

| | |
|---------------------|---|
| Zeitschrift: | Commentarii Mathematici Helvetici |
| Herausgeber: | Schweizerische Mathematische Gesellschaft |
| Band: | 82 (2007) |
| | |
| Artikel: | Invariant d'Hermite isotrope et densité des réseaux orthogonaux lorentziens |
| Autor: | Bavard, Christophe |
| DOI: | https://doi.org/10.5169/seals-98877 |

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Invariant d’Hermite isotrope et densité des réseaux orthogonaux lorentziens

Christophe Bavard

Résumé. Nous déterminons la densité maximale des réseaux orthogonaux lorentziens jusqu’en dimension 12 et en dimension 18 pour le type pair. Par ailleurs, nous définissons un *invariant d’Hermite isotrope* pour lequel nous établissons, dans le cas lorentzien, une théorie « de Voronoï » complète.

Abstract. We compute the maximal density of orthogonal Lorentzians lattices up to dimension 12 and in dimension 18 for the even type. On the other hand, we define an *isotropic Hermite invariant* and we show that it satisfies, in the Lorentzian case, a complete “Voronoi’s theory”.

Codes AMS (2000). 11H55.

Mots clé. Réseaux euclidiens orthogonaux, invariant d’Hermite.

Introduction

Introduits par Bergé et Martinet [B-M], les réseaux orthogonaux sont avec les réseaux symplectiques des exemples importants et naturels de réseaux *isoduaux*, c’est-à-dire isométriques à leur dual (cf. Conway et Sloane, [C-S]). Le problème de la densité maximale, soulevé par Buser et Sarnak [B-S] pour les réseaux symplectiques, se pose tout aussi naturellement pour les réseaux orthogonaux. L’approche traditionnelle « à la Voronoï » pour ces questions vise à classer les *maxima locaux* de l’invariant d’Hermite μ restreint à ces familles particulières. Ceux-ci sont caractérisés dans [B-M] et vérifient de bonnes propriétés de finitude ([B-M], [Bav4]). Cependant, leur classification dans le cas orthogonal (ou symplectique) est pour l’instant largement ouverte.

Nous nous concentrons ici sur le cas des réseaux orthogonaux de signature $(n, 1)$, que nous appellerons *orthogonaux lorentziens*, ou simplement *lorentziens*. L’étude de leur densité est abordée par une méthode directe et entièrement géométrique. Nous déterminons la densité maximale des réseaux lorentziens jusqu’en dimension 12 et en dimension 18 dans le cas pair (table 1 et 2). Celle-ci n’était connue qu’en dimension inférieure ou égale à 3 d’après [C-S]. D’autre part, le point de vue géométrique

développé est également relié à l'approche classique. Nous introduisons un invariant plus fin que μ , l'*invariant d'Hermite isotrope* μ^0 , pour lequel nous établissons dans le cas lorentzien une théorie « de Voronoï » complète, analogue à celle des réseaux usuels, avec en particulier un algorithme de Voronoï répondant au problème de la classification des maxima locaux de μ^0 .

Table 1. Densité maximale des réseaux lorentziens impairs de rang ≤ 12 .

| $n + 1$ | $\mu_{n,1}$ | \simeq | $n + 1$ | $\mu_{n,1}$ | \simeq |
|---------|--------------------|----------|---------|--------------------|----------|
| 2 | $2/\sqrt{3}$ | 1,1547 | 8 | 2 | 2.0000 |
| 3 | $1/2 + \sqrt{2}/2$ | 1,2071 | 9 | $5/3$ | 1,6666 |
| 4 | $4/3$ | 1,3333 | 10 | $1/2 + \sqrt{5}/2$ | 1,6180 |
| 5 | $7/5$ | 1,4000 | 11 | $5/3$ | 1,6666 |
| 6 | $3/2$ | 1,5000 | 12 | 2 | 2.0000 |
| 7 | $5/3$ | 1,6666 | | | |

Table 2. Densité maximale des réseaux lorentziens pairs de rang ≤ 18 .

| $n + 1$ | $\mu_{n,1}^{\text{II}}$ | \simeq | $n + 1$ | $\mu_{n,1}^{\text{II}}$ | \simeq |
|---------|-------------------------|----------|---------|-------------------------|----------|
| 2 | 1 | 1.0000 | 18 | $621/310$ | 2.0032 |
| 10 | 2 | 2.0000 | | | |

Les réseaux orthogonaux portent une structure sous-jacente de \mathbb{Z} -module bilinéaire indéfini. Quand on fixe cette structure entière, ou « type algébrique », en y ajoutant éventuellement l'action d'un groupe fini, l'ensemble des réseaux obtenus (considérés à isométrie près) s'identifie au quotient d'un espace symétrique X par un groupe discret Θ . L'isotropie relative au type algébrique est alors reliée à la topologie de $\Theta \backslash X$ (section 2). Par exemple μ et μ^0 coïncident à l'infini de $\Theta \backslash X$ et vérifient la compacité de Mahler. Au passage, nous obtenons aussi, en feuilletant les « classes isotropes », des rétractes naturels Θ -équivariants et cocompacts de X , proposition 2.3 (la construction de tels rétractes est un problème classique dans l'étude cohomologique des groupes arithmétiques, cf. Ash [Ash]).

Pour les réseaux lorentziens de rang $n + 1$, l'espace X s'identifie naturellement à l'espace hyperbolique \mathbf{H}^n (section 1). De plus, les fonctions longueur (normes des vecteurs des réseaux) s'expriment simplement au moyen de la distance hyperbolique, proposition 1.2. À partir de cette observation élémentaire, et en analysant l'action sur \mathbf{H}^n du groupe d'automorphismes Θ du type algébrique, nous déterminons la densité maximale en petite dimension (donnée par le maximum de μ , table 1 et 2). Notre étude

met en évidence des liens étroits entre la fonction densité et la géométrie des domaines fondamentaux de Θ ; par exemple, pour le type pair de rang 18, la densité maximale correspond au rayon interne du domaine fondamental (§1.4). Comme conséquence, la densité maximale est estimée jusqu'en dimension 23, avec notamment la construction de maxima locaux de densité (table 3, §1.6). Pour $13 \leq n + 1 \leq 18$, nous montrons que le maximum de μ est relativement faible, voisin de 2, ce qui reflète à nouveau une propriété géométrique particulière des domaines fondamentaux pour ces dimensions.

Toujours dans le cas lorentzien, l'invariant isotrope μ^0 est défini *via* les fonctions de Busemann par des points à l'infini de \mathbf{H}^n (proposition 1.2). Nous obtenons ainsi une « théorie de Voronoï » (en particulier un algorithme de Voronoï) pour μ^0 à l'aide de deux pavages duals de \mathbf{H}^n par des polyèdres hyperboliques, associés respectivement aux points à l'infini précédents et aux points parfaits (théorème 3). Cette vision géométrique, combinée avec les propriétés topologiques générales de $\Theta \setminus \mathbf{H}^n$ (section 2), est aussi la source de relations numériques concernant certains réseaux particuliers relativement à μ^0 (§3.3) : formule de masse pour les points parfaits, formules d'Euler pour les classes non isotropes ou pour les points eutactiques. Nous donnons également la valeur maximale de μ^0 jusqu'en dimension 16 (table 4).

1. Densité des réseaux orthogonaux lorentziens

1.1. Réseaux orthogonaux. Invariant d'Hermite isotrope. Un *réseau orthogonal* (cf. [B-M]) d'un espace euclidien E est un couple (Λ, σ) formé d'un réseau Λ de E et d'une isométrie *involutive* $\sigma \neq \pm \text{Id}_E$ qui échange Λ et son dual. Deux réseaux orthogonaux (Λ_i, σ_i) de E_i ($i = 1, 2$) sont isométriques s'il existe une isométrie φ de E_1 sur E_2 telle que $\varphi(\Lambda_1) = \Lambda_2$ et $\varphi\sigma_1\varphi^{-1} = \sigma_2$.

Tout réseau orthogonal (Λ, σ) hérite d'une structure entière. En effet, la forme bilinéaire symétrique

$$\alpha(u, v) = \langle u, \sigma(v) \rangle \quad (u, v \in E), \quad (1)$$

dont la restriction α_Λ à $\Lambda \times \Lambda$ est entière, induit un isomorphisme de groupes de Λ sur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Z})$. Le \mathbb{Z} -module bilinéaire indéfini $(\Lambda, \alpha_\Lambda)$ est alors caractérisé par son type (pair ou impair) et sa signature (p, q) , appelés *type* et *signature* de (Λ, σ) et évidemment invariants par isométrie de réseaux orthogonaux. Soit I^\pm (resp. U) le module bilinéaire associé au module quadratique $(\mathbb{Z}, \pm u^2)$ (resp. au module pair $(\mathbb{Z}^2, 2u_1u_2)$). Dans le cas impair $(\Lambda, \alpha_\Lambda)$ est isomorphe à $pI^+ + qI^-$; dans le cas pair, on a $p - q = 8a$ ($a \in \mathbb{Z}$) et $(\Lambda, \alpha_\Lambda)$ est isomorphe à $qU + |a|E_8^+, pU + |a|E_8^-$ ou pU selon le signe de a ([Ser, §V.2]).

La forme entière α_Λ permet de raffiner l'invariant d'Hermite. Soit (Λ, σ) un réseau orthogonal impair (resp. pair), et soit $k \in \mathbb{Z}$ (resp. $k \in 2\mathbb{Z}$) avec $k \notin 4\mathbb{Z} + 2$ si

$\dim E = 2$. Nous définissons $\mu^k(\Lambda) = \mu^k(\Lambda, \sigma)$ par

$$\mu^k(\Lambda) = \min\{|u|^2; u \in \Lambda \setminus \{0\}, \alpha(u, u) = k\}. \quad (2)$$

En particulier l'*invariant d’Hermite isotrope* μ^0 est défini par les vecteurs isotropes. Noter que les μ^k sont invariants par isométrie de réseaux orthogonaux. L’invariant d’Hermite μ des réseaux orthogonaux de rang fixé est évidemment le minimum des μ^k , mais on a un résultat plus précis.

Proposition 1.1. *Soit γ_m la constante d’Hermite en dimension m . Alors*

$$\mu = \min\{\mu^k; |k| \leq \gamma_m\}. \quad (3)$$

En effet, en appliquant l’inégalité de Cauchy–Schwarz à (1) on obtient la relation fondamentale

$$|\alpha(u, v)| \leq |u||v| \quad (u, v \in E) \quad (4)$$

qui borne les valeurs de α sur les vecteurs minimaux du réseau. Par exemple, en dimension $m \leq 8$ on a $\mu = \min\{\mu^{-1}, \mu^0, \mu^1\}$ pour le type impair et $\mu = \mu^0$ pour le type pair. C’est vrai même pour la valeur exceptionnelle $\mu(E_8) = 2$ par continuité. Il existe aussi des structures orthogonales sur E_8 (de type pair et impair) avec $\mu = \mu^2 = \mu^{-2} = 2$.

Exemples 1.1. (1) Les structures orthogonales sur un réseau entier unimodulaire Λ correspondent aux classes de conjugaison des éléments d’ordre 2 ($\neq -\text{Id}$) de $\text{Aut}(\Lambda)$. Par exemple pour le réseau de racines E_8 , en composant des générateurs du groupe de Weyl qui commutent (et leurs opposés), on obtient des structures orthogonales impaires de signature (p, q) pour $1 \leq p \leq 7$.

(2) *Structures orthogonales sur \mathbb{Z}^m .* Il est facile de voir que dans $\text{Aut}(\mathbb{Z}^m)$, produit semi-direct de $\{\pm 1\}^m$ et du groupe symétrique \mathcal{S}_m , tout élément d’ordre 2 distinct de $-\text{Id}$ est conjugué à $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m; (1, 2) \dots (2r-1, 2r))$ avec $\varepsilon_k = 1$ si $1 \leq k \leq p+r$ et $\varepsilon_k = -1$ sinon, pour un certain couple (p, r) vérifiant $0 \leq 2r \leq m$ et $\max(1, r) \leq p \leq m - \max(1, r)$. Il y a donc $1 + \min(p, q)$ structures orthogonales distinctes de signature (p, q) donnée ($1 \leq p \leq m-1$, $p+q = m$) sur \mathbb{Z}^m , soit au total $[m^2/4] + m - 1$ structures, dont une seule paire de signature (p, p) quand $m = 2p$. Pour ces structures, on a $\mu^0 = \mu = 1$ si $r > 0$, $\mu^1 = \mu = 1$ et $\mu^0 = 2$ si $r = 0$.

(3) Pour $p+q = m \geq 8$ et $p-q \equiv 0(8)$, le réseau D_m^+ admet une structure orthogonale paire de signature (p, q) avec $\mu^0(D_m^+) = \mu(D_m^+) = 2$ ([B-M, §6.4]).

1.2. Géométrie des longueurs. À partir d’ici nous nous concentrerons sur le cas *lorentzien*. Soit f une forme entière de signature $(n, 1)$ et de discriminant -1 sur \mathbb{Z}^{n+1} ; son extension à \mathbb{R}^{n+1} sera encore notée f . Rappelons que le projectifé \mathbf{H}_f du

cône négatif de f est un modèle classique de l'espace hyperbolique de dimension n . On pose $u \cdot v = f(u, v)$ (u et $v \in \mathbb{R}^{n+1}$), $u^2 = u \cdot u$ et $\bar{u} = \mathbb{R}u$ si $u \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Montrons que les classes d'isométrie de réseaux lorentziens (Λ, σ) dont le type α_Λ est isomorphe (sur \mathbb{Z}) à f sont paramétrées par \mathbf{H}_f . En effet, par transport des structures, on peut supposer que $(\Lambda, \alpha_\Lambda) = (\mathbb{Z}^{n+1}, f)$. D'après la relation (1), l'isométrie σ est une réflexion f -orthogonale et sa droite propre \bar{x} de valeur propre -1 appartient à \mathbf{H}_f ; il est clair que la formule

$$\langle u, v \rangle_{\bar{x}} = u \cdot v - 2 \frac{(u \cdot x)(v \cdot x)}{x \cdot x} \quad (u, v \in \mathbb{R}^{n+1}, \bar{x} \in \mathbf{H}_f). \quad (5)$$

définit une bijection entre \mathbf{H}_f et les structures euclidiennes ainsi obtenues.

L'invariant d'Hermite des réseaux lorentziens « de type f » peut donc s'exprimer sur \mathbf{H}_f par

$$\mu(\bar{x}) = \min \{ \langle u, u \rangle_{\bar{x}}; u \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\} \} \quad (\bar{x} \in \mathbf{H}_f). \quad (6)$$

Remarquer que μ est invariant par l'action du groupe $O(f, \mathbb{Z})$ des isométries entières de f . Considérons les fonctions $l_u(\bar{x}) = \langle u, u \rangle_{\bar{x}}$ ($x \in \mathbf{H}_f$, $u \in \mathbb{Z}^{n+1}$), appelées *fonctions longueur* (par analogie avec les surfaces de Riemann) et définies pour $u \in \mathbb{R}^{n+1}$. Les l_u admettent une description naturelle au moyen de la géométrie hyperbolique.

Proposition 1.2 (interprétation géométrique des longueurs). *Soit d la distance hyperbolique de \mathbf{H}_f . Soit $u \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Si $u^2 > 0$, on note u^\perp l'hyperplan polaire de u dans \mathbf{H}_f . Alors*

$$l_u = \begin{cases} -u^2 \cosh[2d(., \bar{u})] & \text{si } u^2 < 0, \\ l_u(p) \exp(2h_{u,p}) & \text{si } u^2 = 0, \\ [3pt] u^2 \cosh[2d(., u^\perp)] & \text{si } u^2 > 0, \end{cases}$$

où $h_{u,p}$ est la fonction de Busemann associée à u ($u^2 = 0$) normalisée par $h_{u,p}(p) = 0$, le point $p \in \mathbf{H}_f$ étant arbitraire. En particulier l_u est convexe et même strictement convexe si $u^2 \leq 0$.

Preuve. Le vecteur u définit un point de \mathbf{H}_f si $u^2 < 0$, et une hypersurface totalement géodésique u^\perp de \mathbf{H}_f (intersection de \mathbf{H}_f avec le projectifé de l'hyperplan f -orthogonal à u) si $u^2 > 0$. Pour ces cas, on a respectivement

$$\cosh^2[d(\bar{x}, \bar{u})] = \frac{(x \cdot u)^2}{x^2 u^2}, \quad \sinh^2[d(\bar{x}, u^\perp)] = -\frac{(x \cdot u)^2}{x^2 u^2} \quad (\bar{x} \in \mathbf{H}_f). \quad (7)$$

Si $u^2 = 0$, le point \bar{u} est situé au bord de \mathbf{H}_f . Soit $\bar{y} \in \mathbf{H}_f$. La fonction de Busemann $h_{u,\bar{y}}$ est définie avec la géodésique γ qui joint les points \bar{y} et \bar{u} par

$h_{u, \bar{y}} = \lim_{t \rightarrow \infty} [d(\cdot, \gamma(t)) - t]$ (t étant la longueur d'arc). On vérifie alors que

$$h_{u, \bar{y}}(\bar{x}) = \ln \left[\frac{|x \cdot u|}{|y \cdot u|} \left(\frac{y^2}{x^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{H}_f). \quad (8)$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer la trigonométrie hyperbolique usuelle. \square

Remarque 1.1. Il y a donc une forte analogie entre l'invariant d'Hermite isotrope des réseaux orthogonaux lorentziens et celui des réseaux usuels pour lequel les fonctions longueur sont aussi des exponentielles de fonctions de Busemann dans l'espace symétrique P_m des matrices de Gram ([Bav1, 1.3]).

1.3. Densité maximale pour le type impair de rang ≤ 12 . Soit Θ_f le noyau de l'action de $O(f, \mathbb{Z})$ sur les composantes connexes du cône négatif de f , et soit Γ_f le sous-groupe de Θ_f engendré par les réflexions hyperplanes associées aux racines de carré positif du module indéfini (\mathbb{Z}^{n+1}, f) . On sait que pour $n \leq 19$, Γ_f est d'indice fini dans Θ_f , [Vin1], [Vin2], [V-K]. Pour estimer la densité maximale des réseaux orthogonaux lorentziens en petite dimension, nous utilisons l'interprétation et les propriétés géométriques des longueurs (proposition 1.2), ainsi que la description explicite d'un domaine fondamental polyédral Π_f pour Γ_f donnée dans [Vin1], [Vin2] ($n \leq 17$) et [V-K] ($n = 18, 19$). Dans le cas impair, on prend $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$ et on pose $\Theta_n = \Theta_f$, $\Pi_n = \Pi_f$.

Théorème 1 (densité maximale pour le type impair de rang ≤ 12). *La valeur maximale $\mu_{n,1}$ de l'invariant d'Hermite des réseaux orthogonaux lorentziens de type impair et de dimension $n+1 \leq 12$ est donnée par la table 1. De plus, $\mu_{n,1}$ ($1 \leq n \leq 11$) est atteinte par un unique point modulo Θ_n (correspondant à A_2 , E_8 , D_{12}^+ pour $n+1 = 2, 8, 12$).*

Preuve. La preuve consiste à majorer un petit nombre de longueurs l_1, \dots, l_N choisies dans chaque cas en relation avec la géométrie de Π_n . Le maximum d'une fonction convexe sur un polyèdre de volume fini (condition superflue en dimension 1) de l'espace hyperbolique sera atteint en un point extrémal, c'est-à-dire un sommet (éventuellement à l'infini, en admettant la valeur $+\infty$ pour f). On majorera donc les longueurs en les évaluant aux sommets de Π_n , ou aux sommets de sous-polyèdres de Π_n si nécessaire. Une fois trouvée une estimation $\mu \leq \min(l_1, \dots, l_N) \leq M$ sur Π_n , il suffira pour conclure que M soit une valeur de μ .

D'après [Vin1], Π_n est donné en coordonnées homogènes $x = [X_1, \dots, X_{n+1}]$ par un nombre fini d'inéquations de la forme $x \cdot e_j \leq 0$ associées à des racines de

(\mathbb{Z}^{n+1}, f) (e_j entier avec $e_j \cdot e_j = 1$ ou 2), plus précisément ($1 \leq n \leq 11$) :

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq X_n \leq X_{n-1} \leq \cdots \leq X_1, \\ X_1 + X_2 + X_3 \leq X_{n+1} \text{ } (n \geq 3) \quad \text{ou} \quad X_1 + X_2 \leq X_3 \text{ } (n = 2), \\ \sum_{i=1}^{11} X_i \leq 3X_{n+1} \text{ } (n \geq 11) \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 3X_{11} \text{ } (n = 10). \end{array} \right\} \quad (9)$$

Pour ces petites valeurs de n , le polyèdre Π_n est un domaine fondamental de Θ_n . Il admet un unique sommet à l'infini si $n \leq 8$, et deux sommets à l'infini si $9 \leq n \leq 11$. Noter que ces sommets, ou classes modulo Θ_n de vecteurs entiers isotropes, correspondent bijectivement aux réseaux unimodulaires entiers euclidiens de dimension $n - 1$ (cf. [Vin2]). Combinatoirement, Π_n est un simplexe Δ_n si $1 \leq n \leq 9$, et une pyramide de base $\Delta_8 \times \Delta_{n-9}$ (contenue dans la face $X_9 = X_{10}$) si $n = 10, 11$. On note $u = (0, \dots, 1, 0)^t$ la racine associée à la face $X_n = 0$, et pour $1 \leq n \leq 9$, on note p_n le sommet opposé à cette face.

Traitons d'abord les cas $3 \leq n \leq 7$ et $n = 11$, où *une seule* longueur suffit. La longueur l_u est fonction strictement croissante de la distance à la face $X_n = 0$ (proposition 1.2). Si $3 \leq n \leq 7$, il est donc évident que l_u atteint son maximum sur Π_n au sommet opposé, c.-à-d. $p_n = [1, \dots, 1, 3]$, et uniquement en ce point. Si $n = 11$, il y a 9 sommets de Π_{11} tels que $X_{11} \neq 0$, et le maximum de l_u est atteint uniquement en $q_{11} = [2, 1, \dots, 1, 4]$ (le réseau correspondant est D_{12}^+). Pour $3 \leq n \leq 7$ et $n = 11$, il se trouve que $l_u(p_n) = \mu(p_n)$ (cf. §1.5), d'où le résultat.

Si $n \in \{1, 2, 8, 9, 10\}$, on obtient une majoration optimale avec deux longueurs en découplant Π_n en deux sous-polyèdres. On pose respectivement $v = (1, 1)^t$ ($n = 1$), $v = (1, 0, 1)^t$ ($n = 2$), $v = (1, \dots, 1, 3)^t$ ($n = 8, 9$ et 10). L'élément géométrique associé à v (cf. proposition 1.2) est le sommet p_n si $n = 1, 8$ ou 9 , un sommet à l'infini si $n = 2$ et une face du polyèdre si $n = 10$. Pour $n = 1, 8$ ou 9 , il existe sur chacune des n arêtes de Π_n issues de p_n un unique point où $l_u = l_v$; on partage Π_n avec l'hyperplan passant par ces n points. Pour $n = 2$, on découpe Π_2 en deux triangles avec la droite $X_1 + (1 + \sqrt{2})X_2 = X_3$. Enfin on partage Π_{10} en deux pyramides avec l'hyperplan H d'équation $-X_{10} = X_1 + \cdots + X_{10} - 3X_{11}$ sur lequel $l_u = l_v$; l'intersection de H avec la base de Π_{10} (c.-à-d. $X_9 = X_{10}$) est un simplexe de dimension 8. En procédant comme indiqué plus haut, on obtient que dans chacun des cas étudiés, le maximum de $\min(l_u, l_v)$ sur Π_n est atteint en un unique point q_n donné par

$$\begin{aligned} q_1 &= [2 - \sqrt{3}, 1], \\ q_2 &= [1, 1, 2 + \sqrt{2}], \\ q_8 &= [3, 2, \dots, 2, 7], \\ q_9 &= [5 + \sqrt{5}, 4, \dots, 4, 13 + \sqrt{5}], \\ q_{10} &= [2, 1, \dots, 1, 4]. \end{aligned} \quad (10)$$

De plus on a $l_u(q_n) = l_v(q_n) = \mu(q_n)$ pour $n \in \{1, 2, 8, 9, 10\}$ (cf. §1.5), ce qui achève la preuve. \square

Remarque 1.2. Le point q_2 correspond au réseau mis en évidence dans [C-S, sect. 3]). On peut également vérifier que les maxima trouvés en dimension 5 et 7 correspondent, avec les notations de [C-S, table 1 et sect. 6], aux réseaux $(A_{451})^+$ et $(E_{631})^+$.

1.4. Densité maximale pour le type pair de rang ≤ 18

Théorème 2 (densité maximale pour le type pair de rang ≤ 18). *La valeur maximale $\mu_{n,1}^{\text{II}}$ de l'invariant d'Hermite des réseaux orthogonaux lorentziens de type pair et de dimension $n+1 \leq 18$ est donnée par la table 2. De plus, $\mu_{n,1}^{\text{II}}$ ($n = 1, 9, 17$) est atteinte par un unique point modulo Θ_f (correspondant à \mathbb{Z}^2 et D_{10}^+ pour $n+1 = 2, 10$).*

Preuve. On note ici E_8 la matrice donnée dans [Bou, p. 270] ou [Ser, p. 89] (matrice de Gram d'une base de racines d'un système « de type E_8 »), et on pose $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit f la forme bilinéaire dont la matrice, dans la base canonique (ε_i) de \mathbb{R}^{n+1} , est formée de k blocs diagonaux E_8 suivis d'un bloc U_2 ($n+1 = 8k+2$). Pour $k = 0, 1, 2$, une application directe de [Vin1] à partir du point base $[0, \dots, 0, 1, -1]$ permet d'expliciter un polyèdre Π_f de volume fini ($k = 1, 2$) au moyen des racines suivantes :

$$\left. \begin{aligned} e_j &= -\varepsilon_j \quad (j = 1, \dots, n-1), \\ e_n &= -\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \\ e_{n+1} &= 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4 + 5\varepsilon_5 \\ &\quad + 4\varepsilon_6 + 3\varepsilon_7 + 2\varepsilon_8 + \varepsilon_{n+1} \quad (n = 9, 17), \\ e_{19} &= 2\varepsilon_9 + 3\varepsilon_{10} + 4\varepsilon_{11} + 6\varepsilon_{12} + 5\varepsilon_{13} \\ &\quad + 4\varepsilon_{14} + 3\varepsilon_{15} + 2\varepsilon_{16} + \varepsilon_{18} \quad (n = 17). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Si $n = 9$, Π_f est un simplexe et on a $\Gamma_f = \Theta_f$. Si $n = 17$, Π_f est une pyramide de base $\Delta_8 \times \Delta_8$ ([Vin1]) et Γ_f est d'indice 2 dans Θ_f comme le suggère la symétrie du diagramme de Coxeter de Π_f (figure 1).

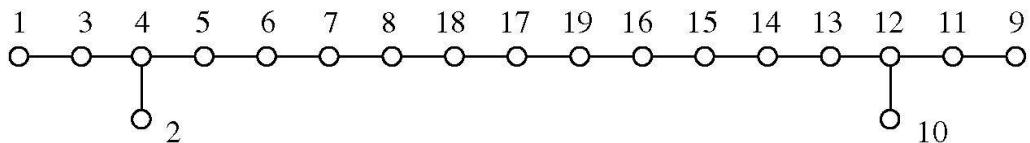


Figure 1. Diagramme de Coxeter de Π_f .

Pour $n = 1$ et 9 , Π_f admet un unique sommet à l'infini \bar{e}_{n+1} , et on vérifie que la longueur associée $l_{\varepsilon_{n+1}}$ est maximale en un unique sommet b_n de Π_f :

$$\begin{aligned} b_1 &= [-1, 1], \\ b_9 &= [2, 5/2, 7/2, 5, 4, 3, 2, 1, -1, 1]. \end{aligned} \tag{12}$$

Le point b_9 est le sommet opposé à la face $x \cdot e_1 = 0$ de Π_f . D'après 1.5 on a de plus $\mu(b_n) = l_{\varepsilon_n}(b_n)$ ($n = 1, 9$); les réseaux correspondants sont isométriques respectivement à \mathbb{Z}^2 et D_{10}^+ . Pour $n = 17$, on considère le point

$$b_{17} = [46, 68, 91, 135, 110, 84, 57, 29, 46, 68, 91, 135, 110, 84, 57, 29, -30, 31]. \tag{13}$$

Ce point est équidistant de *toutes* les faces de Π_f . En procédant comme au §1.6 (cf. lemme 1.3) on obtient la majoration $\mu(p) \leq 621/310$ ($p \in \mathbf{H}_f$), avec inégalité stricte si $p \neq b_{17}$ modulo Θ_f . Il se trouve (cf. §1.5) que $\mu(b_{17}) = 621/310$ (avec 19 paires de vecteurs minimaux $(\pm e_j)_{1 \leq j \leq 19}$), ce qui achève la preuve. Noter que dans ce dernier cas le maximum de μ est lié au rayon interne de Π_f . \square

1.5. Étude des maxima de densité. Nous prouvons maintenant que les bornes établies en 1.3 et 1.4 (voir table 1 et 2) correspondent à des valeurs de la densité. Rappelons que l'invariant d'Hermite du réseau associé à $\bar{x} \in \mathbf{H}_f$ est le minimum de

$$l_u(\bar{x}) = u \cdot u - 2 \frac{(u \cdot x)^2}{x \cdot x} \quad (\bar{x} \in \mathbf{H}_f), \tag{14}$$

le vecteur u décrivant $\mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$, et que les valeurs de u^2 sur les vecteurs minimaux peuvent être bornées grâce à l'inégalité (4).

Commençons par le cas où $3 \leq n \leq 7$ (donc le type est impair) et considérons $x_0 = (1, \dots, 1, 3)^t$. On a alors $l_u(\bar{x}_0) = u^2 + 2(u \cdot x_0)^2/(9-n)$ et on observe que l'entier $u^2 - u \cdot x_0$ est toujours pair. Si $n = 7$, le réseau est donc isomorphe à E_8 et le minimum vaut 2. Si $3 \leq n \leq 6$, on peut grâce à (4) se restreindre à $u^2 = -1, 0$ ou 1 . Sachant que $l_u(\bar{x}_0) > 0$, on voit que $(9-n)l_u(\bar{x}_0)$ est respectivement minoré, suivant ces trois valeurs de u^2 , par $9+n, 8$ et $11-n$; d'où l'on conclut que le minimum vaut $(11-n)/(9-n)$.

Pour les cas restants, nous utilisons de plus une autre inégalité. Soit A une matrice carrée d'ordre m définie positive. Si u et v sont des vecteurs de \mathbb{R}^m , on pose $\langle u, v \rangle = u^t v$ et $A[u] = u^t A u$. En choisissant une racine carrée de A , on prouve la relation

$$\langle u, v \rangle^2 \leq A[u]A^{-1}[v]. \tag{15}$$

Considérons maintenant $n \in \{1, 2, 8, 9, 10, 11\}$ avec f de type impair. Soit q_n le point de \mathbf{H}_f défini par l'équation (10), complétée par $q_{11} = [2, 1, \dots, 1, 4]$. Traitons

les cas $8 \leq n \leq 11$, en supposant que $\mu(q_{11}) < 2$. Soit $u = (u_i)$ un vecteur minimal. L'inégalité (15) montre que

$$u_i^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad (u_i - u_j)^2 \leq 1 \quad (2 \leq i, j \leq n). \quad (16)$$

En particulier les u_i pour $2 \leq i \leq n$ ont le même signe. Par suite, $l_u(q_n)$ ne dépend que des trois variables entières u_1 , $\sum_{i=2}^n u_i$ et u_{n+1} . Par ailleurs, $u^2 = u_1^2 + |\sum_{i=2}^n u_i| - u_{n+1}^2 = -1, 0$ ou 1 . L'examen des diverses possibilités (u_1 et u_{n+1} étant aussi bornées par (15)) conduit aisément aux valeurs de la table 1. Le cas $n = 2$ se traite de façon analogue et $n = 1$ donne le réseau équilatéral.

Passons au type pair. Soit b_n ($n = 1, 9$ ou 17) le point défini par (12) et (13). Les vecteurs entiers seront écrits sous la forme $u = (u_i) = (v, u_n, u_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{8k+2}$ avec $k = 0, 1$ ou 2 . Si $n = 1$, le réseau est isomorphe à \mathbb{Z}^2 . Si $n = 9$, considérons un vecteur minimal $u \in \mathbb{Z}^{10}$. On a $l_u(b_9) = u^2 + (u_1 - 2u_{10} + 2u_9)^2/2$ avec $u^2 = E_8[v] + 2u_9u_{10}$ (voir au §1.4 la définition de f). Supposons que $\mu(b_9) < 2$; alors $u^2 = 0$ (inégalité (4)), en particulier v n'est pas nul, et $l_u(b_9) = 1/2$. Mais d'après (15), on a $|u_9| \leq 1$, $|u_{10}| \leq 1$ et $|u_{10} - u_9| \leq 1$, ce qui contredit $u^2 = 0$. Reste le cas $n = 17$. On a

$$l_u(b_{17}) = u^2 + \frac{a^2}{310} \quad \text{avec } a = \sum_{i=1}^{16} u_i + 31u_{17} - 30u_{18}, \quad (17)$$

et $u^2 = (E_8 \oplus E_8)[v] + 2u_{17}u_{18}$. Supposons que $\mu(b_{17}) < 621/310$. Soit $u \in \mathbb{Z}^{18}$ minimal, donc vérifiant $u^2 = -2, 0$ ou 2 . Si $u^2 = -2$, on voit, toujours grâce à (4), que $|a| \geq 36$, ce qui est absurde. Si $u^2 = 0$, alors $|a| \leq 24$ et par (15) $|u_{17}| \leq 2$, $|u_{18}| \leq 2$. Ou bien $v = 0$, ou bien (quitte à changer u en $-u$), le triplet $(u_{17}, u_{18}, E_8 \oplus E_8[v])$ vaut $(1, -1, 2)$, $(1, -2, 4)$, $(2, -1, 4)$ ou $(2, -2, 8)$. Soit $w \in \mathbb{Z}^8$ tel que $E_8[w] = 2, 4, 6$ ou 8 ; en appliquant (15) à chaque coordonnée, on voit que $|\sum_{i=1}^8 w_i|$ est majoré respectivement par $33, 46, 59$ et 69 . Il en résulte que $|a| \geq 25$ dans tous les cas, ce qui est absurde. Enfin, si $u^2 = 2$, u est une racine de (\mathbb{Z}^{18}, f) et l'inégalité $l_u(b_{17}) < 621/310$ signifie que l'hyperplan u^\perp coupe l'intérieur du domaine fondamental Π_f de Γ_f , ce qui est impossible (voir §1.4 pour la description géométrique de Π_f). On pourrait aussi exclure ce dernier cas en procédant comme plus haut.

Remarque 1.3. La méthode indiquée ci-dessus permet aussi d'expliciter les vecteurs minimaux dans chaque cas.

1.6. Estimations géométriques supplémentaires. On considère une forme entière f comme en 1.2, de rang $n+1 \leq 20$, et on note μ_f la valeur maximale de l'invariant d'Hermite des réseaux lorentziens de type f .

Lemme 1.3. Soit $p \in \Pi_f$. Pour $l = 1, 2$, on note $r_l(p)$ le maximum des distances $d(p, H)$ quand H décrit l'ensemble des faces de Π_f définies par des racines de

carré l . On a alors la majoration

$$\mu_f \leq \max\{\cosh(2r_1(p)), 2 \cosh(2r_2(p))\}. \quad (18)$$

Preuve. Il suffit de majorer μ sur Π_f qui contient un domaine fondamental de Θ_f . Par ailleurs on peut supposer que p est intérieur à Π_f . On décompose alors Π_f en pyramides de sommet p et sur chacune d'elles, μ est majoré en fonction de la distance à la base (face de Π_f), d'où le résultat. \square

Proposition 1.4. *La valeur maximale $\mu_{n,1}$ de l'invariant d'Hermite des réseaux lorentziens de type impair et de rang $n+1$, $13 \leq n+1 \leq 23$, est estimée dans la table 3, où $\beta_{12} = (1507 + 11\sqrt{2246})/1014$, $\beta_{17} = (114 - \sqrt{2})/56$ et les nombres $(\beta_n)_{13 \leq n \leq 16}$ sont algébriques de degré 4 sur \mathbb{Q} .*

Table 3. Estimations de $\mu_{n,1}$ pour $13 \leq n+1 \leq 23$.

| $n+1$ | $\mu_{n,1} \geq$ | $\mu_{n,1} <$ | $n+1$ | $\mu_{n,1} \geq$ |
|-------|----------------------------|-------------------------|-------|------------------------|
| 13 | $\beta_{12} \simeq 2.0003$ | $651/325 \simeq 2.0031$ | 19 | $184/91 \simeq 2.0219$ |
| 14 | $\beta_{13} \simeq 2.0007$ | $507/253 \simeq 2.0040$ | 20 | $112/55 \simeq 2.0363$ |
| 15 | $\beta_{14} \simeq 2.0004$ | $772/385 \simeq 2.0052$ | 21 | $31/15 \simeq 2.0666$ |
| 16 | $\beta_{15} \simeq 2.0026$ | $572/285 \simeq 2.0071$ | 22 | $15/7 \simeq 2.1428$ |
| 17 | $\beta_{16} \simeq 2.0048$ | $205/102 \simeq 2.0099$ | 23 | $12/5 \simeq 2.4000$ |
| 18 | $\beta_{17} \simeq 2.0104$ | $141/70 \simeq 2.0143$ | | |

Preuve. Considérons le point

$$c_n = [24, 23, \dots, 25-n, 70]. \quad (19)$$

Noter que c_n est invariant par le groupe d'isométries G_n de Π_n pour $n \leq 19$ (par exemple $G_{18} \simeq \mathcal{S}_4$ et $G_{19} \simeq \mathcal{S}_5$, [V-K]). Si $n \leq 18$, ce point c_n est équidistant de toutes les faces de Π_n associées aux racines de carré 2, et la valeur commune des longueurs correspondantes vaut

$$v_n = 2 \frac{(n-26)(2n^2 - 95n + 1131)}{(n-25)(2n-49)(n-24)}. \quad (20)$$

De plus, pour $n \leq 17$ on a $r_1(c_n) < r_2(c_n)$, d'où la majoration $\mu_{n,1} \leq v_n$ (lemme) ; l'inégalité stricte s'obtient par la preuve du lemme. Pour $n = 18, 19$, on a la relation $\mu(c_n) = v_n$. Cette égalité restant valable pour $20 \leq n \leq 22$, on conclut que $\mu_{1,n} \geq v_n$ pour $18 \leq n \leq 22$. On vérifie également que pour $12 \leq n \leq 22$, c_n est parfait et eutactique (voir §3.1) relativement au système de longueurs valant v_n ; par suite

([Bav1, §2.1]) si $12 \leq n \leq 17$ la majoration par ν_n est localement optimale pour ce système, et ν_n est un maximum local de densité pour $18 \leq n \leq 22$.

La construction de réseaux lorentziens assez denses ($12 \leq n \leq 17$) s'effectue en utilisant les autres éléments géométriques de Π_n . Les faces de ce polyèdre étant numérotées comme dans la table 6 de [Vin1], on note $(l_k)_{1 \leq k \leq N_n}$ les longueurs associées. Les points donnant les minorations de la table 3 pour $12 \leq n \leq 17$ sont uniquement définis dans Π_n par l'égalité de certaines longueurs (l_k) , $k \in \{1, \dots, N_n\} \setminus J_n$, et d'une longueur l_{w_n} associée à un sommet de Π_n si $13 \leq n \leq 16$, avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} J_{12} &= \{13\}, \quad J_{17} = \{5, 13\}, \\ J_{13} &= \{5, 6\}, \quad w_{13} = [2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4], \\ J_{14} &= \{6, 7, 8\}, \quad J_{15} = \{5, 6, 9\}, \quad w_{14}, w_{15} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, \dots, 1, 1, 6], \\ J_{16} &= \{3, 11, 17\}, \quad w_{16} = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4]. \end{aligned}$$

Les sommets w_n , $n = 13, 15, 16$ sont situés à l'infini. Le calcul montre que pour $13 \leq n \leq 16$, β_n appartient au corps quartique $\mathbb{Q}(\theta_n)$ défini par

$$\begin{aligned} \theta_{13}^4 - 16\theta_{13}^2 - 136\theta_{13} - 566 &= 0, \\ \theta_{14}^4 - 1154\theta_{14}^2 - 16512\theta_{14} + 46036 &= 0, \\ \theta_{15}^4 - 2\theta_{15}^3 - 122\theta_{15}^2 + 2466\theta_{15} - 6561 &= 0, \\ \theta_{16}^4 - 2\theta_{16}^3 - 62\theta_{16}^2 - 786\theta_{16} + 57 &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

De plus, on a $\beta_n = P_n(\theta_n)$, où θ_n est une racine convenable de (21), avec :

$$\begin{aligned} P_{13}(t) &= 2(1071832t^3 - 770492t^2 - 38450040t + 5237155223)/5285302305, \\ P_{14}(t) &= (7776t^3 - 191652t^2 - 5034720t + 3095413193)/1536378935, \\ P_{15}(t) &= (16382t^3 + 1410467t^2 + 17516168t + 9589881744)/4797591903, \\ P_{16}(t) &= (-2437t^3 + 32231t^2 - 74617t + 67058907)/33168576. \end{aligned} \quad \square$$

Remarques 1.4. (1) Les valeurs relativement faibles de $\mu_{n,1}$ pour $12 \leq n \leq 17$ reflètent la forme géométrique « étroite » de Π_n .

(2) On vérifie (voir ci-dessus) que les valeurs β_n ($12 \leq n \leq 17$) et ν_n ($18 \leq n \leq 22$) correspondent à des maxima locaux de densité pour les réseaux lorentziens.

(3) Les minorations données en dimension 13 et 15 améliorent légèrement celles de [C-S, table 1].

2. Autres aspects géométriques

2.1. Réseaux marqués. Actions de groupes. Compacité. Dans cette section, nous poursuivons l'étude des réseaux orthogonaux en signature quelconque. Ces objets sont décrits par des espaces symétriques riemanniens. Nous en donnons quelques propriétés topologiques générales qui seront illustrées à la section 3 avec l'invariant d'Hermite isotrope du cas lorentzien.

Considérons \mathbb{R}^m muni de la structure euclidienne $\langle u, v \rangle = u^t v$ et de la forme indéfinie de signature (p, q) « usuelle » $\alpha(u, v) = \sum_{i=1}^p u_i v_i - \sum_{i=p+1}^m u_i v_i$ ($u, v \in \mathbb{R}^m$, $p + q = m$). D'autre part, soit f une forme bilinéaire symétrique entière indéfinie sur \mathbb{Z}^m de signature (p, q) et de discriminant ± 1 , et soit $f_{\mathbb{R}}$ son extension à $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \otimes \mathbb{Z}^m$. Un *réseau orthogonal marqué de type* f est un \mathbb{R} -isomorphisme unimodulaire de $f_{\mathbb{R}}$ sur α . Il est clair que tout réseau orthogonal dont le type est isomorphe à f (voir §1.1) peut s'écrire sous cette forme, c.-à-d. $P^t \mathbb{Z}^m$ avec

$$P \in \mathrm{SL}_m(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha(P^t x, P^t y) = f(x, y) \quad (x, y \in \mathbb{Z}^m). \quad (22)$$

Notons P_m l'ensemble des matrices symétriques réelles $m \times m$ positives de déterminant 1. C'est un espace symétrique riemannien sur lequel $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ agit isométriquement et transitivement par $P \cdot A = P A P^t$ ($P \in \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$, $A \in P_m$). Soit V_f l'ensemble des matrices de Gram des réseaux orthogonaux marqués de type f (matrices $P P^t$ où P vérifie (22)). On sait (cf. [Bav4, §2.7]) que V_f est une sous-variété connexe, complète et totalement géodésique de P_m ; de plus, si F est la matrice de f dans la base canonique, on a

$$V_f = \{A \in P_m; A F^{-1} A = F\}. \quad (23)$$

Le quotient $\mathrm{SO}^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f$ s'identifie avec l'ensemble des réseaux orthogonaux dont le type est isomorphe à f , modulo isométrie directe de réseaux orthogonaux. Observons que l'inégalité (4) se traduit via (22) en termes de formes quadratiques : tout élément $A \in V_f$ satisfait l'inégalité

$$|f_{\mathbb{R}}(x, x)| \leq A[x] \quad (x \in \mathbb{R}^m). \quad (24)$$

On voit ainsi que V_f coïncide avec l'ensemble des *majorantes minimales*, ou *majorantes d'Hermite* de la forme quadratique $f_{\mathbb{R}}$ (cf. [Bor, §I.5]).

Il est naturel de considérer, comme dans la théorie usuelle, des réseaux orthogonaux stables par une action préservant la structure orthogonale, c'est-à-dire en termes de formes, préservant V_f . Notons $\mathrm{GO}(f, \mathbb{R})$ (resp. $\mathrm{GO}_{p,q}(\mathbb{R})$) le groupe des similitudes orthogonales relativement à f (resp. à α) de rapport ± 1 . Alors le stabilisateur de V_f , pour l'action sur P_m des $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ avec $\det(P) = \pm 1$, coïncide avec $\mathrm{GO}^t(f, \mathbb{R})$ ([Bav4, §2.8, prop. 2.14]).

Soit $\rho : \Pi \rightarrow \mathrm{GO}^t(f, \mathbb{Z})$ une représentation entière d'un groupe fini Π . On pose $\rho^{\vee} = (\rho^t)^{-1}$ et on note $\mathbb{Z}_{\rho^{\vee}}^m$ le $\mathbb{Z}[\Pi]$ -module correspondant. Un *réseau orthogonal de*

type (f, ρ) est un réseau Λ stable par une représentation de Π dans $\mathrm{O}_m(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GO}_{p,q}(\mathbb{R})$ et tel que f soit isomorphe à α_Λ par un isomorphisme de $\mathbb{Z}[\Pi]$ -modules entre $\mathbb{Z}_{\rho^\vee}^m$ et Λ . La notion de *réseau orthogonal marqué de type* (f, ρ) est analogue à celle du cas particulier où ρ est triviale (voir plus haut).

Considérons l'ensemble V_f^ρ des formes $A \in V_f$ invariantes par ρ , c'est-à-dire $\rho(\pi)A\rho(\pi)^t = A$ pour tout π dans Π . Si G est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$, on note G_ρ le commutant de ρ dans $G \cap \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$. Le groupe $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{R})$ (d'indice fini dans $\mathrm{GO}_\rho^t(f, \mathbb{R})$) agit sur V_f^ρ . Il est clair que l'ensemble des réseaux orthogonaux marqués (resp. non marqués) de type (f, ρ) , considérés modulo isométrie directe conjuguant les actions, s'identifie via les matrices de Gram à V_f^ρ (resp. à $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f^\rho$). Voici les principales propriétés de V_f^ρ .

Proposition 2.1. ([Bav4, §2.5]) (1) *L'ensemble V_f^ρ est une sous-variété non vide, connexe, complète et totalement géodésique de l'espace P_m . C'est une orbite du commutant $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{R})$.*

(2) *L'application $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f^\rho \rightarrow \mathrm{SL}(m, \mathbb{Z}) \backslash P_m$ est propre et à fibres finies.*

Corollaire 2.2. *L'invariant d'Hermite isotrope des réseaux orthogonaux tend vers 0 à l'infini de l'espace de modules $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f^\rho$.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ et $(V_f^\rho)^{\geq \varepsilon} = \{A \in V_f^\rho; \mu(A) \geq \varepsilon\}$. Alors $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash (V_f^\rho)^{\geq \varepsilon}$ est compact (proposition 2.1 (2) et critère de Mahler usuel). Mais d'après l'inégalité fondamentale (4), μ coïncide avec μ^0 en dehors de $(V_f^\rho)^{\geq 1}$. \square

2.2. Classes minimales. Rétractions équivariantes. L'espace V_f^ρ est partitionné comme dans la théorie classique par les configurations de vecteurs minimaux (cf. [Mar, ch IX]). Deux formes A et B de V_f^ρ sont dans la même *classe minimale* si elles ont le même ensemble de vecteurs minimaux pour μ . La décomposition obtenue est évidemment $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z})$ -invariante. En remplaçant μ par μ^0 , on définit une partition analogue de V_f^ρ .

On dira qu'une classe minimale est *isotrope* si le sous-espace engendré par les vecteurs qui la définissent est totalement isotrope pour f . Cette notion est invariante par $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z})$. D'après l'inégalité (4), les classes isotropes (pour μ ou μ^0) recouvrent $V_f^\rho \backslash (V_f^\rho)^{\geq 1}$ et décrivent donc l'infini de $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f^\rho$ (voir proposition 2.1 (2)). De plus elles possèdent une structure géométrique particulière qui permet de les rétracter sur les classes non isotropes.

Proposition 2.3 (rétraction des classes isotropes). *Soit ρ une représentation de Π dans $\mathrm{GO}^t(f, \mathbb{Z})$. On note $N_{f,\rho}^0$ (resp. $N_{f,\rho}$) la réunion des μ^0 -classes (resp. des μ -classes) minimales non isotropes de V_f^ρ .*

- (1) Les quotients $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash N_{f,\rho}^0$ et $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash N_{f,\rho}$ sont compacts et le nombre de classes non isotropes est fini modulo $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z})$.
- (2) Chaque classe isotrope (pour μ ou μ^0) est feuilletée par des arcs géodésiques.
- (3) L'espace V_f^ρ se rétracte par déformation $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z})$ -équivariante sur $N_{f,\rho}^0$ et sur $N_{f,\rho}$.

Preuve. (1) Les ensembles $N_{f,\rho}^0$ et $N_{f,\rho}$ sont fermés, invariants par $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z})$ et d'après (4) inclus dans $(V_f^\rho)^{\geq 1}$, d'où la compacité (proposition 2.1 (2)). La finitude résulte du fait que les partitions en classes minimales sont localement finies.

(2) Soit U un sous-espace de \mathbb{R}^m totalement isotrope pour f et stable par ρ^\vee . Pour tout $A \in V_f^\rho$, on note p_A^U et q_A^U les matrices des projections A -orthogonales de \mathbb{R}^m sur U et sur $F^{-1}AU = (U^{\perp_f})^{\perp_A}$, et on pose

$$X_U(A) = A(p_A^U - q_A^U). \quad (25)$$

Remarquer que $F^{-1}AU$ est A -orthogonal à U (en particulier $X_U(A) \neq 0$), que p_A^U et q_A^U commutent et sont conjuguées par $F^{-1}A$ (qui conserve l'orthogonalité pour A). On vérifie aussi que $X_U(A)$ est tangent à V_f^ρ au point A . De plus, les orbites du flot Φ_U^t de X_U sur V_f^ρ sont des géodésiques. En effet soit $\gamma_A(t) = A \exp(A^{-1}X_U(A)t)$. À partir de la relation $\gamma'_A(t) = X_U(A)A^{-1}\gamma_A(t)$, on voit que les décompositions

$$(*) \quad \mathbb{R}^m = U \oplus U^{\perp_A} \quad \text{et} \quad (***) \quad \mathbb{R}^m = U \oplus (U^{\perp_f})^{\perp_A} \oplus U^{\perp_f} \cap U^{\perp_A} \quad (26)$$

sont $\gamma_A(t)$ -orthogonales pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a donc $p_{\gamma_A(t)}^U = p_A^U$ et il est facile de vérifier que $\Phi_U^t(A) = \gamma_A(t)$. Dans le cas où $U = \mathbb{R}u$ est de dimension 1, le champ X_U est proportionnel au gradient relatif à V_f^ρ de la fonction longueur l_u ($l_u(A) = A[u]$) :

$$X_U = (2/l_u)\nabla^\rho l_u. \quad (27)$$

Soit c une classe minimale isotrope de V_f^ρ définie par $S \subset \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$, soit U le ρ^\vee -module engendré par S et soit $A \in c$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ considérons la fonction $\varphi_u = l_u \circ \gamma_A$, que l'on note φ_0 si $u \in S$. En utilisant la décomposition $\gamma_A(t)$ -orthogonale (**), on montre que φ_u vérifie l'inéquation différentielle $\varphi'_u \leq \varphi_u$ avec égalité si et seulement si $u \in U$, d'où l'on voit que φ_u/φ_0 est décroissante. Par suite il existe $t_A > 0$ tel que $\gamma(t) \in c$ pour $t \in]-\infty, t_A[$.

(3) Soit $D_0 = V_f^\rho$ et D_k ($k \geq 1$) le complémentaire dans V_f^ρ de la réunion des μ^0 -classes minimales définies par des configurations isotropes de rang $\leq k$ ($D_k = N_{f,\rho}^0$ pour k assez grand). De façon analogue au cas symplectique traité dans [Bav3], on montre que les flots des champs X_U (eq. (25)) associés aux classes isotropes permettent de construire une rétraction équivariante par déformation de D_k sur D_{k+1} , donc de V_f^ρ sur $N_{f,\rho}^0$ (voir les arguments détaillés dans [Bav3, §2.3]). On procède de même pour $N_{f,\rho}$. \square

Remarques 2.1. (1) L'avantage de μ^0 est de fournir un rétracte de codimension non nulle quand ρ est triviale.

(2) La proposition 2.3 et sa preuve sont valables plus généralement pour les réseaux b -autoduaux (avec b réflexive) définis dans [Bav4].

Quand ρ est triviale, une étude algébrique des classes isotropes montre que les μ -classes minimales de réseaux orthogonaux de type f sont en nombre fini modulo $\mathrm{SO}^t(f, \mathbb{Z})$ ([Bav4, §2.9]). Dans les cas lorentzien, cette finitude est donnée par un argument purement topologique valable pour toute représentation.

Proposition 2.4 (finitude des classes minimales). *Soit f de signature $(n, 1)$ et ρ une représentation de Π dans $\mathrm{GO}^t(f, \mathbb{Z})$. Alors l'ensemble des μ -classes (resp. des μ^0 -classes) minimales de V_f^ρ est fini modulo l'action de $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z})$.*

Preuve. En signature $(n, 1)$, les classes minimales isotropes sont ouvertes, donc de frontière non vide puisque V_f^ρ est connexe. Soit A un point frontière d'une telle classe (pour μ ou μ^0). Le sous-espace engendré par les vecteurs minimaux de A est de rang ≥ 2 , donc non totalement isotrope. Par (24) on a $\mu(A) \geq 1$. Sachant que les classes non isotropes sont incluses dans $(V_f^\rho)^{\geq 1}$, il existe donc un compact de $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f^\rho$ qui rencontre toutes les projections des classes minimales, d'où la finitude. \square

3. Invariant d'Hermite isotrope des réseaux lorentziens

3.1. Algorithme de Voronoï. L'algorithme de Voronoï pour les réseaux permet de classer les réseaux parfaits au sens usuel ([Vor]). En utilisant un graphe géodésique, nous établissons l'existence d'un algorithme analogue pour l'invariant d'Hermite isotrope des réseaux lorentziens. Un autre exemple de graphe de Voronoï géodésique a été construit dans [Bav2] dans le contexte des réseaux symplectiques.

On reprend les notations du §1.2, à ceci près que \mathbf{H}_f sera ici identifié à l'une des nappes de l'hyperboloïde $x^2 = -1$, choisie une fois pour toutes. Soit $x \in \mathbf{H}_f$ et soit K_x^* le convexe engendré par les différentielles $dl_u(x)$ quand u décrit l'ensemble des vecteurs f -isotropes tels que $l_u(x) = \mu^0(x)$. Rappelons que x est parfait si K_x^* engendre affinement l'espace cotangent en x , et que x est eutactique si K_x^* contient 0 dans son intérieur affine ([Bav1]). Par exemple les maxima locaux de μ^0 sont parfaits et eutactiques car μ^0 vérifie le théorème de Voronoï (d'après [Bav1, §2.2], les l_u étant ici strictement convexes, proposition 1.2).

Théorème 3 (description géométrique de μ^0). (1) *La partition \mathcal{P} en classes minimales pour μ^0 est un pavage Θ_f -invariant de \mathbf{H}_f par des polyèdres hyperboliques. Les classes minimales sont les cellules ouvertes de \mathcal{P} et sont bornées sauf en dimension maximale n . De plus, $\Theta_f \backslash \mathcal{P}$ est une décomposition finie de $\Theta_f \backslash \mathbf{H}_f$.*

(2) *On suppose $n \geq 2$. Le squelette unidimensionnel \mathcal{P}^1 de \mathcal{P} est un graphe géodésique Θ_f -invariant dans \mathbf{H}_f dont les sommets sont les points parfaits (et les arêtes de longueur finie). Ce graphe est connexe et on peut décrire explicitement le complexe cellulaire fini $\Theta_f \setminus \mathcal{P}^1$ (« algorithme à la Voronoï »).*

Preuve. (1) D'après (14), on a $l_u(x) = 2(x \cdot u)^2$. Si v est isotrope, $f(., v)$ est de signe constant sur \mathbf{H}_f . Par suite, les égalités entre longueurs définissent des sous-espaces hyperboliques (sous-variétés complètes totalement géodésiques) de \mathbf{H}_f , éventuellement vides. En particulier si S est un ensemble de vecteurs isotropes minimaux de rang au moins 2, l'égalité entre toutes les $(l_u)_{u \in S}$ définit un sous-espace hyperbolique $\tilde{\mathcal{C}}$ de \mathbf{H}_f . D'après la proposition 1.2, le champ de gradients $-\nabla l_u$ est dirigé vers le point à l'infini \bar{u} . Il en résulte que $\tilde{\mathcal{C}}$ est orthogonal au sous-espace hyperbolique engendré par $S^* = \{\bar{u}; u \in S\}$. Remarquer que la fonction longueur commune l_u ($u \in S$) est *propre* sur $\tilde{\mathcal{C}}$ car l'ensemble S^* est disjoint de l'infini de $\tilde{\mathcal{C}}$. Sachant que μ^0 est borné, on en déduit que la classe minimale \mathcal{C}_S est l'intérieur relatif d'un polyèdre hyperbolique *borné* de $\tilde{\mathcal{C}}$. L'invariance de la décomposition par Θ_f est claire. Enfin, la finitude modulo Θ_f des classes minimales est établie à la proposition 2.4.

(2) Soit γ une géodésique de \mathbf{H}_f , c.-à-d. une solution de l'équation différentielle $x'' = (x' \cdot x')x$. Alors toutes les fonctions $\varphi = l_u \circ \gamma$ (u isotrope) sont solutions de la même équation différentielle

$$2\varphi\varphi'' = 4C\varphi^2 + \varphi'^2 \quad \text{où} \quad C = \gamma' \cdot \gamma'. \quad (28)$$

Par suite les fonctions longueur sont déterminées le long de γ par leur jet d'ordre 1 en un point. On voit ainsi que l'adhérence d'une classe minimale \mathcal{C}_S coïncide avec la réunion $\bigcup_{S \subset T} \mathcal{C}_T$ (on retrouve aussi le fait que les classes sont géodésiques). Soit p un point non parfait et soit S l'ensemble des vecteurs minimaux de p . D'après l'observation précédente, un vecteur tangent orthogonal au sous-espace affine engendré par $(\nabla l_u(p))_{u \in S}$ donne une variation de p dans sa classe \mathcal{C}_S . D'autre part un point parfait est toujours isolé dans sa classe ([Bav4, §1.4]) qui est donc par connexité réduite à ce point. Les sommets de \mathcal{P} , ou classes minimales réduites à un point, correspondent donc aux points parfaits.

Soit p et q deux points parfaits et soit $[p, q]$ le segment géodésique qui les joint. Alors $[p, q]$ est recouvert par un nombre fini de polyèdres fermés C_1, \dots, C_N , chaque C_i étant l'adhérence d'une classe isotrope, c.-à-d. de dimension maximale. Les polyèdres C_i et C_{i+1} se coupent sur $[p, q]$, donc ont au moins un sommet p_i en commun. Posons $p_0 = p$ et $p_N = q$ en supposant $p \in C_1$ et $q \in C_N$. On peut joindre p_i et p_{i+1} par des arêtes de \mathcal{P} dans le bord de C_{i+1} ($i = 0, \dots, n-1$), d'où un chemin de p à q dans \mathcal{P}^1 .

Soit $x \in \mathbf{H}_f$ et soit \mathcal{C} sa classe. Si x n'est pas parfait, on peut faire une variation géodésique de x dans \mathcal{C} jusqu'à atteindre le bord de \mathcal{C} (voir ci-dessus, si $\dim \mathcal{C} = n$, il suffit d'éviter la direction qui mène à l'infini). Ainsi, au bout d'un nombre fini

d'étapes, on aboutit sur un point parfait. Remarquons ensuite que l'on peut expliciter les sommets voisins d'un sommet donné de \mathcal{P}^1 . En effet soit p parfait et soit K le convexe engendré par les $(\nabla l_u)_{u \in S(p)}$. Chaque face F de dimension $n - 1$ de K sépare l'espace tangent en deux hyperplans affines. On note ξ_F le vecteur unitaire orthogonal à F et dirigé vers l'hyperplan contenant K . D'après l'observation sur les 1-jets des longueurs, les arêtes de \mathcal{P} issues de p sont des arcs géodésiques de direction initiale ξ_F ; chacune conduit, en un temps fini (voir l'assertion (1)), à un autre point parfait voisin de p . On peut trouver ainsi un voisinage combinatoire arbitrairement grand de p , et en tenant compte de l'action de Θ_f , décrire le complexe cellulaire fini et connexe $\Theta_f \setminus \mathcal{P}^1$. L'équivalence de deux points de \mathbf{H}_f sous Θ_f peut se traiter en terme de formes quadratiques (on sait algorithmiquement tester l'équivalence et le cas échéant obtenir la liste finie des $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z})$ -équivalences entre deux formes données). \square

3.2. Graphe de Voronoï pour $n \leq 5$. À titre d'exemple, nous décrivons ici $\Theta_f \setminus \mathcal{P}^1$ pour $2 \leq n \leq 5$. Pour tout point parfait p , on note p^* le polyèdre convexe engendré par les points à l'infini associés aux vecteurs μ^0 -minimaux de p . Rappelons que pour n petit, le polyèdre $\Pi_n = \Pi_f$ (avec les notations de 1.3) est un simplexe décrit par les relations (9). Afin d'expliquer le graphe de Voronoï, nous prenons comme point de départ le sommet $s_n = [0, \dots, 0, 1] \in \Pi_n$ qui est toujours parfait (c'est même un maximum local de μ^0). Soit $p_2 = [1, 1, 2]$, $p_n = [1, \dots, 1, 3]$ ($n \geq 3$) le sommet de Π_n opposé à la face $X_n = 0$ (n petit) et soit s'_n le symétrique de s_n par rapport à p_n . Le polyèdre s_n^* est un hyperoctaèdre (régulier) et Θ_f agit transitivement sur ses faces de codimension 1. Si $n = 2$ ou 3, le domaine fondamental Π_n est contenu dans s_n^* et p_n est situé au centre d'une face de s_n^* ; il y a un unique point parfait modulo Θ_f et $\Theta_f \setminus \mathcal{P}^1$ est un quotient de l'arête $[s_n, s'_n]$ (figure 2). Pour $n = 4$, le point p_4 est parfait et p_4^* est un simplexe dont toutes les faces sont Θ_f -équivalentes.

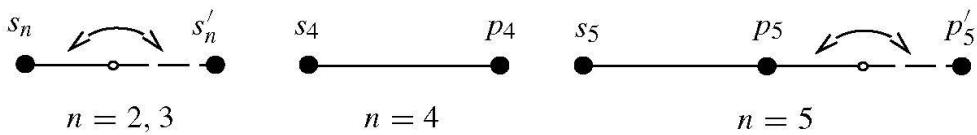


Figure 2. Graphe de Voronoï pour $2 \leq n \leq 5$.

On a $\Theta_f \setminus \mathcal{P}^1 \simeq [s_4, p_4]$ (deux points parfaits mutuellement voisins modulo Θ_f). Enfin si $n = 5$, p_5 est parfait et p_5^* est un hyperoctaèdre avec deux classes de faces modulo Θ_f . L'une des faces de p_5^* est contenue dans l'hyperplan $X_5 = 0$ et centrée au sommet $q_5 = [1, 1, 1, 1, 0, 3]$ de Π_5 . Le quotient $\Theta_f \setminus \mathcal{P}^1$ est alors donné par la figure 2, où p'_5 désigne le symétrique de p_5 par rapport à q_5 .

3.3. Sur les points parfaits ou eutactiques. Certaines formules liant entre eux les objets particuliers associés à l'invariant μ^0 pour les réseaux lorentziens (points parfaits ou eutactiques, classes minimales) se déduisent des très bonnes propriétés géométriques de cet invariant. Nous appellerons *groupe d'automorphismes* d'un point $x \in \mathbf{H}_f$ ou d'une classe minimale \mathcal{C} son stabilisateur pour l'action de Θ_f , noté $\text{Aut } x$ ou $\text{Aut } \mathcal{C}$.

En associant à toute classe minimale \mathcal{C}_S le polyèdre hyperbolique engendré par $S^* = \{\bar{u}; u \in S\}$, nous définissons un pavage hyperbolique \mathcal{P}^* géométriquement dual de \mathcal{P} . En particulier, les cellules de dimension maximale de \mathcal{P}^* , notées p^* , sont en bijection avec les points parfaits p . Chacune est de volume fini (on suppose $n \geq 2$) et leurs intérieurs sont mutuellement disjoints.

Proposition 3.1 (formule de masse pour les points parfaits). *Soit $\mathcal{P}\mathcal{F}$ un système de représentants des points parfaits modulo Θ_f . Alors*

$$\sum_{p \in \mathcal{P}\mathcal{F}} \frac{\text{Vol } p^*}{|\text{Aut } p|} = \text{Vol}(\Theta_f \backslash \mathbf{H}_f) \quad (29)$$

où *Vol* désigne le volume hyperbolique (on suppose $n \geq 2$).

Preuve. On décompose $\Theta_f \backslash \mathbf{H}_f$ à partir du pavage Θ_f -invariant \mathcal{P}^* . \square

Remarque 3.1. Il existe une formule analogue à (29) pour les réseaux parfaits usuels. L'application de ces formules est limitée par la faible connaissance du calcul des volumes.

Proposition 3.2 (formule d'Euler pour les classes non isotropes). *Soit \mathcal{N} un système de représentants modulo Θ_f des classes minimales non isotropes, c'est-à-dire définies par des systèmes de vecteurs (isotropes) de rang au moins 2. Alors*

$$\sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{N}} \frac{(-1)^{\dim \mathcal{C}}}{|\text{Aut } \mathcal{C}|} = \chi(\Theta_f) \quad (30)$$

où χ est la caractéristique d'Euler.

Preuve. Les classes isotropes sont ici définies par une seule paire de vecteurs minimaux $\pm u$, et de dimension maximale. En utilisant les lignes de gradient de l_u , c'est-à-dire les géodésiques issues du point à l'infini \bar{u} , on peut rétracter par déformation les classes isotropes sur la réunion N des classes non isotropes (voir eq. (27) et proposition 2.3). Par ailleurs (théorème 3(1)), N admet une décomposition cellulaire finie modulo Θ_f . Pour conclure, on prend un sous-groupe Γ sans torsion (c.-à-d. sans points fixes) et d'indice fini dans Θ_f , et on obtient des informations de nature cohomologique, notamment sur la caractéristique d'Euler, à partir de $\Gamma \backslash N$ qui est un $K(\Gamma, 1)$ cellulaire fini. \square

Remarque 3.2. On a $\chi(\Theta_f) = 0$ si n est impair. En effet soit Γ comme dans la preuve ci-dessus. La variété $\Gamma \setminus \mathbf{H}_f$ est un $K(\Gamma, 1)$; elle se rétracte sur une variété X compacte à bord telle que $\chi(\partial X) = 0$ et dont le double est de caractéristique nulle.

Considérons maintenant les points eutactiques pour μ^0 (voir §3.1). Comme les longueurs sont strictement convexes, chaque classe minimale \mathcal{C} contient au plus un point eutactique ([Bav4, §1.3]) ; ces points sont donc en nombre fini modulo Θ_f . De plus, si $e \in \mathcal{C}$ est eutactique, on a $\text{Aut } \mathcal{C} = \text{Aut } e$ (unicité). Rappelons que le *rang* d'un point $x \in \mathbf{H}_f$ pour μ^0 est le rang des gradients $\nabla l_u(x)$ pour les u réalisant $\mu^0(x)$.

Proposition 3.3 (formule d'Euler pour les eutactiques). *Soit \mathcal{E} un système de représentants modulo Θ_f des points eutactiques pour μ^0 . Alors*

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \frac{(-1)^{\text{rang } e}}{|\text{Aut } e|} = \chi(\Theta_f) \quad (31)$$

où χ est la caractéristique d'Euler.

Preuve. C'est une conséquence directe de [Akr]. Puisque le hessien des l_u est défini positif (voir (28)), on sait que μ^0 est une fonction de Morse topologique sur \mathbf{H}_f dont les points critiques d'indice r sont exactement les eutactiques de rang r ([Akr]), ici en nombre fini modulo Θ_f . On conclut comme d'habitude en prenant un sous-groupe d'indice fini et sans torsion de Θ_f . \square

Il est très facile de comparer les relations (30) et (31). La classe \mathcal{C} d'un point eutactique e est non isotrope ([Bav4, §2.8, thm. 1]). De plus on a $\text{Aut } e = \text{Aut } \mathcal{C}$ et $\text{rang } e + \dim \mathcal{C} = n$ (voir §3.1). Le premier membre de $(-1)^n$ (30) contient celui de (31). Compte tenu de la rem. 3.2, on a donc $\sum_{\mathcal{C}} (-1)^{\dim \mathcal{C}} / |\text{Aut } \mathcal{C}| = 0$, somme sur les classes minimales (modulo Θ_f) non isotropes et non « eutactiques ». Il serait intéressant d'obtenir directement cette relation.

3.4. Valeur maximale en petite dimension

Proposition 3.4 (maximum de μ^0). *La valeur maximale de μ^0 pour les réseaux lorentziens de dimension $n + 1 \leq 16$ est donnée par la table 4. Elle est atteinte uniquement (modulo Θ_f) par les points suivants :*

$$s_n = [0, \dots, 0, 1] \quad (1 \leq n \leq 5),$$

$$p_n = [1, \dots, 1, 3] \quad (5 \leq n \leq 8),$$

$$x_n = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0, 3] \quad (9 \leq n \leq 11),$$

$$y_n = [2, 1, \dots, 1, 4] \quad (11 \leq n \leq 12),$$

$$z_{13} = [1, \dots, 1, 0, 4],$$

$$z_{14} = [2, \dots, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6],$$

$$z_{15} = [1, \dots, 1, 4] \text{ pour le cas impair et } b_1, b_9 \text{ (eq. (12))},$$

$$d_{17} = [4, 6, 8, 12, 10, 8, 6, 3, 5, 8, 10, 15, 12, 9, 6, 3, -3, 3] \text{ pour le cas pair.}$$

Table 4. Maximum de μ^0 en petite dimension.

| $n + 1$ | $\mu_{n,1}^0$ | $n + 1$ | $\mu_{n,1}^0$ | $n + 1$ | $\mu_{n,1}^0$ | $n+1$ | $\mu_{n,1}^{0,II}$ |
|---------------|---------------|------------|---------------|---------|---------------|-------|--------------------|
| 2, 3, 4, 5, 6 | 2 | 9 | 8 | 14 | 9/2 | 2 | 1 |
| 7 | 8/3 | 10, 11, 12 | 4 | 15, 16 | 8 | 10 | 2 |
| 8 | 4 | 13 | 8 | | | 18 | 9/2 |

Preuve. Dans le cas impair, on procède comme au §1.3, avec une longueur si $n \leq 8$, et par découpage pour $9 \leq n \leq 15$. Noter que le réseau associé à s_n (point base) est isomorphe à \mathbb{Z}^{n+1} . Le cas pair résulte directement de la preuve du théorème 2 (cf. §1.4) pour $n = 1$ ou 9, et d'un découpage en deux sous-polyèdres pour $n = 17$. \square

Bibliographie

- [Akr] H. Akroud, Singularités topologiques des systoles généralisées. *Topology* **42** (2003), 291–308. [Zbl 1054.32006](#) [MR 1941437](#)
- [Ash] A. Ash, Small-dimensional classifying spaces for arithmetic subgroups of general linear groups. *Duke Math. J.* **51** (2) (1984), 459–468. [Zbl 0542.22011](#) [MR 0747876](#)
- [Bav1] C. Bavard, Systole et invariant d'Hermite. *J. Reine Angew. Math.* **482** (1997), 93–120. [Zbl 1011.53035](#) [MR 1427658](#)
- [Bav2] C. Bavard, Familles hyperboliques de réseaux symplectiques. *Math. Ann.* **320** (4) (2001), 799–833. [Zbl 1008.11027](#) [MR 1857139](#)
- [Bav3] C. Bavard, Classes minimales de réseaux et rétractions géométriques équivariantes dans les espaces symétriques. *J. London Math. Soc.* (2) **64** (2) (2001), 275–286. [Zbl 1031.11042](#) [MR 1853450](#)
- [Bav4] C. Bavard, Théorie de Voronoï géométrique. Propriétés de finitude pour les familles de réseaux et analogues, *Bull. Soc. Math. France* **133** (2) (2005), 205–257. [Zbl 1085.11033](#) [MR 2172266](#)
- [B-M] A.-M. Bergé et J. Martinet, Densité dans des familles de réseaux. Application aux réseaux isoduaux. *Enseign. Math.* (2) **41** (3–4) (1995), 335–365. [Zbl 0848.52006](#) [MR 1365850](#)
- [Bor] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles No. 1341, Hermann, Paris 1969. [Zbl 0186.33202](#) [MR 0244260](#)
- [Bou] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie*. Chapitres 4, 5 et 6. Actualités Scientifiques et Industrielles No. 1337, Hermann, Paris 1968. [Zbl 0186.33001](#) [MR 0240238](#)

- [B-S] P. Buser P. et P. Sarnak, On the period matrix of a Riemann surface of large genus. With an appendix by J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Invent. Math.* **117** (1) (1994), 27–56. [Zbl 0814.14033](#) [MR 1269424](#)
- [C-S] J. H. Conway et N. J. A. Sloane, On lattices equivalent to their duals. *J. Number Theory* **48** (3) (1994), 373–382. [Zbl 0810.11041](#) [MR 1293868](#)
- [Mar] J. Martinet, *Perfect lattices in Euclidean spaces*. Grundlehren Math. Wiss. 327 Springer-Verlag, Berlin 2003. [Zbl 1017.11031](#) [MR 1957723](#)
- [Ser] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*. Collection SUP : “Le Mathématicien” 2, Presses Universitaires de France, Paris 1970. [Zbl 0225.12002](#) [MR 0255476](#)
- [Vin1] È. B. Vinberg, On groups of units of certain quadratic forms. *Math. USSR-Sb.* **16** (1) (1972), 17–35. [Zbl 0252.20054](#) [MR 0295193](#)
- [Vin2] È. B. Vinberg, On unimodular integral quadratic forms. *Funct. Anal. Appl.* **6** (1972), 105–111. [Zbl 0252.10027](#) [MR 0299557](#)
- [V-K] È. B. Vinberg, et I. M. Kaplinskaja, On the groups $O_{18,1}(Z)$ and $O_{19,1}(Z)$. *Soviet Math. Dokl.* **19** (1) (1978), 194–197. [Zbl 0402.20034](#) [MR 0476640](#)
- [Vor] G. Voronoï, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, *premier mémoire*. Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. *J. Reine Angew. Math.* **133** (1908), 97–178. [JFM 39.0274.01](#)

Received March 1, 2005

Christophe Bavard, Analyse et Géométrie de Bordeaux, U.M.R. 5467 C.N.R.S., Université Bordeaux-I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

E-mail: Christophe.Bavard@math.u-bordeaux1.fr