant :

Proposition 2.2.1. *Si τ est une courbe fermée simple transverse à un feuilletage de $\mathbb{F}_1(M)$, tout voisinage tubulaire assez petit de τ s'identifie à $\tau \times \mathbb{D}^2$ par un difféomorphisme envoyant les feuilles sur les disques $\{*\} \times \mathbb{D}^2$.*

Remarque 2.2.2. C'est une particularité des feuilletages orientables en surfaces de codimension 1 : lorsque M est une variété de dimension n munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q et N une sous-variété fermée de dimension q transverse à $\mathcal{F}$, il existe bien un voisinage tubulaire U de N dans M et une fibration p de U sur N de fibre $\mathbb{R}^{n-q}$ tels que $\mathcal{F}$ coïncide avec la fibration sur U ; cependant, cette fibration n'est plus en général triviale et U n'est donc plus homéomorphe au produit de $\mathbb{R}^{n-q}$ par N (cette propriété n'a lieu que si le fibré normal à N dans M est trivial).

2.3. Un problème de lissage. Soient M une variété fermée orientable de dimension n et Σ une hypersurface fermée transversalement orientable intérieure à M. Munissons M d'un champ de vecteurs auxiliaire X de classe C^∞ partout transverse à Σ (un tel champ existe bien puisque le fibré normal à Σ dans M est trivial). Notons $\Phi(t, x)$ l'image de x par le flot de X au temps t. Si P est une partie quelconque de M et si r est un réel strictement positif, nous convenons de noter P^r la partie $\Phi(]-r, r[\times P)$ de M. Fixons enfin un réel $\varepsilon > 0$; le lemme suivant nous sera utile :

Lemme 2.3.1. *Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des feuilletages transversalement orientables, transverses à Σ et de codimension 1 sur M. Soit $\mathcal{T}_X$ le sous-ensemble de $\mathcal{T}$ dont les feuilletages sont invariants par le flot local de X sur Σ^ε. Alors, il existe une application continue $h\colon [0, 1] \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ telle que pour tout $\mathcal{F} \in \mathcal{T}$, on ait $h(0, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ et $h(1, \mathcal{F}) \in \mathcal{T}_X$.*

Preuve. Définissons d'abord une homotopie auxiliaire de M. Pour cela, nous introduisons une fonction ρ de $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$ dans lui-même, impaire, croissante, de classe

C^∞ telle que $\rho(s) = 0$ pour $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\rho'(s) > 0$ pour $|s| \in]\varepsilon, 2\varepsilon]$ et $\rho(s) = s$ au voisinage de -2ε et 2ε. Ensuite, pour $t \in [0, 1]$ et $x \in M$, posons $\varphi_t(x) = x$ si $x \in M - \Sigma^{2\varepsilon}$ et $\varphi_t(\Phi(s, y)) = \Phi((1-t)s + t\rho(s), y)$ si $x = \Phi(s, y) \in \Sigma^{2\varepsilon}$ avec $y \in \Sigma$ et $s \in [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$. L'application $(t, x) \mapsto \varphi_t(x)$ est notre homotopie auxiliaire.

Pour $t \in [0, 1[$, l'application $\varphi_t : M \to M$ est un difféomorphisme de classe C^∞. Or, $\mathcal{F}$ est transversalement orientable donc il existe une forme de Pfaff $\alpha_{\mathcal{F}}$ qui le définit. Pour tout $t \in [0, 1[$, la forme différentielle $\alpha^t_{\mathcal{F}} := \varphi_t^*(\alpha_{\mathcal{F}})$ est sans singularité et intégrable ; elle définit donc un feuilletage $\mathcal{F}_t$ de codimension 1 qui ne dépend que de $\mathcal{F}$ et en dépend continûment. Pour $t = 1$, φ_1 n'est plus un difféomorphisme, mais nous pouvons quand même définir la forme $\alpha^1_{\mathcal{F}} := \varphi_1^*(\alpha_{\mathcal{F}})$ et constater que cette forme est non-singulière : en effet, elle l'est en dehors de Σ^ε car φ_1 est un difféomorphisme sur $M - \Sigma^\varepsilon$; et en restriction à Σ^ε, on constate que $\alpha^1_{\mathcal{F}}$ coïncide avec le tiré en arrière de la restriction (non singulière) de $\alpha_{\mathcal{F}}$ à Σ par la projection $\Phi(s, y) \mapsto y$ de Σ^ε sur Σ. Puisque $\alpha^1_{\mathcal{F}}$ est non singulière, cette forme (qui est intégrable car image inverse d'une forme $\alpha_{\mathcal{F}}$ qui l'est) définit un feuilletage $\mathcal{F}_1$ qui est dans $\mathcal{T}_X$ par construction. L'application $h(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}_t$ a donc les propriétés annoncées. □

Remarque 2.3.2. Ce résultat est encore vrai lorsque la variété est à bord et Σ au bord de M : il suffit de prendre le champ X rentrant dans M et de considérer son demi-flot positif Φ.

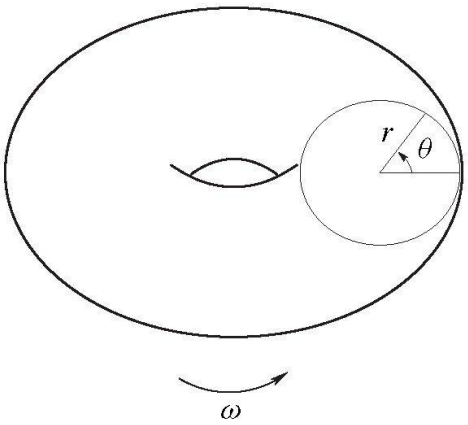
Dans la suite de ce travail, nous aurons à appliquer le lemme 2.3.1 plusieurs fois de suite relativement à des hypersurfaces $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ de M qui ne seront pas disjointes. Nous faisons dans ce but la remarque suivante :

Remarque 2.3.3. Soit $\lambda > 0$ et soit P une partie de M. Soit $\mathcal{T}_{P,\lambda}$ la partie de $\mathcal{T}$ formée par les feuilletages auxquels X est tangent en tout point de P^λ (nous supposons cette partie non vide). Alors, si $\lambda \geq 3\varepsilon$, le champ X est encore tangent à tous les feuilletages de $h(1, \mathcal{T}_{P,\lambda})$ en tout point de P^ε ; autrement dit, on a l'inclusion $h(1, \mathcal{T}_{P,3\varepsilon}) \subset \mathcal{T}_{P,\varepsilon}$.

Preuve. Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{T}_{P,\lambda}$ avec $\lambda \geq 3\varepsilon$. Pour tout $p \in P$, l'intervalle de X-orbite $I = [\Phi(-\lambda, p), \Phi(\lambda, p)]$ est tangent à $\mathcal{F}$ par hypothèse. Par construction, l'intervalle de X-orbite $J = \varphi_1(I)$ sera tangent à $h(1, \mathcal{F})$. Mais, notre définition de φ_1 fait que J a la forme $[\Phi(\alpha - \lambda, p), \Phi(\beta + \lambda, p)]$, où α et β sont des réels qui dépendent de p et appartiennent à $[-2\varepsilon, 2\varepsilon]$. Aussi, puisque $\lambda \geq 3\varepsilon$, on a $[\Phi(-\varepsilon, p), \Phi(\varepsilon, p)] \subset J$; autrement dit, l'intervalle $\{p\}^\varepsilon$ est tangent à $h(1, \mathcal{F})$. □

Nous remarquons encore que l'homotopie que nous venons de construire ne dépend pas réellement de X, mais uniquement de la donnée au signe près de ce champ, ce qui nous servira par la suite.

2.4. Feuilletages de T transverses aux parallèles de $\mathbb{T}^2$. Pour fixer les idées, nous identifions le cercle $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ *via* le paramétrage naturel de celui-ci donné par $\omega \mapsto \exp(2i\pi\omega)$. Sur le disque $\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, nous introduisons les coordonnées polaires définies par $z = r\exp(2i\pi\theta)$; sur le tore-surface $\mathbb{T}^2$ (identifié à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$), nous notons (θ, ω) les coordonnées canoniques ; enfin sur le tore solide $\mathrm{T} := \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, dont le bord est identifié à $\mathbb{T}^2$, nous utilisons les deux paramétrages produits (r, θ, ω) et (z, ω) de manière systématique. Ces notations sont fixées pour toute la suite. Nous introduisons encore la première projection $\pi(r, \theta, \omega) = (r, \theta)$ de T sur $\mathbb{D}^2$.



Les fibres de π sont traditionnellement appelées *parallèles* de T. Il est utile de remarquer, vu ce qui suit, que si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de T transverse aux parallèles, alors $\mathcal{F}$ est un feuilletage en disques. En effet, (cf. [5]), on a plus généralement :

Théorème (Ehresmann). *Soit $\pi : E \to B$ une fibration localement triviale de fibre F compacte et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de E transverse aux fibres de π. Alors, $\mathcal{F}$ est conjugué à la suspension d'une représentation de $\pi_1(B)$ dans le groupe des difféomorphismes de F.*

Remarque 2.4.1. Par contre, si $\pi : E \to B$ est une fibration localement triviale à fibre non-compacte, les feuilletages de E transverses aux fibres de π n'auront pas nécessairement pour feuilles des revêtements de la base ; dans [11], Hector a même construit un feuilletage $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$ à feuilles denses transverses aux verticales.

Revenons à ce qui nous occupe. Ici, $B = \mathbb{D}^2$ étant contractile, toute suspension de base B est triviale. En particulier, *un feuilletage de* T *transverse aux parallèles ne peut pas avoir n'importe quelle trace au bord de* T. Ceci est à comparer au résultat suivant ([20]) :

Théorème (Thurston). *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage en courbes de $\mathbb{T}^2$, transverse aux parallèles de $\mathbb{T}^2$. Alors, $\mathcal{F}$ peut se prolonger en un feuilletage de* T.

Considérons ensuite l'espace $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ des feuilletages de codimension 1 de T qui sont transverses aux parallèles ; notons $\mathcal{F}_0$ celui dont les feuilles sont les fibres de la deuxième projection $(r, \theta, \omega) \mapsto \omega$ de T sur $\mathbb{S}^1$. Nous utiliserons le résultat suivant :

Lemme 2.4.2. *$\boldsymbol{\mathcal{F}}$ est homéomorphe au groupe topologique des difféomorphismes du tore solide dans lui-même qui sont fibrés au-dessus de l'identité de $\mathbb{D}^2$ et égaux à l'identité sur $\{0\} \times \mathbb{S}^1$, ce groupe étant muni de la topologie C^∞.*

Preuve. Notons $(Y, \mathrm{id}_\mathrm{T})$ le groupe topologique des difféomorphismes en question, pointé en son élément neutre. À tout élément f de ce groupe on peut associer le feuilletage $f(\mathcal{F}_0) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$, image par f de $\mathcal{F}_0$. Cette application de $(Y, \mathrm{id}_\mathrm{T})$ dans l'espace pointé $(\boldsymbol{\mathcal{F}}, \mathcal{F}_0)$ est clairement continue et injective. Réciproquement, soit $\mathcal{F} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ et soit $(z, \omega) \in \mathrm{T}$ avec $z = re^{i\theta}$. Considérons un chemin $c\colon [0, 1] \to \mathbb{D}^2$ joignant 0 à z et relevons c dans la feuille de $\mathcal{F}$ qui passe par $(0, \omega)$ de manière à obtenir un chemin $\tilde{c}_{z,\omega}$. Comme $\mathbb{D}^2$ est contractile, le point $\tilde{c}_{z,\omega}(1)$ ne dépend pas du choix de c mais seulement de z, ω et $\mathcal{F}$ dont il dépend continûment. Nous pouvons alors poser $f_\mathcal{F}(z, \omega) = (z, \tilde{c}_{z,\omega}(1))$ pour obtenir une application $\mathcal{F} \mapsto f_\mathcal{F}$ continue, réciproque de celle $f \mapsto f(\mathcal{F}_0)$ définie plus haut ; ce qui prouve la bijectivité et la bicontinuité de celle-ci. □

Corollaire 2.4.3. *Notons $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\varepsilon$ l'ensemble des feuilletages de* T *qui appartiennent à $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ et coïncident avec $\mathcal{F}_0$ sur un tore intérieur* $\mathrm{T}_\varepsilon := \{(r, \theta, \omega) \in \mathrm{T} : 0 \le r \le \varepsilon\}$ *de* T *où $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Il existe alors une application continue h de $[0, 1] \times \boldsymbol{\mathcal{F}}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ telle que :*

(i) *pour $\mathcal{F} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$, $h(0, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ et $h(1, \mathcal{F}) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_\varepsilon$;*

(ii) *le feuilletage $h(t, \mathcal{F})$ reste le même hors de $\mathrm{T}_{2\varepsilon}$ pendant que t varie.*

Preuve. Comme on le constate facilement, l'homéomorphisme décrit au lemme 2.4.2 associe à $\boldsymbol{\mathcal{F}}_\varepsilon$ le sous-groupe Y_ε de Y des difféomorphismes de T de la forme $(z, \omega) \mapsto (z, \varphi(z, \omega))$, où $\omega \mapsto \varphi(z, \omega)$ est un difféomorphisme du cercle dépendant de z et coïncidant avec l'identité pour $|z| \le \varepsilon$. Nous allons donc construire plutôt, ce qui revient au même, une application continue h de $[0, 1] \times Y$ dans Y ayant les propriétés suivantes :

(1) pour $\varphi \in Y$, $h(0, \varphi) = \varphi$ et $h(1, \varphi) \in Y_\varepsilon$;

(2) la fonction $h(t, \varphi)$ reste la même sur la partie de T définie par $|z| \ge 2\varepsilon$.

Considérons une application α de classe C^∞ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $\alpha(u) = 0$ pour $u \le \varepsilon$ et $\alpha(u) = u$ pour $u \ge 2\varepsilon$. Nous posons simplement $h(t, \varphi)(r, \theta, \omega) = \varphi((1-t)r + t\alpha(r), \theta, \omega)$ et par construction, cette application possède les propriétés requises. □

La remarque suivante est analogue à la remarque 2.3.3 :

Remarque 2.4.4. Soit K un compact contenu dans T. Pour tout point $x := (z, \omega) \in K$, notons D_k^λ le disque horizontal $\{(z', \omega) : |z - z'| \leq \lambda\}$ de centre k et de rayon λ. Posons $V_K^\lambda := \bigcup_{x \in K} D_x^\lambda$. Supposons qu'un feuilletage $\mathcal{F} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$ coïncide avec $\mathcal{F}_0$ sur V_K^λ. Si $\lambda \geq 3\varepsilon$, alors $h(1, \mathcal{F})$ coïncide encore avec $\mathcal{F}_0$ sur V_K^ε.

2.5. Composantes de Reeb et feuilletages tendus. La notion de composante de Reeb est centrale en théorie des feuilletages (voir [19] pour la définition). Mais, nous aurons besoin d'une notion plus forte introduite par Gabai dans [7] :

Définition 2.5.1. *Un feuilletage $\mathcal{F}$ est* tendu *si pour toute feuille F de $\mathcal{F}$ il existe une courbe fermée γ_F transverse à $\mathcal{F}$ qui rencontre F.*

On a la caractérisation suivante :

Fait 2.5.2. *Un feuilletage $\mathcal{F}$ est tendu si et seulement si il existe une transversale fermée γ qui rencontre chaque feuille.*

On voit qu'un feuilletage tendu est sans composante de Reeb. Par contre, un feuilletage sans composante de Reeb n'est pas nécessairement tendu. Par exemple, si on munit $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$ du feuilletage produit d'une composante de Reeb de $\mathbb{T}^2$ par $\mathbb{S}^1$, on obtient un feuilletage de $\mathbb{T}^3$ ayant une feuille torique et il n'existe pas de transversale fermée qui rencontre cette feuille dans $\mathbb{T}^3$. Cependant, ce feuilletage est nécessairement sans composante de Reeb puisqu'aucune de ses feuilles n'est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. Il existe même des variétés ([4]) qui admettent des feuilletages sans composante de Reeb mais pas de feuilletages tendus (toutefois, lorsque la variété est atoroïdale, un feuilletage est tendu si et seulement si il est sans composante de Reeb). Dans la suite, nous utiliserons la propriété suivante des feuilletages tendus :

Fait 2.5.3. *Tout arc transverse à un feuilletage tendu se prolonge en une courbe fermée simple transverse au feuilletage* ([7]).

2.6. Difféomorphismes du cercle. Pour prolonger à T tout feuilletage de $\mathbb{T}^2$ transverse aux parallèles, nous utiliserons des résultats classiques sur la conjugaison à des rotations des difféomorphismes de $\mathbb{S}^1$ préservant l'orientation. À une telle application f, Poincaré associe de façon continue un élément $\rho(f)$ de $\mathbb{S}^1$ appelé *nombre de rotation* de f. Rappelons qu'un nombre α est *diophantien* s'il existe $c > 0$ et $d \geq 1$ tels que pour tous $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ non nuls, $|q\alpha - p| > cq^{-d}$.

Théorème. *Il existe un ensemble A de mesure totale tel que tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ de nombre de rotation $\alpha \in A$ soit C^∞-conjugué à la rotation R_α (Herman* [13]). *De fait, A est l'ensemble de tous les nombres diophantiens (Yoccoz* [23]).

Ce théorème fournit un résultat particulièrement intéressant sur la "forme" des difféomorphismes ([13], p. 127) :

Corollaire 2.6.1 (Décomposition des difféomorphismes du cercle). *Soit μ un nombre diophantien. Tout difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ s'écrit de façon unique comme $f = R_{\lambda(f)} \circ g \circ R_\mu \circ g^{-1}$ avec $\lambda(f) \in \mathbb{S}^1$ et g un difféomorphisme de $\mathbb{S}^1$ tel que $g(0) = 0$. De plus, l'application $f \mapsto (\lambda, g)$ est continue pour la C^∞-topologie.*

Pour des raisons techniques, il sera préférable pour nous de passer au revêtement universel de $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$, noté $D^\infty(\mathbb{S}^1)$. Celui-ci s'identifie au groupe des difféomorphismes f de classe C^∞ de la droite réelle tels que $f - \mathrm{id}_\mathbb{R}$ soit $\mathbb{Z}$-périodique. Ce groupe est contractile et pour $t \in [0, 1]$ et $f \in D^\infty(\mathbb{S}^1)$, nous noterons f^t le difféomorphisme de $\mathbb{R}$ qui à x associe $tx + (1-t)f(x)$. Le chemin $t \mapsto f^t \in D^\infty(\mathbb{S}^1)$ dépend continûment de f et relie f à $\mathrm{id}_\mathbb{R}$. En relèvement à $D^\infty(\mathbb{S}^1)$, le corollaire précédent devient :

Corollaire 2.6.2 (Décomposition des éléments de $D^\infty(\mathbb{S}^1)$). *Soit μ un nombre diophantien et soit $\tilde{f}$ un élément de $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ relevant le difféomorphisme f de l'énoncé précédent. Alors $\tilde{f}$ s'écrit de façon unique sous la forme $\tilde{f} = T_{\tilde{\lambda}(f)} \circ \tilde{g} \circ T_\mu \circ \tilde{g}^{-1}$ où T_k désigne la translation $T_k(x) = x + k$ de $\mathbb{R}$ et $\tilde{g}$ est un élément de $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ fixant 0. De plus, $\tilde{g}$ relève g, la classe de $\tilde{\lambda}(f)$ modulo 1 est $\lambda(f)$ et l'application $\tilde{f} \mapsto (\tilde{\lambda}(f), \tilde{g})$ est continue pour la topologie C^∞.*

3. Homotopies de feuilletages : exemples

Dans cette partie, on considère sur quelques exemples le problème général consistant à homotoper deux feuilletages de même dimension sur une variété fermée M qui n'est provisoirement plus supposée de dimension 3.

3.1. Le cas particulier des feuilletages de dimension 1. Nous soulignons rapidement que si $\mathcal{F}$ est de dimension un, notre problème devient élémentaire : en effet, tout fibré en droites de classe C^∞ sur M est intégrable, et donc, deux feuilletages en courbes sont homotopes si et seulement si leurs champs tangents le sont. En particulier,

Proposition 3.1.1. *L'espace des feuilletages en courbes de M, s'il n'est pas vide, est localement contractile.*

Soit en particulier un feuilletage orientable en courbes $\mathcal{F}_0$ de $\mathbb{T}^2$; parce que cela nous servira dans la suite, nous allons expliciter une rétraction dans $\mathbb{F}_1(\mathbb{T}^2)$ d'un

voisinage V de $\mathcal{F}_0$ sur le point $\{\mathcal{F}_0\}$. Comme nous le disions, la donnée d'un feuilletage en courbes de $\mathbb{T}^2$ et celle de son champ de tangentes sont équivalentes ; aussi, soit d_0 le champ de tangentes de $\mathcal{F}_0$. Nous supposons que $\mathbb{T}^2$ est muni d'une structure conforme auxiliaire (c'est-à-dire que son fibré tangent est muni d'une structure de fibré en droites complexes, de groupe $\mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$). Notons également U le groupe multiplicatif $\{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\}$. Soit d_1 un champ de droites sur $\mathbb{T}^2$: il existe une unique fonction Θ de classe C^∞ de $\mathbb{T}^2$ dans $U/_{\{\pm 1\}}$ telle que la droite $d_1(p)$ au-dessus de p soit pour tout $p \in \mathbb{T}^2$ l'image de la droite $d_0(p)$ par l'élément $\Theta(p) \in U/_{\{\pm 1\}}$ (rappelons que $U/_{\{\pm 1\}}$ agit simplement transitivement sur l'ensemble des droites vectorielles réelles de $\mathbb{C}$). Nous prenons pour V le voisinage de d_0 composé des champs de droites d_1 pour lesquels Θ admet une détermination de la forme $\Theta(p) = \exp(i\theta(p))$ avec θ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Étant donné d_1 dans V, nous définissons maintenant le champ de tangentes $h(t, d_1)(p) = \exp(i(1-t)\theta(p))d_0(p)$; celui-ci dépend continûment de d_1 pour la topologie C^∞, et nous avons $h(t, d_1) \in V$, $h(0, d_1) \equiv d_1$ et $h(1, d_1) \equiv d_0$ comme souhaité.

Remarque 3.1.2. Dans notre description de l'homotopie h ci-dessus, nous pouvons remplacer la structure conforme choisie en premier lieu par la structure conjuguée à celle-ci (ce qui renverse l'orientation de $\mathbb{T}^2$ canoniquement induite par cette structure conforme) ; il est à noter que si nous faisons ce changement, l'homotopie h obtenue reste la même.

3.2. Cas de grande codimension. Le fait que des feuilletages aient des champs de plans tangents homotopes ne suffit pas pour assurer que les feuilletages sont homotopes : sur des sphères suffisamment grandes il existe des feuilletages non homotopes de codimension au moins 10 dont les champs de plans tangents sont homotopes ([14]). Le problème reste ouvert pour les feuilletages de codimension 1.

3.3. Feuilletages minimaux sur $\mathbb{T}^3_A$. Soit A une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ telle que $tr(A) > 2$. Ceci implique que A possède deux valeurs propres réelles $\lambda_1 > 1 > \lambda_2$ avec $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Soient $v_1\binom{a}{b}$ et $v_2\binom{c}{d}$ des vecteurs propres de A pour λ_1 et λ_2 respectivement. Soient les champs de vecteurs suivants sur $\mathbb{R}^3$: $X_1 = \lambda_1^{-z}(a, b, 0)$, $X_2 = \lambda_2^{-z}(c, d, 0)$, $X_3 = (0, 0, 1)$ et soit Γ le groupe des transformations de $\mathbb{R}^3$ de la forme $((x, y), z) \mapsto (A^n(x+p, y+q), z+n)$ avec n, p, q des entiers relatifs. L'action de Γ préserve X_1, X_2, X_3 ; d'autre part, le quotient $\mathbb{R}^3/_\Gamma$ est une variété différentielle compacte classiquement notée $\mathbb{T}^3_A$. Dans la mesure où les X_i sont invariants par Γ, ils induisent sur $\mathbb{T}^3_A$ des champs de vecteurs Y_1, Y_2, Y_3 partout transverses et satisfaisant aux conditions $[Y_1, Y_2] = 0$, $[Y_1, Y_3] = \kappa Y_1$ et $[Y_2, Y_3] = -\kappa Y_2$ avec $\kappa = \ln(\lambda_1)$.

Le champ de plans $\langle Y_1, Y_2\rangle$ engendré par les champs commutants Y_1 et Y_2 est tangent aux fibres de la fibration en tores sur le cercle de $\mathbb{T}^3_A$, donnée par l'application $\Gamma \cdot (x, y, z) \xmapsto{\pi} z \mod 1$.

Les deux champs de plans $\langle Y_1, Y_3\rangle$ et $\langle Y_2, Y_3\rangle$ sont tangents à deux feuilletages transverses entre eux et transverses aux fibres de π, et notés respectivement $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ dans la suite (voir [10] pour plus de détails). Il est facile de montrer que $T\mathcal{F}_1$ et $T\mathcal{F}_2$ sont des champs homotopes, et même que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ et le feuilletage $\mathcal{F}_0$ par fibres de π sont tous trois homotopes dans $\mathbb{F}_1(\mathbb{T}^3_A)$. Par exemple, homotopons $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_0$: il suffit de constater que le champ de plans $\langle Y_1, tY_2 + (1-t)Y_3\rangle$ reste constamment intégrable et relie $T\mathcal{F}_1$ et $T\mathcal{F}_0$. Ceci étant, d'après un théorème de Ghys et Sergiescu ([10]), les feuilletages $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1$ sont C^∞-stables :

Théorème (Ghys–Sergiescu). *Tout feuilletage transversalement orientable et sans feuille compacte sur $\mathbb{T}^3_A$ est conjugué à $\mathcal{F}_1$ ou à $\mathcal{F}_2$.*

Or, les feuilletages $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ne sont conjugués entre eux que si la matrice A est conjuguée à son inverse dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Il existe donc des fibrés pour lesquels $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1$ ne sont pas conjugués (par exemple, pour $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 9 \\ 7 & 16 \end{smallmatrix}\right)$ (cf. [3])). Nous pouvons alors obtenir sur les homotopies de $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_2$ un renseignement intéressant au moins dans le cas où $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ne sont pas conjugués :

Proposition 3.3.1. *Si $\mathcal{F}_t$ est une homotopie de $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_2$, alors pour au moins une valeur de t, $\mathcal{F}_t$ a une feuille torique.*

Preuve. En effet, comme $\mathcal{F}_1$ est C^∞-stable (ce qui est une propriété ouverte et invariante par conjugaison), l'ensemble des $\tau \in [0, 1]$ pour lesquels $\mathcal{F}_\tau$ est conjugué à $\mathcal{F}_1$ est un ouvert O_1 de $[0, 1]$ qui est non vide car il contient 0. De même, l'ensemble des τ pour lesquels $\mathcal{F}_\tau$ est conjugué à $\mathcal{F}_2$ est un autre ouvert non vide O_2 de $[0, 1]$. Puisque $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont ici supposés non-conjugués, O_1 et O_2 sont disjoints ; aussi, par connexité, leur réunion ne peut pas être $[0, 1]$ et il existe donc $\tau \in [0, 1]$ tel que $\mathcal{F}_\tau$ n'est plus conjugué à l'un des feuilletages modèles. Par le théorème de Ghys–Sergiescu, $\mathcal{F}_\tau$ a donc une feuille compacte. Si $\mathcal{F}_\tau$ a une composante de Reeb, nous sommes renseignés ; sinon pour toute feuille compacte F, le groupe $\pi_1(F)$ s'injecte dans celui de $\mathbb{T}^3_A$ qui est résoluble. Par suite, le groupe fondamental de la feuille compacte est résoluble et elle est donc homéomorphe à une sphère ou à un tore (seules surfaces compactes orientables de π_1 résoluble). D'après le théorème de stabilité de Reeb, on peut exclure le cas de la sphère dans lequel le feuilletage serait produit sur la variété $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. □

Remarque 3.3.2. On peut en fait montrer que tout feuilletage $\mathcal{F}$ proche de $\mathcal{F}_1$ (ou $\mathcal{F}_2$) lui est isotope et aussi que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ne sont jamais isotopes. La preuve de ce résultat n'a pas sa place dans cet article et paraîtra donc ailleurs.

3.4. Conjecture de Rosenberg. On attribue la conjecture suivante à Harold Rosenberg ([8], p. 59) :

Conjecture. L'espace $H^1(\mathbb{Z}^2, \mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1))$ des homomorphismes de $\mathbb{Z}^2$ à valeurs dans $\mathrm{Diff}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ est localement contractile.

Par suspension, elle contient l'énoncé suivant en termes de feuilletages :

Conjecture. Soit $\pi : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^2$ la fibration naturelle de $\mathbb{T}^3$ sur $\mathbb{T}^2$. L'espace des feuilletages transverses à cette fibration est localement connexe par arcs.

En fait, il s'agit d'un cas particulier d'un problème qui n'est simple qu'en apparence :

Question. Soient M et N deux variétés compactes. L'ensemble des feuilletages transverses au fibré trivial $\pi : M \times N \to N$ est-il localement connexe par arcs ?

Pour étudier rapidement cette question, introduisons le groupe G des difféomorphismes de M qui sont isotopes à l'identité et munissons-le de la topologie C^∞. Choisissons aussi un point-base n_0 sur N. Soit H le groupe de difféomorphismes de $M \times N$ qui sont fibrés sur l'identité de N, qui fixent chaque point de la fibre de n_0 et dont la restriction à chaque fibre de π est dans G. On peut montrer que H est localement contractile. Ensuite, H agit de façon naturelle sur l'espace $\mathcal{F}$ des feuilletages de dimension $dim(N)$ de $M \times N$ qui sont transverses aux fibres ; on vérifie sans peine que $\mathcal{F}$ est un H-fibré principal dont la base s'identifie de façon plus ou moins canonique à une certaine partie de l'espace $\mathrm{Hom}(\pi_1(N), G)$ (voir [5] et aussi la preuve du théorème 4 ci-dessous). La topologie de $\mathrm{Hom}(\pi_1(N), G)$ et celle de $\mathcal{F}$ sont donc fortement liées. On peut certes déterminer la structure de $\mathrm{Hom}(\pi_1(N), G)$ dans certains cas très particuliers : par exemple, lorsque $\pi_1(N)$ n'a que des morphismes triviaux dans G, ou plus généralement, lorsque tous ces morphismes se factorisent par un groupe fini ([6], [16], [22]), ou au contraire lorsque $\pi_1(N)$ est libre, auquel cas, $\mathrm{Hom}(\pi_1(N), G)$ est isomorphe à G^r où r est le rang de $\pi_1(N)$. Mais en dehors de ces cas très particuliers, on ne connaît pratiquement rien de $\mathrm{Hom}(\pi_1(N), G)$; et rappelons que pour N de dimension suffisante, $\pi_1(N)$ peut être n'importe quel groupe de présentation finie !

4. Prolongement au tore solide des feuilletages du tore-surface

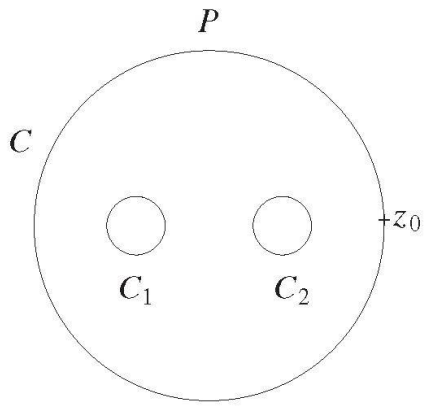
Notons $\mathcal{S}$ l'espace des feuilletages en surfaces de T qui sont transverses à son bord $\mathbb{T}^2$ et transverses aux parallèles de celui-ci, sans être forcément transverses aux parallèles à l'intérieur de T. Définissons également l'espace $\mathcal{C}$ des feuilletages en courbes de $\mathbb{T}^2$ qui sont transverses aux parallèles. Il y a donc une application naturelle $\partial : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ qui à un feuilletage de T associe le feuilletage induit sur son bord $\mathbb{T}^2$. Dans [20], Thurston a montré l'existence d'une application $s : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ telle que $\partial \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

Dans cette section, on se propose de montrer que s peut être continue. On a vu au paragraphe 2.4 qu'un feuilletage $\mathcal{F}_1$ de T proche du feuilletage en disques $\mathcal{F}_0$ est lui-même en disques (car ses feuilles sont des revêtements de $\mathbb{D}^2$). Cependant, tout feuilletage du tore $\mathbb{T}^2$ proche du feuilletage en cercles $\partial\mathcal{F}_0$ n'est pas nécessairement en cercles (il peut même être à feuilles denses). Ainsi, il n'existe pas de section continue s de ∂ au-dessus d'un voisinage de $\partial\mathcal{F}_0$ telle que $s(\partial\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_0$. Néanmoins, on a le résultat suivant :

Théorème 4. *Il existe une section continue $s : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ de ∂.*

Le but de cette section est de prouver ce résultat.

4.1. Principe de construction de s. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{T}^2$ transverse aux parallèles. Lorsque ce feuilletage est défini par une forme fermée, il s'étend en un feuilletage de T possédant une composante de Reeb. Dans un premier temps, nous nous inspirons de ce résultat de Reeb ([19]) pour construire une section s' continue au-dessus de l'espace $\mathcal{C}_0$ des feuilletages de $\mathbb{T}^2$ dont l'application de premier retour sur le parallèle $\theta = 0$ est une rotation. Ensuite, remarquons que si on prive T de l'intérieur de deux tores solides disjoints, on obtient une variété difféomorphe à $P \times \mathbb{S}^1$ où P (pour "pantalon") est la variété obtenue en privant le disque $\mathbb{D}^2$ de deux petits disques ouverts disjoints. Désignons par C, C_1 et C_2 les composantes du bord de P. Partant d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ de $\mathbb{T}^2$, on construira d'abord un prolongement à



$P \times \mathbb{S}^1$. Par construction, ce prolongement tracera sur les tores $C_1 \times \mathbb{S}^1$ et $C_2 \times \mathbb{S}^1$ (convenablement identifiés à $\mathbb{T}^2$) des feuilletages qui seront dans $\mathcal{C}_0$ et qu'on pourra donc étendre à l'aide de la section s' précédemment construite à l'intérieur de ces tores.

4.2. Notations. Continuons de noter (r, θ, ω) ou (z, ω) les coordonnées usuelles sur le tore solide T.

Notation 4.2.1. Définissons deux tores solides T_1 et T_2 par

$$\mathrm{T}_1 := \left\{(z,\omega) : \left|z+\tfrac{1}{2}\right| \leq \tfrac{1}{10}\right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_2 := \left\{(z,\omega) : \left|z-\tfrac{1}{2}\right| \leq \tfrac{1}{10}\right\}.$$

La variété obtenue en privant T de l'intérieur de $\mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ est notée W. Elle est difféomorphe au produit $P \times \mathbb{S}^1$ où P est le disque unité privé des petits disques ouverts $\left\{z \in \mathbb{D}^2 : \left|z+\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{10}\right\}$ et $\left\{z \in \mathbb{D}^2 : \left|z-\frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{10}\right\}$.

Nous aurons besoin d'un point-base sur $\mathbb{D}^2$: pour fixer les idées, nous prenons $z_0 = 1$. Nous utiliserons également des voisinages de sécurité pour traiter de certains problèmes de recollement ; aussi nous fixons $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{10}\right[$ et

Notation 4.2.2. Nous notons T^ε le voisinage tubulaire suivant du bord de T :

$$\mathrm{T}^\varepsilon := \{(r,\theta,\omega) : r \geq 1-\varepsilon\}.$$

De même, nous notons W^ε le ε-voisinage du bord de W dans W.

Sur W^ε, nous introduisons un champ de vecteurs transverse au bord et tangent aux disques horizontaux :

Notation 4.2.3. En notant $z = x + iy \in \mathbb{D}^2$, le champ R est défini par

$$R_{(r,\theta,\omega)} := \begin{cases} r\frac{\partial}{\partial r} \text{ pour tout } (r,\theta,\omega) \in \mathrm{T}^\varepsilon \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \text{ au } \varepsilon\text{-voisinage de } C_1 \times \mathbb{S}^1 \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \text{ au } \varepsilon\text{-voisinage de } C_2 \times \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

Nous appellons R le *champ radial* sur W^ε.

Comme nous considérons beaucoup d'espaces de feuilletages différents, il n'est pas inutile d'en récapituler la liste.

Notation 4.2.4. Nous notons :

- $\mathcal{S}$ l'espace des feuilletages en surfaces de T qui sont transverses à son bord $\mathbb{T}^2$ et transverses aux parallèles de celui-ci, sans être forcément transverses aux parallèles à l'intérieur de T ;
- $\mathcal{C}$ l'espace des feuilletages en courbes de $\mathbb{T}^2$ qui sont transverses aux parallèles ;
- $\mathcal{C}_0$ l'espace des feuilletages de $\mathbb{T}^2$ dont l'application de premier retour sur le parallèle $\theta = 0$ est une rotation ;
- $\mathcal{F}$ l'espace des feuilletages en surfaces de T qui sont en disques ;
- $\mathcal{W}$ l'espace des feuilletages de W transverses aux parallèles et invariants par R sur W^ε.

Introduisons maintenant les groupes topologiques suivants qui seront tous munis de la topologie C^∞ :

- $H(\mathbb{T}^2)$ le groupe des difféomorphismes de $\mathbb{T}^2$ qui sont isotopes à l'identité, fibrés au-dessus de $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$ et fixent $\pi^{-1}(z_0)$ point par point ;
- $H(\mathrm{T})$ le groupe des difféomorphismes de T qui sont isotopes à l'identité, fibrés au-dessus de $\mathrm{id}_{\mathbb{D}^2}$, invariants par R sur T^ε et fixent $\pi^{-1}(z_0)$ point par point ;
- $H(W)$ le groupe des difféomorphismes de W qui sont isotopes à l'identité, fibrés au-dessus de id_P, invariants par R sur W^ε et fixent $\pi^{-1}(z_0)$ point par point ;
- $H_0(\mathrm{T})$ (resp. $H_0(W)$) le sous-groupe de $H(\mathrm{T})$ (resp. $H(W)$) des difféomorphismes qui fixent T^ε point par point.

Enfin, nous choisissons deux lacets basés en z_0 dans P :

Notation 4.2.5. Les lacets γ_1 et γ_2 sont définis par :

- $\gamma_1(t) := \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}$ pour $t \in [0, 1]$;
- $\gamma_2(t) := \begin{cases} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t} & \text{pour } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, 1\right], \\ i(2-4t) & \text{pour } t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]. \end{cases}$

De cette manière, les groupes fondamentaux $\Gamma_1 := \pi_1(\mathbb{S}^1, z_0)$ et $\Gamma_2 := \pi_1(P, z_0)$ sont engendrés respectivement par $[\gamma_1]$ et $\{[\gamma_1], [\gamma_2]\}$ où $[\gamma_i]$ désigne la classe d'homotopie du lacet γ_i. De plus, Γ_1 s'identifie à un sous-groupe de Γ_2.

Enfin, pour $i = 1, 2$, nous notons Λ_i l'espace des morphismes de groupes de Γ_i dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$.

4.3. Quelques propriétés. Nos définitions font que Λ_1 et Λ_2 sont homéomorphes à $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ et $D^\infty(\mathbb{S}^1) \times D^\infty(\mathbb{S}^1)$ respectivement. De même, $H(\mathbb{T}^2)$ et les quatre autres espaces "$H(\cdot)$" sont homéomorphes à des espaces d'applications convenables (par exemple, $H(\mathbb{T}^2)$ est homéomorphe à l'espace d'applications de classe C^∞ entre espaces pointés de $(\mathbb{S}^1, z_0)$ dans $(D^\infty(\mathbb{S}^1), \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$). On déduit facilement de là le lemme suivant :

Lemme 4.3.1. *Les sept espaces suivants sont contractiles :* Λ_1, Λ_2, $H(\mathbb{T}^2)$, $H(\mathrm{T})$, $H_0(\mathrm{T})$, $H(W)$ *et* $H_0(W)$.

La théorie des suspensions, due à Ehresmann ([5]), décrit la structure de l'espace des feuilletages transverses aux fibres d'une fibration localement triviale de fibre compacte. Elle permet dans notre cas d'obtenir le résultat suivant (qui à vrai dire ne découle pas directement de [5] ; mais la déduction est relativement triviale et donc laissée au lecteur) :

Lemme 4.3.2. *Les applications suivantes sont des fibrations principales :*

- $\mathrm{Hol}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \Lambda_1$, *de groupe* $H(\mathbb{T}^2)$ *;*
- $\mathrm{Hol}_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \longrightarrow \Lambda_2$, *de groupe* $H(W)$ *;*
- $\mathrm{Hol}_{\mathcal{C}_0} : \mathcal{C}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, *de groupe* $H(\mathbb{T}^2)$.

De plus, $\mathcal{F}$ *est homéomorphe à* $H(\mathrm{T})$ *– ce qui est une autre façon de dire que* $\mathcal{F}$ *est un* $H(\mathrm{T})$*-fibré principal sur un point.*

Par ailleurs, certains de nos groupes topologiques sont liés par des morphismes naturels.

Lemme 4.3.3. *Les suites suivantes sont exactes :*

$$(S_W) \qquad \{\mathrm{id}_W\} \longrightarrow H_0(W) \hookrightarrow H(W) \xrightarrow{\mathrm{res}_W} H(\mathbb{T}^2) \longrightarrow \{\mathrm{id}_{\mathbb{T}^2}\}$$

$$(S_{\mathrm{T}}) \qquad \{\mathrm{id}_{\mathrm{T}}\} \longrightarrow H_0(\mathrm{T}) \hookrightarrow H(\mathrm{T}) \xrightarrow{\mathrm{res}_{\mathrm{T}}} H(\mathbb{T}^2) \longrightarrow \{\mathrm{id}_{\mathbb{T}^2}\}$$

où $\mathrm{res}_{\mathrm{T}}$ *et* res_W *sont les morphismes naturels de restriction des difféomorphismes de* T *ou de* W *à la composante de bord* $\mathbb{T}^2$.

Le seul point non évident dans le lemme 4.3.3 est la surjectivité des applications $\mathrm{res}_{\mathrm{T}}$ et res_W ; mais nous allons construire des sections continues de ces morphismes car nous en aurons besoin ensuite.

Notation 4.3.4. Nous notons ext_W et $\mathrm{ext}_{\mathrm{T}}$ les sections de res_W et $\mathrm{res}_{\mathrm{T}}$ construites ci-dessous. Nous notons S une section du fibré à base contractile $\mathcal{W} \to \Lambda_2$.

N.B. Nous ne prétendons pas que ext_W et $\mathrm{ext}_{\mathrm{T}}$ soient des morphismes de groupes !

Construction de ext_W *et* $\mathrm{ext}_{\mathrm{T}}$. Soit h un élément de $H(\mathbb{T}^2)$. Nous allons construire un élément $\mathrm{ext}_{\mathrm{T}}$ de $H(\mathrm{T})$ qui fixera chaque point (z, ω) tel que $|z| \leq \frac{4}{5}$; de ce fait, la restriction $\mathrm{ext}_W(h)$ de $\mathrm{ext}_{\mathrm{T}}$ à W appartiendra à $H(W)$.

Soit $\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction décroissante de classe C^∞ telle que l'on ait $\alpha(r) = 1$ si $r \leq \frac{4}{5}$ et $\alpha(r) = 0$ si $r \geq \frac{9}{10}$. Mettons le difféomorphisme h sous la forme $h(\theta, \omega) = (\theta, \varphi_\theta(\omega))$ avec $\varphi_\theta \in \mathrm{Diff}^\infty_+(\mathbb{S}^1)$ ce qui est possible car h est fibré au-dessus de $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$. Comme de plus h est isotope à $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, on peut relever φ_θ à $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ en un difféomorphisme que l'on notera encore φ_θ et tel que $\varphi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Ensuite, posons

$$\mathrm{ext}_{\mathrm{T}}(r, \theta, \omega) := (r, \theta, \varphi_\theta^{\alpha(r)}(\omega))$$

où la notation "$\varphi_\theta^{\alpha(r)}$" est celle "$f^t$" de la section 2.6. Comme $\varphi_\theta^{\alpha(r)} = \varphi_\theta^1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ dès que $r \leq \frac{4}{5}$, cette formule a un sens même pour $r = 0$, et elle définit bien un élément de $H(\mathrm{T})$ qui fixe les points pour lesquels $r \leq \frac{4}{5}$. □

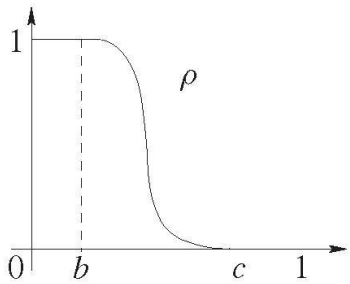
4.4. Tourbillonnement de Reeb équivariant. Nous allons maintenant construire une section continue s' de ∂ au-dessus d'un certain espace de feuilletages $\mathcal{C}_0$. Pour éviter toute confusion, nous soulignons que cette section *n'est pas encore* la section s cherchée, mais un outil permettant de la construire. Nous utiliserons le tourbillonnement de Reeb ([19]). On doit à ce dernier le résultat suivant :

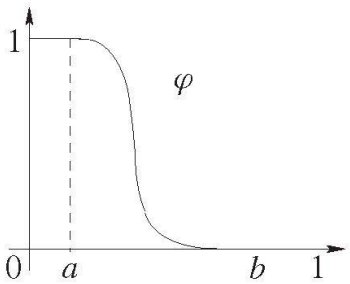
Lemme 4.4.1. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{T}^2$ défini par une forme différentielle fermée α. Alors $\mathcal{F}$ se prolonge en un feuilletage $\mathcal{F}_\alpha$ du tore solide.*

Nous nous en inspirons pour prouver la

Proposition 4.4.2. *Il existe une section $s'\colon \mathcal{C}_0 \to \mathcal{S}$ de ∂ ainsi qu'une application continue $h'\colon [0,1] \times \mathcal{F} \to \mathbb{F}_1(\mathrm{T})$ telle que $h'(0,\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $h'(1,\mathcal{F}) = s' \circ \partial\mathcal{F}$ et pour tout t, $\partial h'(t,\mathcal{F}) = \partial\mathcal{F}$.*

Preuve. Appliquons le lemme 4.3.2 et faisons correspondre à tout $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_0$ le réel $\lambda_{\mathcal{F}}$ et le difféomorphisme $h_{\mathcal{F}}$ tels que $h_{\mathcal{F}}^{-1}(\mathcal{F})$ soit le feuilletage de $\mathbb{T}^2$ défini par la forme fermée $d\omega - \lambda_{\mathcal{F}} d\theta$. Ensuite, nous introduisons des fonctions ρ et φ de classe C^∞ de l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que ci-dessous.





Définissons la forme différentielle suivante sur T :

$$\beta_\lambda := (1-\varphi(r))\cdot(1-\rho(r))\cdot(d\omega - \lambda d\theta) + (1-\varphi(r))\cdot\rho(r)\cdot dr + \varphi(r)\cdot d\omega.$$

On vérifie sans peine que β_λ s'intègre en un feuilletage $\mathcal{G}_{\lambda_{\mathcal{F}}}$ de T qui possède une composante de Reeb et admet $h_{\mathcal{F}}(\mathcal{F})$ pour trace au bord. Par ailleurs, le difféomorphisme $\mathrm{ext}_{\mathrm{T}}(h_{\mathcal{F}})$ de T admet $h_{\mathcal{F}}$ pour restriction à $\mathbb{T}^2$ par construction. Nous posons maintenant $s'(\mathcal{F}) := \mathrm{ext}_{\mathrm{T}}(h_{\mathcal{F}})(\mathcal{G}_{\lambda_{\mathcal{F}}})$ et obtenons bien une application s' de $\mathcal{C}_0$ dans $\mathcal{S}$ telle que $\partial \circ s' = \mathrm{id}_{\mathcal{C}_0}$.

Il nous reste à construire h'. Soit $\mathcal{F} \in \mathcal{F}$ et associons à $\mathcal{F}$ l'unique élément $H_{\mathcal{F}}$ de $H(\mathrm{T})$ tel que $H_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}$ (l'existence de $H_{\mathcal{F}}$ découle du lemme 4.3.2). Puisque $H_{\mathcal{F}}$ et $\mathrm{ext}_{\mathrm{T}}(\mathrm{res}_{\mathrm{T}}(H_{\mathcal{F}}))$ ont par définition le même projeté sur $H(\mathbb{T}^2)$, on peut ensuite définir un unique $H^0_{\mathcal{F}} \in H_0(\mathrm{T})$ tel que $H_{\mathcal{F}} = H^0_{\mathcal{F}} \circ \mathrm{ext}_{\mathrm{T}}(\mathrm{res}_{\mathrm{T}}(H_{\mathcal{F}}))$ en vertu du lemme 4.3.3. De plus, selon le lemme 4.3.1, le groupe $H_0(\mathrm{T})$ est contractile ; introduisons une rétraction $\mathsf{R}(t,\cdot)$ de $H_0(\mathrm{T})$ sur $\{\mathrm{id}_{\mathrm{T}}\}$. Enfin, pour tout $t \in [0,1]$, on

vérifie par un calcul direct que la forme $\eta_t := t \cdot \beta_0 + (1-t) \cdot d\omega$ est non-singulière et intégrable. Elle définit donc un feuilletage que l'on peut noter $\mathcal{F}_t$ car $\mathcal{F}_0$ correspond effectivement au feuilletage de T en disques horizontaux ; on a aussi $\mathcal{F}_1 = \mathcal{G}_0$. Nous définissons maintenant $h'(t, \mathcal{F})$ comme suit :

- pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $h'(t, \mathcal{F}) := \mathsf{R}(2t, H^0_{\mathcal{F}}) \circ \mathrm{ext}_{\mathrm{T}}(\mathrm{res}_{\mathrm{T}}(H_{\mathcal{F}}))(\mathcal{F}_0)$,
- pour $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $h'(t, \mathcal{F}) := \mathrm{ext}_{\mathrm{T}}(\mathrm{res}_{\mathrm{T}}(H_{\mathcal{F}}))(\mathcal{F}_{2t-1})$.

Clairement, les deux définitions coïncident pour $t = \frac{1}{2}$; tout aussi clairement, h' est une application continue. On constate encore que $h'(0, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ et $h'(1, \mathcal{F}) = s'(\partial\mathcal{F})$. Enfin, on a constamment

$$\begin{aligned}\partial h'(t, \mathcal{F}) &= \partial(\mathsf{R}(\inf(2t, 1), H^0_{\mathcal{F}}) \circ \mathrm{ext}_{\mathrm{T}}(\mathrm{res}_{\mathrm{T}}(H_{\mathcal{F}}))(\mathcal{F}_{\sup(2t-1,0)})) \\ &= \mathrm{res}_{\mathrm{T}}(H_{\mathcal{F}})\partial(\mathcal{F}_{\sup(2t-1,0)}) = \mathrm{res}_{\mathrm{T}}(H_{\mathcal{F}})\partial\mathcal{F}_0 = \partial\mathcal{F}. \qquad \square\end{aligned}$$

Remarquons en passant que par construction, le feuilletage $s'(\mathcal{F})$ est invariant par le champ radial sur T^{ε}, ce qui nous servira par la suite.

4.5. Prolongement à $P \times \mathbb{S}^1$. Fixons un nombre diophantien μ et prolongeons maintenant tout feuilletage $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ à W.

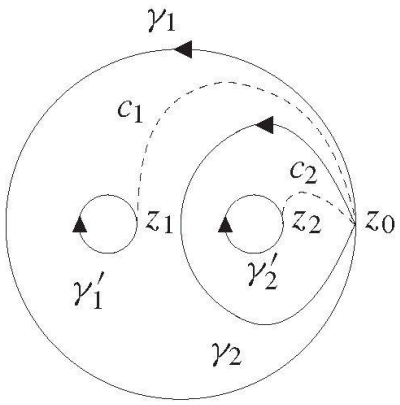
Comme $\mathcal{C}$ est un fibré principal de base Λ_1 (lemme 4.3.2), on peut associer à $\mathcal{F}$ un élément de Λ_1 c'est-à-dire un morphisme $\Gamma_1 \to D^\infty(\mathbb{S}^1)$. Notons $f_{\mathcal{F}}$ l'image de $[\gamma_1]$ par ce morphisme. D'après le théorème d'Herman (corollaire 2.6.2), il existe $\lambda(\mathcal{F}) \in \mathbb{R}$ et $g \in D^\infty(\mathbb{S}^1)$ qui dépendent continûment de $f_{\mathcal{F}}$ et tels que $\varphi_{\mathcal{F}} = T_{\lambda(\mathcal{F})} \circ g \circ T_\mu \circ g^{-1}$.

Définissons une représentation $\rho_{\mathcal{F}}$ de Γ_2 dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ par $\rho_{\mathcal{F}}([\gamma_1]) = f_{\mathcal{F}}$ et $\rho_{\mathcal{F}}([\gamma_2]) = T_{\lambda(\mathcal{F})}$; par construction $\rho_{\mathcal{F}}$ dépend continûment de $\mathcal{F}$.

Par ailleurs, il existe une section continue $S\colon \Lambda_2 \to \mathcal{W}$ (notation 4.3.4). Par conséquent, le feuilletage $S(\rho_{\mathcal{F}})$ dépend continûment de $\mathcal{F}$ et trace sur $C \times \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{T}^2$ un feuilletage ayant la même holonomie que $\mathcal{F}$ mais qui ne coïncide pas nécessairement avec $\mathcal{F}$. Néanmoins, selon le lemme 4.3.2, il existe un unique élément noté $h_{\mathcal{F}} \in H(\mathbb{T}^2)$ tel que $\mathcal{F} = h_{\mathcal{F}}(S(\rho_{\mathcal{F}}))$. Soit $\mathcal{F}_W$ le feuilletage de W défini par $\mathrm{ext}_W(h_{\mathcal{F}})(S(\rho_{\mathcal{F}}))$; par construction, il dépend continûment de $\mathcal{F}$ et a pour trace $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{T}^2$. L'application $S_W : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_W$ est donc un prolongement continu de $\mathcal{F}$ à W

De plus, d'après la remarque 2.3.3, on peut supposer sans perte de généralité que le feuilletage $\mathcal{F}_W$ est invariant par le champ radial R sur W^{ε}.

4.6. Construction de s. Nous allons maintenant prolonger $\mathcal{F}_W$ à T_1 et T_2 grâce à la proposition 4.4.2. Les points $z_1 = \frac{-2}{5}$ et $z_2 = \frac{3}{5}$ sont au bord respectivement de C_1 et C_2. Choisissons librement dans P un chemin c_1 de z_0 à z_1 et un chemin c_2 de z_0 à z_2. Ceci de sorte que, en notant γ_1' et γ_2' les générateurs naturels de $\pi_1(C_i, z_i)$, les chemins γ_2^{-1} et $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ soient respectivement homotopes à $c_2^{-1}\gamma_2' c_2$ et $c_1^{-1}\gamma_1' c_1$.



Nous rappelons que l'image de $[\gamma_1]$ par la représentation d'holonomie de $\mathcal{F}$ a été décomposée dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ sous la forme $T_{\lambda(\mathcal{F})} \circ g \circ T_\mu \circ g^{-1}$.

Introduisons maintenant des applications de $\mathcal{C}$ dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$. Pour $k = 1$ ou 2, pour $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ et pour $\omega_0 \in \mathbb{S}^1$, le chemin c_k se relève de façon unique en un chemin $c^k_{\mathcal{F},\omega_0}$ au-dessus de c_k, tracé le long de $\mathcal{F}$ et issu de (z_0, ω_0). L'extrémité de ce chemin est un point au-dessus de z_k, que nous noterons $(z_k, \varphi_k(\omega_0))$. L'application qui, à $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, associe l'élément φ_k de $\mathrm{Diff}^\infty_+(\mathbb{S}^1)$ est clairement continue. Par ailleurs, les lemmes 4.3.1 et 4.3.2 impliquent que $\mathcal{C}$ est contractile et on peut donc relever $\mathcal{F} \mapsto \varphi_k$ en une application $\mathcal{F} \mapsto h_k$ de $\mathcal{C}$ dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$.

Soit $\mathcal{F}^1$ le feuilletage que trace $\mathcal{F}_W$ sur le bord de T_1 et soit $\Phi_1^{\mathcal{F}}$ le difféomorphisme suivant de T sur T_1 : $\Phi_1^{\mathcal{F}}(z, \omega) = \left(\frac{1}{10}z - \frac{1}{2}, h_1 \circ g(\omega)\right)$.

Proposition 4.6.1. *Le feuilletage* $\mathcal{G}_1 := (\Phi_1^{\mathcal{F}})^{-1}(\mathcal{F}^1)$ *est dans* $\mathcal{C}_0$.

Preuve. Par définition, le feuilletage $\mathcal{G}_1$ est dans $\mathcal{C}$ donc son image par $\mathrm{Hol}_{\mathcal{C}}$ est un morphisme de Γ_1 dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$. Notons φ l'image du générateur γ_1^{-1} par ce morphisme. Or, par construction de $\mathcal{G}_1$, on a $\varphi = g^{-1} \circ h_1^{-1} \circ \psi \circ h_1 \circ g$ où ψ est l'application d'holonomie de $\mathcal{F}_W$ associée au lacet γ_1'. Ceci étant, dans $\pi_1(P, z_0)$, on a $[\gamma_1'] = [c_1\gamma_1^{-1}\gamma_2 c_1^{-1}]$ par choix de c_1. À son tour, ψ se décompose donc comme suit : $\psi = h_1 \circ \mathrm{Hol}_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_W, \gamma_1^{-1}) \circ \mathrm{Hol}_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_W, \gamma_2) \circ h_1^{-1}$. Or, par construction de $\mathcal{F}_W$ nous avons : $\mathrm{Hol}_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}_W, \gamma_2) = T_{\lambda(\mathcal{F})}$ et $\mathrm{Hol}_{\mathcal{W}}(\mathcal{F}, \gamma_1^{-1}) = g \circ T_{-\mu} \circ g^{-1} \circ T_{-\lambda(\mathcal{F})}$. Finalement, $\varphi = T_{-\mu}$ qui est bien une translation. □

Soit $\mathcal{F}^2$ le feuilletage que trace $\mathcal{F}_W$ sur le bord de T_2 et soit $\Phi_2^{\mathcal{F}}$ le difféomorphisme suivant de T sur T_2 : $\Phi_2^{\mathcal{F}}(z, \omega) = \left(\frac{1}{10}z + \frac{1}{2}, h_2(\omega)\right)$. On vérifie de même que l'on a la

Proposition 4.6.2. *Le feuilletage* $\mathcal{G}_2 = (\Phi_2^{\mathcal{F}})^{-1}(\mathcal{F}^2)$ *est dans* $\mathcal{C}_0$.

Nous prolongeons donc $\mathcal{F}_W$ à T tout entier, en comblant T_k par $\Phi_k^{\mathcal{F}}(s'(\mathcal{G}_k))$ où s' est la section de la proposition 4.4.2. Notons $s(\mathcal{F})$ le feuilletage ainsi obtenu.

Par construction, l'application $\mathcal{F} \mapsto s(\mathcal{F})$ est continue. De plus, pour tout $\mathcal{F}$, le feuilletage $s(\mathcal{F})$ obtenu à la fin de cette construction est de classe C^∞ sauf peut-être au voisinage de $C_1 \times \mathbb{S}^1 \sqcup C_2 \times \mathbb{S}^1$ (car il s'obtient en recollant des feuilletages transverses à ces deux tores et définis de chaque côté ; on pourrait donc craindre une absence de différentiabilité transverse à nos deux tores). Mais, heureusement, au voisinage de $C_i \times \mathbb{S}^1$ $(i = 1, 2)$ $s(\mathcal{F})$ est invariant par le champ radial (de classe C^∞ et transverse à $C_i \times \mathbb{S}^1$) donc $s(\mathcal{F})$ est aussi régulier que sa trace sur $C_i \times \mathbb{S}^1$, qui est bien de classe C^∞. Par conséquent, le théorème 4 a bien lieu.

4.7. Homotopie de $\mathcal{F}$ à $s(\partial(\mathcal{F}))$ pour $\mathcal{F} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$. Rappelons qu'on désigne par $\mathcal{F}_0$ le feuilletage en disques horizontaux c'est-à-dire dont les feuilles sont les fibres de la deuxième projection $(r, \theta, \omega) \mapsto \omega$ de T sur $\mathbb{S}^1$.

Proposition 4.7.1. *Il existe une application continue $h\colon [0, 1] \times \boldsymbol{\mathcal{F}} \to \mathbb{F}_1(\mathrm{T})$ avec les propriétés suivantes : $h(0, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $h(1, \mathcal{F}) = s \circ \partial\mathcal{F}$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $h(t, \mathcal{F})|_{\mathrm{T}^\varepsilon} = \mathcal{F}|_{\mathrm{T}^\varepsilon}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{F} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$. Comme ce feuilletage est en disques topologiques, sa représentation d'holonomie dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ est l'identité. De plus, en la décomposant selon le théorème d'Herman, nous avons $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $\lambda(\mathcal{F}) = -\mu$. Enfin, nous définissons encore des difféomorphismes $\Phi_i^{\mathcal{F}}$ de T sur T_i par $\Phi_i^{\mathcal{F}}(z, \omega) = \left(\frac{1}{10}z + \frac{(-1)^i}{2}, h_i(\omega)\right)$.

- Pour $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, appliquons le lemme 2.3.1 à T_1 et T_2 de façon à rendre $\mathcal{F}$ invariant par le champ radial sur un ε-voisinage de ces tores. De même, grâce à la remarque 2.3.3, nous effectuons la même opération sur T^ε.
- Pour $t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, appliquons la proposition 4.4.2 et homotopons le feuilletage $\mathcal{F}|_{\mathrm{T}_i}$ à $\Phi_i(s' \circ \partial\Phi_i^{-1}(\mathcal{F}|_{\mathrm{T}_i}))$. Comme $\mathcal{F}$ a été rendu invariant par le champ radial sur un ε-voisinage de T_i, il n'y a pas de problème de recollement. Notons $\mathcal{F}'$ le feuilletage ainsi obtenu et remarquons que $\partial\mathcal{F}' = \partial\mathcal{F}$.
- Pour $t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, la trace de $\mathcal{F}'$ sur le bord $\mathbb{T}^2$ de T est dans la même $H(\mathbb{T}^2)$-orbite que $\partial\mathcal{F}_0$ donc il existe $h_{\mathcal{F}} \in H(\mathbb{T}^2)$ tel que $\partial\mathcal{F}' = h_{\mathcal{F}}(\partial\mathcal{F}_0)$. D'après la définition 4.3.4, on peut étendre $h_{\mathcal{F}}$ en un difféomorphisme $\mathrm{ext}_W(h_{\mathcal{F}})$ de W. Remarquons qu'alors $\mathcal{F}'|_W$ et $\mathrm{ext}_W(h_{\mathcal{F}})(\mathcal{F}_0|_W)$ ont le même projeté sur $H(\mathbb{T}^2)$ donc il existe un unique élément $H^0_{\mathcal{F}} \in H_0(W)$ tel que $\mathcal{F}'|_W = H^0_{\mathcal{F}} \circ \mathrm{ext}_W(h_{\mathcal{F}})(\mathcal{F}_0|_W)$. Or, d'après la lemme 4.3.1, le groupe $H_0(W)$ est contractile donc il existe un chemin de $H^0_{\mathcal{F}}$ à l'identité dans $H_0(W)$. Nous pouvons alors homotoper $\mathcal{F}'|_W$ au feuilletage $\mathrm{ext}_W(h_{\mathcal{F}})(\mathcal{F}_0|_W)$; désignons par $\mathcal{F}'_{W,t}$ la famille de feuilletages sur W ainsi obtenue. De plus, remarquons que la représentation d'holonomie de $\mathcal{F}'$ ne varie pas ; par ailleurs, nous pouvons encore définir le difféomorphisme $\Phi_i^{\mathcal{F}'}$ qui dépend continûment de $\mathcal{F}'|_{W,t}$. On peut vérifier comme à la proposition 4.6.1 que l'image par $(\Phi_i^{\mathcal{F}'})^{-1}$ du feuilletage $\mathcal{F}'_{W,t}|_{\partial\mathrm{T}_i}$ reste dans

$\mathcal{C}_0$ ce qui nous permet de prolonger continûment $\mathcal{F}'_{W,t}$ à l'intérieur de T_i par $\Phi_i^{\mathcal{F}'}(s' \circ \partial(\Phi_i^{\mathcal{F}})^{-1}(\mathcal{F}'_{W,t}|_{\partial \mathrm{T}_i}))$.

– Pour $t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$, il nous reste à homotoper $\mathcal{F}_0$ à son image par $s \circ \partial$; vu la construction précédente, nous obtiendrons alors l'homotopie pour $\mathcal{F} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$. Notons ρ_0 la représentation triviale de Γ_2 dans $D^\infty(\mathbb{S}^1)$ et ρ_1 la représentation correspondant à $\rho_1([\gamma_1]) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $\rho_1([\gamma_2]) = T_{-\mu}$.

  Introduisons également la représentation ρ_{4t-3} correspondant à $\rho([\gamma_1]) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $\rho([\gamma_2]) = -(4t-3)\mu$. Rappelons qu'à la fin de l'étape précédente, la restriction de $\mathcal{F}'$ à W s'écrit $\mathrm{ext}_W(h_{\mathcal{F}})(\mathcal{F}_0|_W)$ c'est-à-dire $\mathrm{ext}_W(h_{\mathcal{F}})(S(\rho_0))$ où S est la section continue introduite au paragraphe 4.3.4. Nous terminons l'homotopie sur W par $\mathrm{ext}_W(h_{\mathcal{F}})(S(\rho_{4t-3}))$. De la même façon que précédemment, on vérifie qu'on peut prolonger ce feuilletage continûment à l'intérieur des tores T_i par une formule analogue.

Nous obtenons ainsi une homotopie de $\mathcal{F}$ à $s \circ \partial\mathcal{F}$ pour $\mathcal{F} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}$. □

5. Preuve des théorèmes B et C

Nous allons commencer par montrer le théorème 3 ; les idées majeures de la preuve du théorème 2 seront déjà présentes, mais sous une forme simplifiée.

5.1. Preuve du théorème C . Pour l'instant, M est un fibré en cercles $\pi : M \to \Sigma_g$ dont la base est une surface fermée de genre $g \geq 1$. Par hypothèse, l'espace $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ des feuilletages de M qui sont transverses aux fibres de π est non vide. Choisissons une immersion φ du tore solide T dans M envoyant les parallèles $\{(r, \theta)\} \times \mathbb{S}^1$ de T sur des fibres de π. Par application du corollaire 2.4.3, pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit, on peut homotoper $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ à une partie $\boldsymbol{\mathcal{F}}_0$ de lui-même dont tous les feuilletages coïncident avec $\varphi(\mathcal{F}_0)$ sur $\varphi(\mathrm{T}_{\varepsilon_0})$.

Il nous reste à homotoper $\boldsymbol{\mathcal{F}}_0$ à un point dans $\mathbb{F}_1(M)$. Appelons *champ radial* (cf. 2.3) un champ de classe C^∞ sur M dont la restriction à $\varphi(\mathrm{T})$ est l'image par φ du champ $r\frac{\partial}{\partial r}$ sur T. D'autre part, définissons une submersion ψ de T dans M par la formule $\psi(r, \theta, \omega) = \varphi(\varepsilon_1 r, \theta, \omega)$. Pour $\varepsilon_1 > 0$ assez petit et pour $\varepsilon > 0$ assez petit, dépendant de ε_0 et de ε_1, nous voyons que que chaque feuilletage de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_0$ est invariant par le champ radial sur Σ^ε, où Σ est la surface $\varphi(\mathbb{T}^2) \subset M$.

La surface Σ sépare M ; notons $W := \varphi(\mathrm{T})$ et $N := M - W$ les deux sous-variétés compactes de M dont Σ constitue le bord. Alors N est encore fibrée en cercles par π sur une surface S_g qui est le complémentaire dans Σ_g d'un disque ouvert. Or, on sait que le groupe fondamental Γ d'une surface telle que S_g est libre à $2g$ générateurs ; aussi, pour tout groupe topologique contractile G, on a $\mathrm{Hom}(\Gamma, G) \simeq G^{2g}$ qui est lui

aussi contractile. Soit maintenant $\mathfrak{G}$ l'espace des feuilletages de N qui sont transverses à Σ, transverse aux fibres de π et invariants par le champ radial sur $\Sigma^\varepsilon \cap N$.

Lemme 5.1.1. *$\mathfrak{G}$ est un fibré principal de base* $\mathrm{Hom}(\Gamma, D^\infty(\mathbb{S}^1))$ *et de fibre le groupe G des difféomorphismes de N qui sont fibrés sur l'identité de S_g, invariants par le champ radial au voisinage de Σ et égaux à l'identité en restriction à une certaine fibre F_0 arbitrairement choisie.*

Preuve. Constatons que la fibration qu'induit π sur N est triviale (ce fait classique vient de ce que les fibrés orientables en cercles sont caractérisés par leur *classe d'Euler* qui appartient à $H^2(B, \mathbb{Z})$ où B est la base du fibré ; or, $H^2(S_g, \mathbb{Z}) = 0$ car S_g se rétracte sur un bouquet de cercles). Une fois cette constation faite, le résultat voulu découle de [5]. □

Puisque G et $\mathrm{Hom}(\Gamma, D^\infty(\mathbb{S}^1))$ sont contractiles, $\mathfrak{G}$ est lui aussi contractile (le fait que G soit contractile se prouve comme au lemme 4.3.1). Considérons maintenant une rétraction h de G sur un point. Pour $t \in [0, 1]$ et pour $\mathcal{F}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{F}}_0$, nous définirons un feuilletage $\mathcal{F}_t$ en décrivant ses restrictions à W et à N ; celles-ci seront transverses à Σ, égales en restriction à cette surface, invariantes par le champ radial sur Σ^ε et se recolleront donc en un feuilletage global sur M. La définition de $\mathcal{F}_t$ est la suivante :

- Si $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, alors $H(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ sur N et $H(t, \mathcal{F}) = h_0(2t, \mathcal{F})$ sur W où h_0 désigne l'homotopie de $\mathcal{F}$ à $s \circ \partial(\mathcal{F})$ définie à la section 4.7.
- Si $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $H(t, \mathcal{F}) = h(2t - 1, \mathcal{F})$ sur N ; ce feuilletage trace sur le bord de Σ un feuilletage en courbes $\partial H(t, \mathcal{F})$ que nous prolongeons dans W par $s(\partial H(t, \mathcal{F}))$.

On constate sans peine que cette application H constitue l'homotopie voulue de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_0$ à un point dans $\mathbb{F}_1(M)$; ce qui achève la preuve du théorème 3.

5.2. Vers le théorème B. Pour prouver le théorème 2, nous avons délimité une partie N de M sur laquelle il est facile d'homotoper les feuilletages considérés, et nous sommes ensuite parvenus à prolonger les homotopies au complémentaire W de N dans M du fait que W est une (réunion de) copie(s) de T. Comme les feuilletages à homotoper étaient transverses aux fibres de π, la construction était particulièrement simple et n'utilisait qu'un seul "tube" $W \simeq$ T. Dans le cas général, il nous faudra être plus méticuleux ; par ailleurs, nous ne pouvons plus régler aussi facilement le problème de lissage au bord des "tubes" et il nous faudra construire un succédané du "champ radial".

Soit désormais M une variété fermée orientable de dimension 3 et $\mathcal{F}$ un feuilletage tendu de codimension 1 sur M. Selon Thurston ([20], voir aussi [2]), il existe une "bonne" triangulation K de M. Les propriétés qui nous intéressent sont les suivantes :

- $\mathcal{F}$ est transverse aux arêtes de K,

– tout simplexe σ de K est homéomorphe à la boule fermée de dimension 3 feuilletée par les surfaces de niveau $z =$ constante.

Nous prouvons maintenant le théorème 2 en quatre étapes :

– mise en coïncidence préliminaire de $\mathcal{F}$ est de ses voisins au voisinage du 1-squelette de K, ceci pour contourner les problèmes de lissage au bord des simplexes ;
– définition des copies de T dans M dont la réunion jouera le rôle de W ;
– définition de l'objet qui jouera le rôle du champ radial X ;
– construction de l'homotopie à partir de ces données.

5.3. Première étape. Soit K^1 le 1-squelette de K et soit $\varepsilon > 0$ un réel "suffisamment petit" (notion qui sera précisée au lemme 5.3.1). Enfin, soit V le ε-voisinage de K^1 dans M relativement à une métrique riemannienne auxiliaire lisse sur M fixée pour la suite.

Lemme 5.3.1. *Soit $\mathcal{V}$ l'espace des feuilletages de M qui coïncident avec $\mathcal{F}$ sur V. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{F}_1(M)$ et une application continue H_1 de $[0, 1] \times \mathcal{U}$ dans $\mathbb{F}_1(M)$ tels que l'on ait $H_1(0, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $H_1(1, \mathcal{G}) \in \mathcal{V}$ pour tout $\mathcal{G} \in \mathcal{U}$. De plus, on peut choisir H_1 pour avoir $H_1(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ pour tout $t \in [0, 1]$.*

Preuve. L'idée étant voisine de celle employée au lemme 2.3.1, nous nous contenterons d'une preuve rapide. Soit I une arête de K^1. Soit $\Phi\colon \mathbb{D}^2 \times [-2\varepsilon, 1 + 2\varepsilon] \to M$ une immersion d'un cylindre dans M. On peut choisir Φ pour que $\Phi(\{0\} \times [0, 1]) = I$. Soit $\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ telle que $\varphi\big([0, \frac{1}{3}]\big) = \{0\}$, φ est strictement croissante sur $]\frac{1}{3}, 1]$ et $\varphi(x) = x$ pour $x \geq \frac{2}{3}$. Soit également $\psi\colon [-2\varepsilon, 1 + 2\varepsilon] \to [0, 1]$ une application C^∞ telle que $\psi([-2\varepsilon, \varepsilon] \cup [1 + \varepsilon, 1 + 2\varepsilon]) = \{0\}$ et $\psi([0, 1]) = \{1\}$. Pour $t \in [0, 1]$, nous notons f_t l'application C^∞ de M dans lui-même qui coïncide avec l'identité hors de l'image de Φ et s'écrit $\Phi \circ \tau \circ \Phi^{-1}$ en restriction à cette image, avec $\tau(r, \theta, x) = (((1 - t)\varphi(x))r + t\psi(x)\varphi(r), \theta, x)$. Nous posons pour tout feuilletage $\mathcal{G}$ transverse à $\Phi(\{0\} \times [-2\varepsilon, 1 + 2\varepsilon])$, $H(t, \mathcal{G}) = f_t^*(\mathcal{G})$ et comme au lemme 2.3.1, bien que f_t ne soit un difféomorphisme que pour $t < 1$, ceci définit une homotopie de $\mathcal{G}$ à un feuilletage qui coïncide avec $\mathcal{F}$ au voisinage de I.

Il suffit d'effectuer cette construction arête après arête car chaque étape préserve le résultat de l'étape précédente. □

Remarque. On n'a pas encore utilisé que le feuilletage $\mathcal{F}$ est tendu.

Dans la suite, nous supposerons que les feuilletages coïncident avec $\mathcal{F}$ sur V.

5.4. Construction des "tubes". Nous introduisons maintenant ce qui généralise la partie N de M dans la preuve du théorème 3. Nous considérons un petit voisinage V' du 2-squelette K^2 de K dont nous préciserons le choix plus tard (proposition 5.5.2).

Proposition 5.4.1. *Il existe un entier N et des plongements $(\phi_i)_{1\leq i\leq N}$ de* T *dans M avec les propriétés suivantes :*
- *M est la réunion de V' et des $\phi_i(\mathrm{T})$;*
- *le bord de chaque $\phi_i(\mathrm{T})$ est dans V' ;*
- *les $\phi_i(\mathrm{T})$ sont disjoints ;*
- *pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, on a $\phi_i^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_0$;*
- *les $\phi_i(\mathrm{T})$ ne coupent K^2 qu'en des points de V.*

Preuve. Prenons pour N le nombre de 3-simplexes de K et ordonnons ceux-ci de façon quelconque : $\sigma_1^3,\ldots,\sigma_N^3$. Pour tout i, il existe un homéomorphisme ψ_i de la boule unité B^3 de $\mathbb{R}^3$ sur σ_i^3 tel que $\psi_i^{-1}(\mathcal{F})$ soit le feuilletage de B^3 par les disques horizontaux. Nous lissons ψ_i vers l'intérieur de σ_i^3 et obtenons un plongement lisse ψ_i' de B^3 dans σ_i^3 ayant les propriétés suivantes :
- M est la réunion de V' et des $\psi_i'(B^3)$;
- le bord de chaque $\varphi_i(B^3)$ est dans V' ;
- ce bord ne rencontre pas K^2 ;
- $(\psi_i')^{-1}(\mathcal{F})$ est le feuillletage de B^3 par disques horizontaux.

Nous supprimons ensuite deux "calottes" au voisinage des pôles de B^3 pour faire de son image un cylindre feuilleté en disques et ceci nous fournit une immersion ϕ_i de $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{D}^2$ dans M telle que ϕ_i a son image incluse dans l'intérieur de σ_i^3 et son bord dans V'.

Ensuite, considérons l'arc $\phi_i([-\varepsilon, \varepsilon] \times \{0\})$. On peut le prolonger en une courbe de Jordan J_i transverse à $\mathcal{F}$ car ce feuilletage est tendu. De plus, la partie de J_i qui prolonge $\phi_i([-\varepsilon, \varepsilon] \times \{0\})$ peut être prise dans V' car V' est un voisinage de K^2 ([20]). Précisément, après avoir d'abord reliés $\phi_i(-\varepsilon, 0)$ et $\phi_i(\varepsilon, 0)$ à ce que Thurston appelle les points "haut" t_i (top) et "bas" b_i (bottom) de σ_i^3, on peut relier b_i à t_i par un chemin tracé le long de K^2.

Perturbons d'abord chaque J_i de façon à ce qu'il ne rencontre les 2-simplexes de K^2 qu'en des points de V et qu'il ne rencontre aucun $\phi_j(B^3)$. En effet, chaque arc de J_i qui rencontre un 2-simplexe σ^2 relie entre eux deux points A et B du bord de σ^2 ; on peut d'abord "pousser" l'arc AB de J_i à l'intérieur de l'un des deux 3-simplexes bordés par σ^2 en gardant fixes ces extrémités, après quoi toute nouvelle perturbation gardera cet arc éloigné de la partie de σ^2 qui n'est pas dans V. En outre, comme la dimension de M est suffisamment grande, on peut supposer les J_i disjoints après les avoir encore perturbés un peu.

Nous choisissons maintenant un voisinage tubulaire W_i^0 de chaque J_i, ce voisinage étant contenu dans $V' \cup \phi_i([-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{D}^2)$ et tous ces voisinages étant suffisamment petits pour que les réunions $W_i^0 \cup \phi_i([-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{D}^2)$ soient disjointes. Nous lissons le

tore topologique $W_i^0 \cup \phi_i([-\varepsilon, \varepsilon] \times \mathbb{D}^2)$ pour obtenir un voisinage tubulaire de J_i ; par construction, ce voisinage peut être paramétré par une application ϕ_i qui a toutes les propriétés requises. □

5.5. Le champ radial. Appelons *géodésique feuilletée* toute courbe paramétrée par sa longueur d'arc $x(t)$ qui est tangente à $\mathcal{F}$ et qui est dans sa feuille une géodésique (pour la métrique induite sur celle-ci par la métrique auxiliaire dont nous avons muni M). Soit $i \in \{1, \ldots, N\}$. Pour tout point x_0 de $\Sigma_i := \phi_i(\mathbb{T}^2)$, il existe une unique géodésique feuilletée $x(t)$ telle que :

- $\phi_i^{-1}(x(t))$ est normale en $\phi_i^{-1}(x_0)$ à la feuille passant par $\phi_i^{-1}(x_0)$ du feuilletage en courbes qui est la trace de $\phi_i^{-1}(\mathcal{F})$ sur $\mathbb{T}^2$;
- $x(0) = x_0$ et $x(t)$ rentre dans $\phi_i(\mathrm{T})$ pour $t > 0$.

De plus, si $\varepsilon_i > 0$ est assez petit, l'application $\theta_i(t, x_0) = x(t)$ de $]-2\varepsilon_i, 2\varepsilon_i[\times\Sigma_i$ dans M sera un plongement. Nous désignons par X_i un champ de classe C^∞ sur M, partout tangent à $\mathcal{F}$ et qui coïncide avec $d\theta_i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ sur $\theta_i([-\varepsilon_i, \varepsilon_i] \times \Sigma_i)$; X_i est appelé *champ radial* de la surface Σ_i.

Rappelons que les feuilletages $\mathcal{G}$ que nous considérons sont dans $\mathcal{V}$ c'est-à-dire coïncident avec $\mathcal{F}$ sur le voisinage V du 1-squelette. Grâce au lemme 2.3.1, il vient :

Proposition 5.5.1. *Il existe un voisinage $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{V}$ et une application continue H_2 de $[0, 1] \times \mathcal{E}$ dans $\mathcal{V}$ telle que $H_2(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $H_2(0, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $H_2(1, \mathcal{G})$ soit invariant par X_i sur un certain voisinage V'' de la réunion des $\Sigma_i = \phi_i(\mathbb{T}^2)$ (ce voisinage ne dépendant pas de $\mathcal{G}$).*

Preuve. Fixons un $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$. Pour $i \in \{1, \ldots, N\}$, notons $\mathcal{T}_i$ l'espace des feuilletages de M qui sont transverses au tore Σ_i et appliquons le lemme 2.3.1 à l'hypersurface Σ_i : il existe une application continue $h_i : [0, 1] \times \mathcal{T}_i \to \mathcal{T}_i$ telle que pour tout feuilletage $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{T}_i$, $h_i(0, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $h_i(1, \mathcal{G}) \in \mathcal{T}_i$ est invariant par le flot local de X_i sur le voisinage Σ_i^ε de Σ_i défini dans le lemme 2.3.1. Si on choisit ε assez petit, les voisinages Σ_i^ε de Σ_i seront disjoints car les surfaces $\Sigma_i = \phi_i(\mathrm{T})$ le sont. Posons $\mathcal{E} = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{T}_i \bigcap \mathcal{V}$. Cet ensemble est non vide car il contient $\mathcal{F}$ par construction des ϕ_i ; c'est un voisinage de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{V}$. Définissons maintenant une application H_2 de $[0, 1] \times \mathcal{E} \to \mathcal{V}$ par $H_2(t, \mathcal{G}) = h_i(Nt - i + 1, \mathcal{G})$ pour $t \in \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]$ et $\mathcal{G} \in \mathcal{E}$. Comme les Σ_i^ε sont disjoints, le résultat obtenu pour $t \in \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]$ n'est pas modifié lors des étapes ultérieures. L'application H_2 ainsi définie présente bien les propriétés voulues. □

Bien sûr, on peut prendre V'' aussi petit que l'on veut ; en particulier, on supposera que V'' ne rencontre K^2 qu'en des points de V.

De la même manière, partant d'un 2-simplexe σ_i^2 de K^2, nous pouvons définir sur un voisinage V_i' de σ_i^2 un champ de vecteurs Y_i partout tangent à $\mathcal{F}$ et partout

transverse à σ_i^2. Si nous rendons un feuilletage $\mathcal{G}$ de $\mathcal{V}$ invariant par Y_i sur V_i' à l'aide du lemme 2.3.1, la trace de $\mathcal{G}$ au voisinage du bord de σ_i^2 n'est pas modifiée, car ledit bord étant dans V, ladite trace est déjà égale à $\mathcal{F}$ à son voisinage. Si nous effectuons cette modification pour tout $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{V}$ et successivement pour tout σ_i^2 dans K^2, et si le voisinage V_i' de σ_i^2 a été pris assez petit, nous obtenons :

Proposition 5.5.2. *Il existe un voisinage $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{V}$ et une application continue H_3 de $[0,1] \times \mathcal{E}'$ dans $\mathcal{V}$ telle que $H_3(t, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $H_3(0, \mathcal{G}) = \mathcal{G}$ et $H_3(1, \mathcal{G})$ soit invariant par chaque Y_i sur V'. En particulier, la trace du feuilletage $H_3(1, \mathcal{G})$ sur le voisinage V' du 2-squelette est entièrement déterminée par sa trace sur K^2.*

5.6. Preuve du théorème B. Nous définissons le voisinage $\mathcal{X}$ de $\mathcal{F}$ des feuilletages $\mathcal{G}$ tels que $\mathcal{G} \in \mathcal{U}$ (lemme 5.3.1), $H_1(1, \mathcal{G}) \in \mathcal{E}'$ (défini à la proposition 5.5.2), $H_3(1, H_1(1, \mathcal{G})) \in \mathcal{E}$ (défini à la proposition 5.5.1) et $\phi_i^{-1}(H_2(1, H_3(1, H_1(1, \mathcal{G})))) \in \mathcal{F}$ pour tout i.

Soit $\mathcal{G}$ quelconque dans l'espace $\mathcal{X}' := H_2(1, H_3(1, H_1(1, \mathcal{X})))$, auquel le voisinage $\mathcal{X}$ de $\mathcal{F}$ est homotope par construction. Nous définissons maintenant une famille à un paramètre $(\mathcal{G}_t)_{t\in[0,1]}$ de feuilletages telle que $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$ et que $\mathcal{G}_1$ ne dépende pas de $\mathcal{G}$; d'autre part, il sera clair que $\mathcal{G}_t$ dépend à la fois continûment de t et de $\mathcal{G}$: l'application $(t, \mathcal{G}) \to \mathcal{G}_t$ de $[0, 1] \times \mathcal{X}'$ dans $\mathbb{F}_1(M)$ constituera donc une homotopie de $\mathcal{X}'$ à un point et nous aurons le théorème 2. Ceci se fait en deux étapes.

Étape 1. Dans le tube $\phi_i(\mathrm{T})$, on homotope $\mathcal{G}$ au feuilletage $\phi_i(s(\partial(\phi_i^{-1}(\mathcal{G}))))$ en utilisant la proposition 4.7.1.

Étape 2. Cette étape se fait en trois temps :

• En premier lieu, nommons $\mathcal{G}^2$ le feuilletage en courbes que trace $\mathcal{G}$ sur l'intérieur $K^2 - K^1$ de K^2. À la section 3.1, on a mentionné l'existence d'une homotopie $t \to \mathcal{G}_t^2$ de $\mathcal{G}^2$ sur $\mathcal{F}^2$. Il nous faut maintenant prolonger cette homotopie de $K^2 - K^1$ à M toute entière.

• Étendons d'abord l'homotopie sur le voisinage V' du 2-squelette. Soit $\mathcal{G}_t'$ le feuilletage de V' obtenu en saturant $\mathcal{G}_t^2$ par le champ radial Y_i au voisinage de chaque 2-cellule σ_i^2 de K^2 et qui coïncide avec $\mathcal{F}$ sur $V \cap V'$. Par construction, $\mathcal{G}_t'$ définit bien un feuilletage de V' tout entier car $V' = V \bigcup_{i=1}^N V_i'$. En outre, nous constatons qu'au voisinage de K^2, ce feuilletage coïncide bien avec $\mathcal{G}$ lorsque $t = 0$ et avec $\mathcal{F}$ lorsque $t = 1$.

Nous appelons ensuite $\mathcal{G}_t''$ le feuilletage de V' obtenu en rendant $\mathcal{G}_t'$ invariant par le champ radial de chaque surface Σ_i sur V'' (cf. lemme 2.3.1). Puisque $\mathcal{G}$ est dans $\mathcal{X}'$, nous voyons que sur le complémentaire de la réunion des tubes $\phi_i(\mathrm{T})$, le feuilletage $\mathcal{G}_0''$ coïncide avec $\mathcal{G}$; d'autre part, sur ce même complémentaire, $\mathcal{G}_1''$ coïncide avec $\mathcal{F}$ car il s'obtient en saturant la trace de $\mathcal{F}$ sur K^2 par un champ transverse à K^2 et tangent à $\mathcal{F}$.

• Il existe clairement un unique feuilletage global $\mathcal{G}_t$ de M ayant les propriétés suivantes :

– sur le complémentaire des tubes $\phi_i(\mathrm{T})$ (qui est contenu dans V'), ce feuilletage coincide avec $\mathcal{G}_t''$;
– dans chaque tube $\phi_i(\mathrm{T})$, ce feuilletage a une restriction égale à l'image par $\phi_i \circ s \circ \phi_i^{-1}$ de sa trace sur Σ_i.

Soulignons que pour $t = 0$ ce feuilletage est égal à $\mathcal{G}$ et que pour $t = 1$ il ne dépend plus de $\mathcal{G}$. Ceci conclut donc la construction et la preuve du théorème 2.

6. Conclusion

Les résultats présentés ici s'appliquent uniquement aux feuilletages tendus ; le problème reste ouvert lorsque le feuilletage ne l'est pas. Par ailleurs, le cas de la dimension et de la codimension supérieure reste à étudier mais il nous semble d'une difficulté extrême.

Références

[1] V. I. Arnol'd, Small denominators I. Mappings of the circle onto itself. *Trans. Amer. Math. Soc.* (2) **46** (1965), 213–284. Zbl 0152.41905 MR 1452533

[2] M.-T. Benameur, Triangulations and the stability theorem for foliations. *Pacific J. Math.* **179** (1997), 221–239. Zbl 0871.57029 MR

[3] M. Baake, J. A. G. Roberts, Reversing symmetry groups of GL(2, $\mathbb{Z}$) and PGL(2, $\mathbb{Z}$) matrices with connections to cat maps and trace maps. *J. Phys. A* **30**, (1997), 1549–1573. Zbl 1001.37500 MR 1449997

[4] M. Brittenham, R. Naimi, R. Roberts, Graph manifolds and taut foliations. *J. Differential Geom.* **47**, (1997), 446–470. Zbl 0896.57017 MR 1472884

[5] C. Ehresmann, Sur les espaces fibrés différentiables. *C. R. Acad. Sci. Paris* **224** (1947), 1611–1612. Zbl 0029.42001 MR 0020774

[6] B. Farb, P. Shalen, Real-analytic actions of lattices. *Invent. Math.* **135** (1998), 273–296. Zbl 0954.22007 MR 1666834

[7] D. Gabai, Foliations and the topology of 3-manifolds. *J. Differential Geom.* **18** (1983), 445–503. Zbl 0533.57013 MR 0723813

[8] Hommage à Michel Herman. *Gaz. Math.* **88** (2001), 55–93.

[9] C. Godbillon, *Feuilletages*. Progr. Math. 98, Birkhäuser, Basel 1991. Zbl 0724.58002 MR 1120547

[10] É. Ghys, V. Sergiescu, Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages. *Topology* **19** (1980), 179–197. Zbl 0478.5701 MR 0572582

[11] G. Hector, Quelques exemples de feuilletages espèces rares. *Ann. Inst. Fourier* **26** (1976), 239–264. Zbl 0313.57015 MR 0413128

[12] G. Hector, U. Hirsch, *Introduction to the geometry of foliations, Part A*. Aspects Math. E1, Vieweg, Braunschweig 1981. Zbl 0486.57002 MR 0639738

[13] M. R. Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **49** (1979), 5–233. Zbl 0448.58019 MR 0538680

[14] S. Hurder, Classifying space of smooth foliations. *Illinois J. Math.* **29** (1985), 108–133. Zbl 0606.57016 MR 0769761

[15] M. R. Herman, F. Sergeraert, Sur un théorème d'Arnol'd et Komolgorov. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **273** (1971), 409–411. Zbl 0217.49601 MR 0290405

[16] M. Kanai, A new approach to the rigidity of discrete groups actions. *Geom. Funct. Anal.* **6** (1993), 943–1056. Zbl 0874.58006 MR 1421873

[17] J. K. Moser, A rapidly converging iteration method. II. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3) **20** (1966), 499–535. Zbl 0144.18202 MR 0206461

[18] S. P. Novikov, Topology of foliations. *Trans. Moscow Math. Soc.* (1965), 268–304. Zbl 0247.57006 MR 0200938

[19] G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. In *Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées*, Actualités scientifiques et industrielles 1183, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, Hermann, Paris 1952. Zbl 0049.12602 MR 0055692

[20] W. P. Thurston, A local construction for foliations of three-manifolds. In *Differential geometry* (Stanford, Calif., 1973), Proc. Sympos. Pure Math. 27, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975, 315–319. Zbl 0323.57014 MR 0380828

[21] W.P. Thurston, The theory of foliations of codimension greater than one. *Comment. Math. Helv.* **49** (1974), 214–231. Zbl 0295.57013 MR 0370619

[22] D. Witte, Arithmetic groups of higher $\mathbb{Q}$-rank cannot act on 1-manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.* **122** (1994), 333–340. Zbl 0818.22006 MR 1198459

[23] J.-C. Yoccoz, Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*(4) **17** (1984), 333–359. Zbl 0595.57027 MR 0777374

Received October 21, 2002; revised July 5, 2004

Audrey Larcanché, Laboratoire Paul Painlevé, U.F.R. de Mathématiques, Université de Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

E-mail: audrey.larcanche@math.univ-lille1.fr