

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 82 (2007)

**Artikel:** Invariant d'Hermite isotrope et densité des réseaux orthogonaux lorentziens  
**Autor:** Bavard, Christophe  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-98877>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Invariant d’Hermite isotrope et densité des réseaux orthogonaux lorentziens

Christophe Bavard

**Résumé.** Nous déterminons la densité maximale des réseaux orthogonaux lorentziens jusqu’en dimension 12 et en dimension 18 pour le type pair. Par ailleurs, nous définissons un *invariant d’Hermite isotrope* pour lequel nous établissons, dans le cas lorentzien, une théorie « de Voronoï » complète.

**Abstract.** We compute the maximal density of orthogonal Lorentzians lattices up to dimension 12 and in dimension 18 for the even type. On the other hand, we define an *isotropic Hermite invariant* and we show that it satisfies, in the Lorentzian case, a complete “Voronoi’s theory”.

**Codes AMS (2000).** 11H55.

**Mots clé.** Réseaux euclidiens orthogonaux, invariant d’Hermite.

## Introduction

Introduits par Bergé et Martinet [B-M], les réseaux orthogonaux sont avec les réseaux symplectiques des exemples importants et naturels de réseaux *isoduaux*, c’est-à-dire isométriques à leur dual (cf. Conway et Sloane, [C-S]). Le problème de la densité maximale, soulevé par Buser et Sarnak [B-S] pour les réseaux symplectiques, se pose tout aussi naturellement pour les réseaux orthogonaux. L’approche traditionnelle « à la Voronoï » pour ces questions vise à classer les *maxima locaux* de l’invariant d’Hermite  $\mu$  restreint à ces familles particulières. Ceux-ci sont caractérisés dans [B-M] et vérifient de bonnes propriétés de finitude ([B-M], [Bav4]). Cependant, leur classification dans le cas orthogonal (ou symplectique) est pour l’instant largement ouverte.

Nous nous concentrons ici sur le cas des réseaux orthogonaux de signature  $(n, 1)$ , que nous appellerons *orthogonaux lorentziens*, ou simplement *lorentziens*. L’étude de leur densité est abordée par une méthode directe et entièrement géométrique. Nous déterminons la densité maximale des réseaux lorentziens jusqu’en dimension 12 et en dimension 18 dans le cas pair (table 1 et 2). Celle-ci n’était connue qu’en dimension inférieure ou égale à 3 d’après [C-S]. D’autre part, le point de vue géométrique

développé est également relié à l'approche classique. Nous introduisons un invariant plus fin que  $\mu$ , l'invariant d'Hermite isotrope  $\mu^0$ , pour lequel nous établissons dans le cas lorentzien une théorie « de Voronoï » complète, analogue à celle des réseaux usuels, avec en particulier un algorithme de Voronoï répondant au problème de la classification des maxima locaux de  $\mu^0$ .

Table 1. Densité maximale des réseaux lorentziens impairs de rang  $\leq 12$ .

$n + 1$	$\mu_{n,1}$	$\simeq$	$n + 1$	$\mu_{n,1}$	$\simeq$
2	$2/\sqrt{3}$	1,1547	8	2	2.0000
3	$1/2 + \sqrt{2}/2$	1,2071	9	$5/3$	1,6666
4	$4/3$	1,3333	10	$1/2 + \sqrt{5}/2$	1,6180
5	$7/5$	1,4000	11	$5/3$	1,6666
6	$3/2$	1,5000	12	2	2.0000
7	$5/3$	1,6666			

Table 2. Densité maximale des réseaux lorentziens pairs de rang  $\leq 18$ .

$n + 1$	$\mu_{n,1}^{\Pi}$	$\simeq$	$n + 1$	$\mu_{n,1}^{\Pi}$	$\simeq$
2	1	1.0000	18	621/310	2.0032
10	2	2.0000			

Les réseaux orthogonaux portent une structure sous-jacente de  $\mathbb{Z}$ -module bilinéaire indéfini. Quand on fixe cette structure entière, ou « type algébrique », en y ajoutant éventuellement l'action d'un groupe fini, l'ensemble des réseaux obtenus (considérés à isométrie près) s'identifie au quotient d'un espace symétrique  $X$  par un groupe discret  $\Theta$ . L'isotropie relative au type algébrique est alors reliée à la topologie de  $\Theta \backslash X$  (section 2). Par exemple  $\mu$  et  $\mu^0$  coïncident à l'infini de  $\Theta \backslash X$  et vérifient la compacité de Mahler. Au passage, nous obtenons aussi, en feuilletant les « classes isotropes », des rétractes naturels  $\Theta$ -équivalents et cocompacts de  $X$ , proposition 2.3 (la construction de tels rétractes est un problème classique dans l'étude cohomologique des groupes arithmétiques, cf. Ash [Ash]).

Pour les réseaux lorentziens de rang  $n + 1$ , l'espace  $X$  s'identifie naturellement à l'espace hyperbolique  $\mathbf{H}^n$  (section 1). De plus, les fonctions longueur (normes des vecteurs des réseaux) s'expriment simplement au moyen de la distance hyperbolique, proposition 1.2. À partir de cette observation élémentaire, et en analysant l'action sur  $\mathbf{H}^n$  du groupe d'automorphismes  $\Theta$  du type algébrique, nous déterminons la densité maximale en petite dimension (donnée par le maximum de  $\mu$ , table 1 et 2). Notre étude

met en évidence des liens étroits entre la fonction densité et la géométrie des domaines fondamentaux de  $\Theta$  ; par exemple, pour le type pair de rang 18, la densité maximale correspond au rayon interne du domaine fondamental (§1.4). Comme conséquence, la densité maximale est estimée jusqu'en dimension 23, avec notamment la construction de maxima locaux de densité (table 3, §1.6). Pour  $13 \leq n + 1 \leq 18$ , nous montrons que le maximum de  $\mu$  est relativement faible, voisin de 2, ce qui reflète à nouveau une propriété géométrique particulière des domaines fondamentaux pour ces dimensions.

Toujours dans le cas lorentzien, l'invariant isotrope  $\mu^0$  est défini *via* les fonctions de Busemann par des points à l'infini de  $\mathbf{H}^n$  (proposition 1.2). Nous obtenons ainsi une « théorie de Voronoï » (en particulier un algorithme de Voronoï) pour  $\mu^0$  à l'aide de deux pavages duaux de  $\mathbf{H}^n$  par des polyèdres hyperboliques, associés respectivement aux points à l'infini précédents et aux points parfaits (théorème 3). Cette vision géométrique, combinée avec les propriétés topologiques générales de  $\Theta \setminus \mathbf{H}^n$  (section 2), est aussi la source de relations numériques concernant certains réseaux particuliers relativement à  $\mu^0$  (§3.3) : formule de masse pour les points parfaits, formules d'Euler pour les classes non isotropes ou pour les points eutactiques. Nous donnons également la valeur maximale de  $\mu^0$  jusqu'en dimension 16 (table 4).

## 1. Densité des réseaux orthogonaux lorentziens

**1.1. Réseaux orthogonaux. Invariant d'Hermite isotrope.** Un *réseau orthogonal* (cf. [B-M]) d'un espace euclidien  $E$  est un couple  $(\Lambda, \sigma)$  formé d'un réseau  $\Lambda$  de  $E$  et d'une isométrie *involutive*  $\sigma \neq \pm \text{Id}_E$  qui échange  $\Lambda$  et son dual. Deux réseaux orthogonaux  $(\Lambda_i, \sigma_i)$  de  $E_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont isométriques s'il existe une isométrie  $\varphi$  de  $E_1$  sur  $E_2$  telle que  $\varphi(\Lambda_1) = \Lambda_2$  et  $\varphi\sigma_1\varphi^{-1} = \sigma_2$ .

Tout réseau orthogonal  $(\Lambda, \sigma)$  hérite d'une structure entière. En effet, la forme bilinéaire symétrique

$$\alpha(u, v) = \langle u, \sigma(v) \rangle \quad (u, v \in E), \quad (1)$$

dont la restriction  $\alpha_\Lambda$  à  $\Lambda \times \Lambda$  est entière, induit un isomorphisme de groupes de  $\Lambda$  sur  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Z})$ . Le  $\mathbb{Z}$ -module bilinéaire indéfini  $(\Lambda, \alpha_\Lambda)$  est alors caractérisé par son type (pair ou impair) et sa signature  $(p, q)$ , appelés *type et signature* de  $(\Lambda, \sigma)$  et évidemment invariants par isométrie de réseaux orthogonaux. Soit  $I^\pm$  (resp.  $U$ ) le module bilinéaire associé au module quadratique  $(\mathbb{Z}, \pm u^2)$  (resp. au module pair  $(\mathbb{Z}^2, 2u_1u_2)$ ). Dans le cas impair  $(\Lambda, \alpha_\Lambda)$  est isomorphe à  $pI^+ + qI^-$  ; dans le cas pair, on a  $p - q = 8a$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ) et  $(\Lambda, \alpha_\Lambda)$  est isomorphe à  $qU + |a|E_8^+, pU + |a|E_8^-$  ou  $pU$  selon le signe de  $a$  ([Ser, §V.2]).

La forme entière  $\alpha_\Lambda$  permet de raffiner l'invariant d'Hermite. Soit  $(\Lambda, \sigma)$  un réseau orthogonal impair (resp. pair), et soit  $k \in \mathbb{Z}$  (resp.  $k \in 2\mathbb{Z}$ ) avec  $k \notin 4\mathbb{Z} + 2$  si



$\dim E = 2$ . Nous définissons  $\mu^k(\Lambda) = \mu^k(\Lambda, \sigma)$  par

$$\mu^k(\Lambda) = \min\{|u|^2; u \in \Lambda \setminus \{0\}, \alpha(u, u) = k\}. \quad (2)$$

En particulier l'invariant d'Hermite isotrope  $\mu^0$  est défini par les vecteurs isotropes. Noter que les  $\mu^k$  sont invariants par isométrie de réseaux orthogonaux. L'invariant d'Hermite  $\mu$  des réseaux orthogonaux de rang fixé est évidemment le minimum des  $\mu^k$ , mais on a un résultat plus précis.

**Proposition 1.1.** *Soit  $\gamma_m$  la constante d'Hermite en dimension  $m$ . Alors*

$$\mu = \min\{\mu^k; |k| \leq \gamma_m\}. \quad (3)$$

En effet, en appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz à (1) on obtient la relation fondamentale

$$|\alpha(u, v)| \leq |u||v| \quad (u, v \in E) \quad (4)$$

qui borne les valeurs de  $\alpha$  sur les vecteurs minimaux du réseau. Par exemple, en dimension  $m \leq 8$  on a  $\mu = \min\{\mu^{-1}, \mu^0, \mu^1\}$  pour le type impair et  $\mu = \mu^0$  pour le type pair. C'est vrai même pour la valeur exceptionnelle  $\mu(E_8) = 2$  par continuité. Il existe aussi des structures orthogonales sur  $E_8$  (de type pair et impair) avec  $\mu = \mu^2 = \mu^{-2} = 2$ .

**Exemples 1.1.** (1) Les structures orthogonales sur un réseau entier unimodulaire  $\Lambda$  correspondent aux classes de conjugaison des éléments d'ordre 2 ( $\neq -\text{Id}$ ) de  $\text{Aut}(\Lambda)$ . Par exemple pour le réseau de racines  $E_8$ , en composant des générateurs du groupe de Weyl qui commutent (et leurs opposés), on obtient des structures orthogonales impaires de signature  $(p, q)$  pour  $1 \leq p \leq 7$ .

(2) *Structures orthogonales sur  $\mathbb{Z}^m$ .* Il est facile de voir que dans  $\text{Aut}(\mathbb{Z}^m)$ , produit semi-direct de  $\{\pm 1\}^m$  et du groupe symétrique  $\mathcal{S}_m$ , tout élément d'ordre 2 distinct de  $-\text{Id}$  est conjugué à  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m; (1, 2) \dots (2r-1, 2r))$  avec  $\varepsilon_k = 1$  si  $1 \leq k \leq p+r$  et  $\varepsilon_k = -1$  sinon, pour un certain couple  $(p, r)$  vérifiant  $0 \leq 2r \leq m$  et  $\max(1, r) \leq p \leq m - \max(1, r)$ . Il y a donc  $1 + \min(p, q)$  structures orthogonales distinctes de signature  $(p, q)$  donnée ( $1 \leq p \leq m-1$ ,  $p+q = m$ ) sur  $\mathbb{Z}^m$ , soit au total  $[m^2/4] + m - 1$  structures, dont une seule paire de signature  $(p, p)$  quand  $m = 2p$ . Pour ces structures, on a  $\mu^0 = \mu = 1$  si  $r > 0$ ,  $\mu^1 = \mu = 1$  et  $\mu^0 = 2$  si  $r = 0$ .

(3) Pour  $p+q = m \geq 8$  et  $p-q \equiv 0(8)$ , le réseau  $D_m^+$  admet une structure orthogonale paire de signature  $(p, q)$  avec  $\mu^0(D_m^+) = \mu(D_m^+) = 2$  ([B-M, §6.4]).

**1.2. Géométrie des longueurs.** À partir d'ici nous nous concentrons sur le cas *lorentzien*. Soit  $f$  une forme entière de signature  $(n, 1)$  et de discriminant  $-1$  sur  $\mathbb{Z}^{n+1}$ ; son extension à  $\mathbb{R}^{n+1}$  sera encore notée  $f$ . Rappelons que le projectifié  $\mathbf{H}_f$  du

cône négatif de  $f$  est un modèle classique de l'espace hyperbolique de dimension  $n$ . On pose  $u \cdot v = f(u, v)$  ( $u$  et  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ ),  $u^2 = u \cdot u$  et  $\bar{u} = \mathbb{R}u$  si  $u \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

Montrons que les classes d'isométrie de réseaux lorentziens  $(\Lambda, \sigma)$  dont le type  $\alpha_\Lambda$  est isomorphe (sur  $\mathbb{Z}$ ) à  $f$  sont paramétrées par  $\mathbf{H}_f$ . En effet, par transport des structures, on peut supposer que  $(\Lambda, \alpha_\Lambda) = (\mathbb{Z}^{n+1}, f)$ . D'après la relation (1), l'isométrie  $\sigma$  est une réflexion  $f$ -orthogonale et sa droite propre  $\bar{x}$  de valeur propre  $-1$  appartient à  $\mathbf{H}_f$ ; il est clair que la formule

$$\langle u, v \rangle_{\bar{x}} = u \cdot v - 2 \frac{(u \cdot x)(v \cdot x)}{x \cdot x} \quad (u, v \in \mathbb{R}^{n+1}, \bar{x} \in \mathbf{H}_f). \quad (5)$$

définit une bijection entre  $\mathbf{H}_f$  et les structures euclidiennes ainsi obtenues.

L'invariant d'Hermite des réseaux lorentziens « de type  $f$  » peut donc s'exprimer sur  $\mathbf{H}_f$  par

$$\mu(\bar{x}) = \min \{ \langle u, u \rangle_{\bar{x}}; u \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\} \} \quad (\bar{x} \in \mathbf{H}_f). \quad (6)$$

Remarquer que  $\mu$  est invariant par l'action du groupe  $O(f, \mathbb{Z})$  des isométries entières de  $f$ . Considérons les fonctions  $l_u(\bar{x}) = \langle u, u \rangle_{\bar{x}}$  ( $x \in \mathbf{H}_f$ ,  $u \in \mathbb{Z}^{n+1}$ ), appelées *fonctions longueur* (par analogie avec les surfaces de Riemann) et définies pour  $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Les  $l_u$  admettent une description naturelle au moyen de la géométrie hyperbolique.

**Proposition 1.2** (interprétation géométrique des longueurs). *Soit  $d$  la distance hyperbolique de  $\mathbf{H}_f$ . Soit  $u \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Si  $u^2 > 0$ , on note  $u^\perp$  l'hyperplan polaire de  $u$  dans  $\mathbf{H}_f$ . Alors*

$$l_u = \begin{cases} -u^2 \cosh[2d(., \bar{u})] & \text{si } u^2 < 0, \\ l_u(p) \exp(2h_{u,p}) & \text{si } u^2 = 0, \\ [3pt] u^2 \cosh[2d(., u^\perp)] & \text{si } u^2 > 0, \end{cases}$$

où  $h_{u,p}$  est la fonction de Busemann associée à  $u$  ( $u^2 = 0$ ) normalisée par  $h_{u,p}(p) = 0$ , le point  $p \in \mathbf{H}_f$  étant arbitraire. En particulier  $l_u$  est convexe et même strictement convexe si  $u^2 \leq 0$ .

*Preuve.* Le vecteur  $u$  définit un point de  $\mathbf{H}_f$  si  $u^2 < 0$ , et une hypersurface totalement géodésique  $u^\perp$  de  $\mathbf{H}_f$  (intersection de  $\mathbf{H}_f$  avec le projectifié de l'hyperplan  $f$ -orthogonal à  $u$ ) si  $u^2 > 0$ . Pour ces cas, on a respectivement

$$\cosh^2[d(\bar{x}, \bar{u})] = \frac{(x \cdot u)^2}{x^2 u^2}, \quad \sinh^2[d(\bar{x}, u^\perp)] = -\frac{(x \cdot u)^2}{x^2 u^2} \quad (\bar{x} \in \mathbf{H}_f). \quad (7)$$

Si  $u^2 = 0$ , le point  $\bar{u}$  est situé au bord de  $\mathbf{H}_f$ . Soit  $\bar{y} \in \mathbf{H}_f$ . La fonction de Busemann  $h_{u,\bar{y}}$  est définie avec la géodésique  $\gamma$  qui joint les points  $\bar{y}$  et  $\bar{u}$  par

$h_{u,\bar{y}} = \lim_{t \rightarrow \infty} [d(\cdot, \gamma(t)) - t]$  ( $t$  étant la longueur d'arc). On vérifie alors que

$$h_{u,\bar{y}}(\bar{x}) = \ln \left[ \frac{|x \cdot u|}{|y \cdot u|} \left( \frac{y^2}{x^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\bar{x}, \bar{y} \in \mathbf{H}_f). \quad (8)$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer la trigonométrie hyperbolique usuelle.  $\square$

**Remarque 1.1.** Il y a donc une forte analogie entre l'invariant d'Hermite isotrope des réseaux orthogonaux lorentziens et celui des réseaux usuels pour lequel les fonctions longueur sont aussi des exponentielles de fonctions de Busemann dans l'espace symétrique  $P_m$  des matrices de Gram ([Bav1, 1.3]).

**1.3. Densité maximale pour le type impair de rang  $\leq 12$ .** Soit  $\Theta_f$  le noyau de l'action de  $O(f, \mathbb{Z})$  sur les composantes connexes du cône négatif de  $f$ , et soit  $\Gamma_f$  le sous-groupe de  $\Theta_f$  engendré par les réflexions hyperplanes associées aux racines de carré positif du module indéfini  $(\mathbb{Z}^{n+1}, f)$ . On sait que pour  $n \leq 19$ ,  $\Gamma_f$  est d'indice fini dans  $\Theta_f$ , [Vin1], [Vin2], [V-K]. Pour estimer la densité maximale des réseaux orthogonaux lorentziens en petite dimension, nous utilisons l'interprétation et les propriétés géométriques des longueurs (proposition 1.2), ainsi que la description explicite d'un domaine fondamental polyédral  $\Pi_f$  pour  $\Gamma_f$  donnée dans [Vin1], [Vin2] ( $n \leq 17$ ) et [V-K] ( $n = 18, 19$ ). Dans le cas impair, on prend  $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$  et on pose  $\Theta_n = \Theta_f$ ,  $\Pi_n = \Pi_f$ .

**Théorème 1** (densité maximale pour le type impair de rang  $\leq 12$ ). *La valeur maximale  $\mu_{n,1}$  de l'invariant d'Hermite des réseaux orthogonaux lorentziens de type impair et de dimension  $n+1 \leq 12$  est donnée par la table 1. De plus,  $\mu_{n,1}$  ( $1 \leq n \leq 11$ ) est atteinte par un unique point modulo  $\Theta_n$  (correspondant à  $A_2$ ,  $E_8$ ,  $D_{12}^+$  pour  $n+1 = 2, 8, 12$ ).*

*Preuve.* La preuve consiste à majorer un petit nombre de longueurs  $l_1, \dots, l_N$  choisies dans chaque cas en relation avec la géométrie de  $\Pi_n$ . Le maximum d'une fonction convexe sur un polyèdre de volume fini (condition superflue en dimension 1) de l'espace hyperbolique sera atteint en un point extrémal, c'est-à-dire un sommet (éventuellement à l'infini, en admettant la valeur  $+\infty$  pour  $f$ ). On majorera donc les longueurs en les évaluant aux sommets de  $\Pi_n$ , ou aux sommets de sous-polyèdres de  $\Pi_n$  si nécessaire. Une fois trouvée une estimation  $\mu \leq \min(l_1, \dots, l_N) \leq M$  sur  $\Pi_n$ , il suffira pour conclure que  $M$  soit une valeur de  $\mu$ .

D'après [Vin1],  $\Pi_n$  est donné en coordonnées homogènes  $x = [X_1, \dots, X_{n+1}]$  par un nombre fini d'inéquations de la forme  $x \cdot e_j \leq 0$  associées à des racines de

$(\mathbb{Z}^{n+1}, f)$  ( $e_j$  entier avec  $e_j \cdot e_j = 1$  ou  $2$ ), plus précisément ( $1 \leq n \leq 11$ ) :

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq X_n \leq X_{n-1} \leq \cdots \leq X_1, \\ X_1 + X_2 + X_3 \leq X_{n+1} \ (n \geq 3) \quad \text{ou} \quad X_1 + X_2 \leq X_3 \ (n = 2), \\ \sum_{i=1}^{11} X_i \leq 3X_{n+1} \ (n \geq 11) \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{10} X_i \leq 3X_{11} \ (n = 10). \end{array} \right\} \quad (9)$$

Pour ces petites valeurs de  $n$ , le polyèdre  $\Pi_n$  est un domaine fondamental de  $\Theta_n$ . Il admet un unique sommet à l'infini si  $n \leq 8$ , et deux sommets à l'infini si  $9 \leq n \leq 11$ . Noter que ces sommets, ou classes modulo  $\Theta_n$  de vecteurs entiers isotropes, correspondent bijectivement aux réseaux unimodulaires entiers euclidiens de dimension  $n - 1$  (cf. [Vin2]). Combinatoirement,  $\Pi_n$  est un simplexe  $\Delta_n$  si  $1 \leq n \leq 9$ , et une pyramide de base  $\Delta_8 \times \Delta_{n-9}$  (contenue dans la face  $X_9 = X_{10}$ ) si  $n = 10, 11$ . On note  $u = (0, \dots, 1, 0)^t$  la racine associée à la face  $X_n = 0$ , et pour  $1 \leq n \leq 9$ , on note  $p_n$  le sommet opposé à cette face.

Traisons d'abord les cas  $3 \leq n \leq 7$  et  $n = 11$ , où *une seule* longueur suffit. La longueur  $l_u$  est fonction strictement croissante de la distance à la face  $X_n = 0$  (proposition 1.2). Si  $3 \leq n \leq 7$ , il est donc évident que  $l_u$  atteint son maximum sur  $\Pi_n$  au sommet opposé, c.-à-d.  $p_n = [1, \dots, 1, 3]$ , et uniquement en ce point. Si  $n = 11$ , il y a 9 sommets de  $\Pi_{11}$  tels que  $X_{11} \neq 0$ , et le maximum de  $l_u$  est atteint uniquement en  $q_{11} = [2, 1, \dots, 1, 4]$  (le réseau correspondant est  $D_{12}^+$ ). Pour  $3 \leq n \leq 7$  et  $n = 11$ , il se trouve que  $l_u(p_n) = \mu(p_n)$  (cf. §1.5), d'où le résultat.

Si  $n \in \{1, 2, 8, 9, 10\}$ , on obtient une majoration optimale avec deux longueurs en découpant  $\Pi_n$  en deux sous-polyèdres. On pose respectivement  $v = (1, 1)^t$  ( $n = 1$ ),  $v = (1, 0, 1)^t$  ( $n = 2$ ),  $v = (1, \dots, 1, 3)^t$  ( $n = 8, 9$  et  $10$ ). L'élément géométrique associé à  $v$  (cf. proposition 1.2) est le sommet  $p_n$  si  $n = 1, 8$  ou  $9$ , un sommet à l'infini si  $n = 2$  et une face du polyèdre si  $n = 10$ . Pour  $n = 1, 8$  ou  $9$ , il existe sur chacune des  $n$  arêtes de  $\Pi_n$  issues de  $p_n$  un unique point où  $l_u = l_v$  ; on partage  $\Pi_n$  avec l'hyperplan passant par ces  $n$  points. Pour  $n = 2$ , on découpe  $\Pi_2$  en deux triangles avec la droite  $X_1 + (1 + \sqrt{2})X_2 = X_3$ . Enfin on partage  $\Pi_{10}$  en deux pyramides avec l'hyperplan  $H$  d'équation  $-X_{10} = X_1 + \cdots + X_{10} - 3X_{11}$  sur lequel  $l_u = l_v$  ; l'intersection de  $H$  avec la base de  $\Pi_{10}$  (c.-à-d.  $X_9 = X_{10}$ ) est un simplexe de dimension 8. En procédant comme indiqué plus haut, on obtient que dans chacun des cas étudiés, le maximum de  $\min(l_u, l_v)$  sur  $\Pi_n$  est atteint en un unique point  $q_n$  donné par

$$\begin{aligned} q_1 &= [2 - \sqrt{3}, 1], \\ q_2 &= [1, 1, 2 + \sqrt{2}], \\ q_8 &= [3, 2, \dots, 2, 7], \\ q_9 &= [5 + \sqrt{5}, 4, \dots, 4, 13 + \sqrt{5}], \\ q_{10} &= [2, 1, \dots, 1, 4]. \end{aligned} \quad (10)$$

De plus on a  $l_u(q_n) = l_v(q_n) = \mu(q_n)$  pour  $n \in \{1, 2, 8, 9, 10\}$  (cf. §1.5), ce qui achève la preuve.  $\square$

**Remarque 1.2.** Le point  $q_2$  correspond au réseau mis en évidence dans [C-S, sect. 3]). On peut également vérifier que les maxima trouvés en dimension 5 et 7 correspondent, avec les notations de [C-S, table 1 et sect. 6], aux réseaux  $(A_4 5_1)^+$  et  $(E_6 3_1)^+$ .

#### 1.4. Densité maximale pour le type pair de rang $\leq 18$

**Théorème 2** (densité maximale pour le type pair de rang  $\leq 18$ ). *La valeur maximale  $\mu_{n,1}^{\Pi}$  de l'invariant d'Hermite des réseaux orthogonaux lorentziens de type pair et de dimension  $n+1 \leq 18$  est donnée par la table 2. De plus,  $\mu_{n,1}^{\Pi}$  ( $n = 1, 9, 17$ ) est atteinte par un unique point modulo  $\Theta_f$  (correspondant à  $\mathbb{Z}^2$  et  $D_{10}^+$  pour  $n+1 = 2, 10$ ).*

*Preuve.* On note ici  $E_8$  la matrice donnée dans [Bou, p. 270] ou [Ser, p. 89] (matrice de Gram d'une base de racines d'un système « de type  $E_8$  »), et on pose  $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , soit  $f$  la forme bilinéaire dont la matrice, dans la base canonique  $(\varepsilon_i)$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , est formée de  $k$  blocs diagonaux  $E_8$  suivis d'un bloc  $U_2$  ( $n+1 = 8k+2$ ). Pour  $k = 0, 1, 2$ , une application directe de [Vin1] à partir du point base  $[0, \dots, 0, 1, -1]$  permet d'expliciter un polyèdre  $\Pi_f$  de volume fini ( $k = 1, 2$ ) au moyen des racines suivantes :

$$\left. \begin{aligned} e_j &= -\varepsilon_j \quad (j = 1, \dots, n-1), \\ e_n &= -\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}, \\ e_{n+1} &= 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4 + 5\varepsilon_5 \\ &\quad + 4\varepsilon_6 + 3\varepsilon_7 + 2\varepsilon_8 + \varepsilon_{n+1} \quad (n = 9, 17), \\ e_{19} &= 2\varepsilon_9 + 3\varepsilon_{10} + 4\varepsilon_{11} + 6\varepsilon_{12} + 5\varepsilon_{13} \\ &\quad + 4\varepsilon_{14} + 3\varepsilon_{15} + 2\varepsilon_{16} + \varepsilon_{18} \quad (n = 17). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Si  $n = 9$ ,  $\Pi_f$  est un simplexe et on a  $\Gamma_f = \Theta_f$ . Si  $n = 17$ ,  $\Pi_f$  est une pyramide de base  $\Delta_8 \times \Delta_8$  ([Vin1]) et  $\Gamma_f$  est d'indice 2 dans  $\Theta_f$  comme le suggère la symétrie du diagramme de Coxeter de  $\Pi_f$  (figure 1).

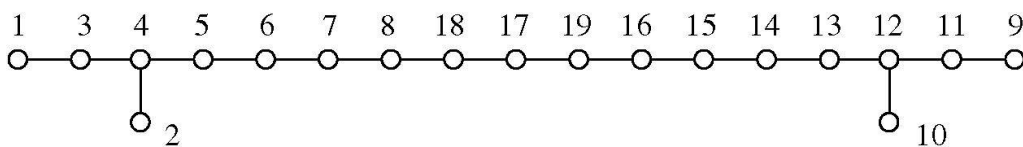


Figure 1. Diagramme de Coxeter de  $\Pi_f$ .

Pour  $n = 1$  et  $9$ ,  $\Pi_f$  admet un unique sommet à l'infini  $\bar{\varepsilon}_{n+1}$ , et on vérifie que la longueur associée  $l_{\varepsilon_{n+1}}$  est maximale en un unique sommet  $b_n$  de  $\Pi_f$  :

$$\begin{aligned} b_1 &= [-1, 1], \\ b_9 &= [2, 5/2, 7/2, 5, 4, 3, 2, 1, -1, 1]. \end{aligned} \quad (12)$$

Le point  $b_9$  est le sommet opposé à la face  $x \cdot e_1 = 0$  de  $\Pi_f$ . D'après 1.5 on a de plus  $\mu(b_n) = l_{\varepsilon_n}(b_n)$  ( $n = 1, 9$ ) ; les réseaux correspondants sont isométriques respectivement à  $\mathbb{Z}^2$  et  $D_{10}^+$ . Pour  $n = 17$ , on considère le point

$$b_{17} = [46, 68, 91, 135, 110, 84, 57, 29, 46, 68, 91, 135, 110, 84, 57, 29, -30, 31]. \quad (13)$$

Ce point est équidistant de toutes les faces de  $\Pi_f$ . En procédant comme au §1.6 (cf. lemme 1.3) on obtient la majoration  $\mu(p) \leq 621/310$  ( $p \in \mathbf{H}_f$ ), avec inégalité stricte si  $p \neq b_{17}$  modulo  $\Theta_f$ . Il se trouve (cf. §1.5) que  $\mu(b_{17}) = 621/310$  (avec 19 paires de vecteurs minimaux  $(\pm e_j)_{1 \leq j \leq 19}$ ), ce qui achève la preuve. Noter que dans ce dernier cas le maximum de  $\mu$  est lié au rayon interne de  $\Pi_f$ .  $\square$

**1.5. Étude des maxima de densité.** Nous prouvons maintenant que les bornes établies en 1.3 et 1.4 (voir table 1 et 2) correspondent à des valeurs de la densité. Rappelons que l'invariant d'Hermite du réseau associé à  $\bar{x} \in \mathbf{H}_f$  est le minimum de

$$l_u(\bar{x}) = u \cdot u - 2 \frac{(u \cdot x)^2}{x \cdot x} \quad (\bar{x} \in \mathbf{H}_f), \quad (14)$$

le vecteur  $u$  décrivant  $\mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$ , et que les valeurs de  $u^2$  sur les vecteurs minimaux peuvent être bornées grâce à l'inégalité (4).

Commençons par le cas où  $3 \leq n \leq 7$  (donc le type est impair) et considérons  $x_0 = (1, \dots, 1, 3)^t$ . On a alors  $l_u(\bar{x}_0) = u^2 + 2(u \cdot x_0)^2/(9 - n)$  et on observe que l'entier  $u^2 - u \cdot x_0$  est toujours pair. Si  $n = 7$ , le réseau est donc isomorphe à  $E_8$  et le minimum vaut 2. Si  $3 \leq n \leq 6$ , on peut grâce à (4) se restreindre à  $u^2 = -1, 0$  ou  $1$ . Sachant que  $l_u(\bar{x}_0) > 0$ , on voit que  $(9 - n)l_u(\bar{x}_0)$  est respectivement minoré, suivant ces trois valeurs de  $u^2$ , par  $9 + n$ ,  $8$  et  $11 - n$  ; d'où l'on conclut que le minimum vaut  $(11 - n)/(9 - n)$ .

Pour les cas restants, nous utilisons de plus une autre inégalité. Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $m$  définie positive. Si  $u$  et  $v$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^m$ , on pose  $\langle u, v \rangle = u^t v$  et  $A[u] = u^t A u$ . En choisissant une racine carrée de  $A$ , on prouve la relation

$$\langle u, v \rangle^2 \leq A[u]A^{-1}[v]. \quad (15)$$

Considérons maintenant  $n \in \{1, 2, 8, 9, 10, 11\}$  avec  $f$  de type impair. Soit  $q_n$  le point de  $\mathbf{H}_f$  défini par l'équation (10), complétée par  $q_{11} = [2, 1, \dots, 1, 4]$ . Traitons

les cas  $8 \leq n \leq 11$ , en supposant que  $\mu(q_{11}) < 2$ . Soit  $u = (u_i)$  un vecteur minimal. L'inégalité (15) montre que

$$u_i^2 \leq 1 \quad \text{et} \quad (u_i - u_j)^2 \leq 1 \quad (2 \leq i, j \leq n). \quad (16)$$

En particulier les  $u_i$  pour  $2 \leq i \leq n$  ont le même signe. Par suite,  $l_u(q_n)$  ne dépend que des trois variables entières  $u_1$ ,  $\sum_{i=2}^n u_i$  et  $u_{n+1}$ . Par ailleurs,  $u^2 = u_1^2 + \left| \sum_{i=2}^n u_i \right| - u_{n+1}^2 = -1, 0$  ou  $1$ . L'examen des diverses possibilités ( $u_1$  et  $u_{n+1}$  étant aussi bornées par (15)) conduit aisément aux valeurs de la table 1. Le cas  $n = 2$  se traite de façon analogue et  $n = 1$  donne le réseau équilatéral.

Passons au type pair. Soit  $b_n$  ( $n = 1, 9$  ou  $17$ ) le point défini par (12) et (13). Les vecteurs entiers seront écrits sous la forme  $u = (u_i) = (v, u_n, u_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{8k+2}$  avec  $k = 0, 1$  ou  $2$ . Si  $n = 1$ , le réseau est isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ . Si  $n = 9$ , considérons un vecteur minimal  $u \in \mathbb{Z}^{10}$ . On a  $l_u(b_9) = u^2 + (u_1 - 2u_{10} + 2u_9)^2/2$  avec  $u^2 = E_8[v] + 2u_9u_{10}$  (voir au §1.4 la définition de  $f$ ). Supposons que  $\mu(b_9) < 2$ ; alors  $u^2 = 0$  (inégalité (4)), en particulier  $v$  n'est pas nul, et  $l_u(b_9) = 1/2$ . Mais d'après (15), on a  $|u_9| \leq 1$ ,  $|u_{10}| \leq 1$  et  $|u_{10} - u_9| \leq 1$ , ce qui contredit  $u^2 = 0$ . Reste le cas  $n = 17$ . On a

$$l_u(b_{17}) = u^2 + \frac{a^2}{310} \quad \text{avec} \quad a = \sum_{i=1}^{16} u_i + 31u_{17} - 30u_{18}, \quad (17)$$

et  $u^2 = (E_8 \oplus E_8)[v] + 2u_{17}u_{18}$ . Supposons que  $\mu(b_{17}) < 621/310$ . Soit  $u \in \mathbb{Z}^{18}$  minimal, donc vérifiant  $u^2 = -2, 0$  ou  $2$ . Si  $u^2 = -2$ , on voit, toujours grâce à (4), que  $|a| \geq 36$ , ce qui est absurde. Si  $u^2 = 0$ , alors  $|a| \leq 24$  et par (15)  $|u_{17}| \leq 2$ ,  $|u_{18}| \leq 2$ . Ou bien  $v = 0$ , ou bien (quitte à changer  $u$  en  $-u$ ), le triplet  $(u_{17}, u_{18}, E_8 \oplus E_8[v])$  vaut  $(1, -1, 2)$ ,  $(1, -2, 4)$ ,  $(2, -1, 4)$  ou  $(2, -2, 8)$ . Soit  $w \in \mathbb{Z}^8$  tel que  $E_8[w] = 2, 4, 6$  ou  $8$ ; en appliquant (15) à chaque coordonnée, on voit que  $\left| \sum_{i=1}^8 w_i \right|$  est majoré respectivement par 33, 46, 59 et 69. Il en résulte que  $|a| \geq 25$  dans tous les cas, ce qui est absurde. Enfin, si  $u^2 = 2$ ,  $u$  est une racine de  $(\mathbb{Z}^{18}, f)$  et l'inégalité  $l_u(b_{17}) < 621/310$  signifie que l'hyperplan  $u^\perp$  coupe l'intérieur du domaine fondamental  $\Pi_f$  de  $\Gamma_f$ , ce qui est impossible (voir §1.4 pour la description géométrique de  $\Pi_f$ ). On pourrait aussi exclure ce dernier cas en procédant comme plus haut.

**Remarque 1.3.** La méthode indiquée ci-dessus permet aussi d'expliciter les vecteurs minimaux dans chaque cas.

**1.6. Estimations géométriques supplémentaires.** On considère une forme entière  $f$  comme en 1.2, de rang  $n + 1 \leq 20$ , et on note  $\mu_f$  la valeur maximale de l'invariant d'Hermite des réseaux lorentziens de type  $f$ .

**Lemme 1.3.** Soit  $p \in \Pi_f$ . Pour  $l = 1, 2$ , on note  $r_l(p)$  le maximum des distances  $d(p, H)$  quand  $H$  décrit l'ensemble des faces de  $\Pi_f$  définies par des racines de



carré  $l$ . On a alors la majoration

$$\mu_f \leq \max\{\cosh(2r_1(p)), 2 \cosh(2r_2(p))\}. \quad (18)$$

*Preuve.* Il suffit de majorer  $\mu$  sur  $\Pi_f$  qui contient un domaine fondamental de  $\Theta_f$ . Par ailleurs on peut supposer que  $p$  est intérieur à  $\Pi_f$ . On décompose alors  $\Pi_f$  en pyramides de sommet  $p$  et sur chacune d'elles,  $\mu$  est majoré en fonction de la distance à la base (face de  $\Pi_f$ ), d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 1.4.** *La valeur maximale  $\mu_{n,1}$  de l'invariant d'Hermite des réseaux lorentziens de type impair et de rang  $n + 1$ ,  $13 \leq n + 1 \leq 23$ , est estimée dans la table 3, où  $\beta_{12} = (1507 + 11\sqrt{2246})/1014$ ,  $\beta_{17} = (114 - \sqrt{2})/56$  et les nombres  $(\beta_n)_{13 \leq n \leq 16}$  sont algébriques de degré 4 sur  $\mathbb{Q}$ .*

Table 3. Estimations de  $\mu_{n,1}$  pour  $13 \leq n + 1 \leq 23$ .

$n + 1$	$\mu_{n,1} \geq$	$\mu_{n,1} <$	$n + 1$	$\mu_{n,1} \geq$
13	$\beta_{12} \simeq 2.0003$	$651/325 \simeq 2.0031$	19	$184/91 \simeq 2.0219$
14	$\beta_{13} \simeq 2.0007$	$507/253 \simeq 2.0040$	20	$112/55 \simeq 2.0363$
15	$\beta_{14} \simeq 2.0004$	$772/385 \simeq 2.0052$	21	$31/15 \simeq 2.0666$
16	$\beta_{15} \simeq 2.0026$	$572/285 \simeq 2.0071$	22	$15/7 \simeq 2.1428$
17	$\beta_{16} \simeq 2.0048$	$205/102 \simeq 2.0099$	23	$12/5 \simeq 2.4000$
18	$\beta_{17} \simeq 2.0104$	$141/70 \simeq 2.0143$		

*Preuve.* Considérons le point

$$c_n = [24, 23, \dots, 25 - n, 70]. \quad (19)$$

Noter que  $c_n$  est invariant par le groupe d'isométries  $G_n$  de  $\Pi_n$  pour  $n \leq 19$  (par exemple  $G_{18} \simeq \mathcal{S}_4$  et  $G_{19} \simeq \mathcal{S}_5$ , [V-K]). Si  $n \leq 18$ , ce point  $c_n$  est équidistant de toutes les faces de  $\Pi_n$  associées aux racines de carré 2, et la valeur commune des longueurs correspondantes vaut

$$v_n = 2 \frac{(n - 26)(2n^2 - 95n + 1131)}{(n - 25)(2n - 49)(n - 24)}. \quad (20)$$

De plus, pour  $n \leq 17$  on a  $r_1(c_n) < r_2(c_n)$ , d'où la majoration  $\mu_{n,1} \leq v_n$  (lemme); l'inégalité stricte s'obtient par la preuve du lemme. Pour  $n = 18, 19$ , on a la relation  $\mu(c_n) = v_n$ . Cette égalité restant valable pour  $20 \leq n \leq 22$ , on conclut que  $\mu_{1,n} \geq v_n$  pour  $18 \leq n \leq 22$ . On vérifie également que pour  $12 \leq n \leq 22$ ,  $c_n$  est parfait et eutactique (voir §3.1) relativement au système de longueurs valant  $v_n$ ; par suite



([Bav1, §2.1]) si  $12 \leq n \leq 17$  la majoration par  $\nu_n$  est localement optimale pour ce système, et  $\nu_n$  est un maximum local de densité pour  $18 \leq n \leq 22$ .

La construction de réseaux lorentziens assez denses ( $12 \leq n \leq 17$ ) s'effectue en utilisant les autres éléments géométriques de  $\Pi_n$ . Les faces de ce polyèdre étant numérotées comme dans la table 6 de [Vin1], on note  $(l_k)_{1 \leq k \leq N_n}$  les longueurs associées. Les points donnant les minoration de la table 3 pour  $12 \leq n \leq 17$  sont uniquement définis dans  $\Pi_n$  par l'égalité de certaines longueurs  $(l_k)$ ,  $k \in \{1, \dots, N_n\} \setminus J_n$ , et d'une longueur  $l_{w_n}$  associée à un sommet de  $\Pi_n$  si  $13 \leq n \leq 16$ , avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} J_{12} &= \{13\}, \quad J_{17} = \{5, 13\}, \\ J_{13} &= \{5, 6\}, \quad w_{13} = [2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4], \\ J_{14} &= \{6, 7, 8\}, \quad J_{15} = \{5, 6, 9\}, \quad w_{14}, w_{15} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, \dots, 1, 1, 6], \\ J_{16} &= \{3, 11, 17\}, \quad w_{16} = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4]. \end{aligned}$$

Les sommets  $w_n$ ,  $n = 13, 15, 16$  sont situés à l'infini. Le calcul montre que pour  $13 \leq n \leq 16$ ,  $\beta_n$  appartient au corps quartique  $\mathbb{Q}(\theta_n)$  défini par

$$\begin{aligned} \theta_{13}^4 - 16 \theta_{13}^2 - 136 \theta_{13} - 566 &= 0, \\ \theta_{14}^4 - 1154 \theta_{14}^2 - 16512 \theta_{14} + 46036 &= 0, \\ \theta_{15}^4 - 2 \theta_{15}^3 - 122 \theta_{15}^2 + 2466 \theta_{15} - 6561 &= 0, \\ \theta_{16}^4 - 2 \theta_{16}^3 - 62 \theta_{16}^2 - 786 \theta_{16} + 57 &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

De plus, on a  $\beta_n = P_n(\theta_n)$ , où  $\theta_n$  est une racine convenable de (21), avec :

$$\begin{aligned} P_{13}(t) &= 2(1071832 t^3 - 770492 t^2 - 38450040 t + 5237155223)/5285302305, \\ P_{14}(t) &= (7776 t^3 - 191652 t^2 - 5034720 t + 3095413193)/1536378935, \\ P_{15}(t) &= (16382 t^3 + 1410467 t^2 + 17516168 t + 9589881744)/4797591903, \\ P_{16}(t) &= (-2437 t^3 + 32231 t^2 - 74617 t + 67058907)/33168576. \end{aligned} \quad \square$$

**Remarques 1.4.** (1) Les valeurs relativement faibles de  $\mu_{n,1}$  pour  $12 \leq n \leq 17$  reflètent la forme géométrique « étroite » de  $\Pi_n$ .

(2) On vérifie (voir ci-dessus) que les valeurs  $\beta_n$  ( $12 \leq n \leq 17$ ) et  $\nu_n$  ( $18 \leq n \leq 22$ ) correspondent à des maxima locaux de densité pour les réseaux lorentziens.

(3) Les minoration données en dimension 13 et 15 améliorent légèrement celles de [C-S, table 1].

## 2. Autres aspects géométriques

**2.1. Réseaux marqués. Actions de groupes. Compacité.** Dans cette section, nous poursuivons l'étude des réseaux orthogonaux en signature quelconque. Ces objets sont décrits par des espaces symétriques riemanniens. Nous en donnons quelques propriétés topologiques générales qui seront illustrées à la section 3 avec l'invariant d'Hermite isotrope du cas lorentzien.

Considérons  $\mathbb{R}^m$  muni de la structure euclidienne  $\langle u, v \rangle = u^t v$  et de la forme indéfinie de signature  $(p, q)$  « usuelle »  $\alpha(u, v) = \sum_{i=1}^p u_i v_i - \sum_{i=p+1}^m u_i v_i$  ( $u, v \in \mathbb{R}^m$ ,  $p + q = m$ ). D'autre part, soit  $f$  une forme bilinéaire symétrique entière indéfinie sur  $\mathbb{Z}^m$  de signature  $(p, q)$  et de discriminant  $\pm 1$ , et soit  $f_{\mathbb{R}}$  son extension à  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \otimes \mathbb{Z}^m$ . Un *réseau orthogonal marqué de type  $f$*  est un  $\mathbb{R}$ -isomorphisme unimodulaire de  $f_{\mathbb{R}}$  sur  $\alpha$ . Il est clair que tout réseau orthogonal dont le type est isomorphe à  $f$  (voir §1.1) peut s'écrire sous cette forme, c.-à-d.  $P^t \mathbb{Z}^m$  avec

$$P \in \mathrm{SL}_m(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \alpha(P^t x, P^t y) = f(x, y) \quad (x, y \in \mathbb{Z}^m). \quad (22)$$

Notons  $P_m$  l'ensemble des matrices symétriques réelles  $m \times m$  positives de déterminant 1. C'est un espace symétrique riemannien sur lequel  $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$  agit isométriquement et transitivement par  $P.A = P A P^t$  ( $P \in \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ ,  $A \in P_m$ ). Soit  $V_f$  l'ensemble des matrices de Gram des réseaux orthogonaux marqués de type  $f$  (matrices  $P P^t$  où  $P$  vérifie (22)). On sait (cf. [Bav4, §2.7]) que  $V_f$  est une sous-variété connexe, complète et totalement géodésique de  $P_m$ ; de plus, si  $F$  est la matrice de  $f$  dans la base canonique, on a

$$V_f = \{A \in P_m; A F^{-1} A = F\}. \quad (23)$$

Le quotient  $\mathrm{SO}^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f$  s'identifie avec l'ensemble des réseaux orthogonaux dont le type est isomorphe à  $f$ , modulo isométrie directe de réseaux orthogonaux. Observons que l'inégalité (4) se traduit *via* (22) en termes de formes quadratiques : tout élément  $A \in V_f$  satisfait l'inégalité

$$|f_{\mathbb{R}}(x, x)| \leq A[x] \quad (x \in \mathbb{R}^m). \quad (24)$$

On voit ainsi que  $V_f$  coïncide avec l'ensemble des *majorantes minimales*, ou *majorantes d'Hermite* de la forme quadratique  $f_{\mathbb{R}}$  (cf. [Bor, §I.5]).

Il est naturel de considérer, comme dans la théorie usuelle, des réseaux orthogonaux stables par une action préservant la structure orthogonale, c'est-à-dire en termes de formes, préservant  $V_f$ . Notons  $\mathrm{GO}(f, \mathbb{R})$  (resp.  $\mathrm{GO}_{p,q}(\mathbb{R})$ ) le groupe des similitudes orthogonales relativement à  $f$  (resp. à  $\alpha$ ) de rapport  $\pm 1$ . Alors le stabilisateur de  $V_f$ , pour l'action sur  $P_m$  des  $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$  avec  $\det(P) = \pm 1$ , coïncide avec  $\mathrm{GO}^t(f, \mathbb{R})$  ([Bav4, §2.8, prop. 2.14]).

Soit  $\rho : \Pi \rightarrow \mathrm{GO}^t(f, \mathbb{Z})$  une représentation entière d'un groupe fini  $\Pi$ . On pose  $\rho^\vee = (\rho^t)^{-1}$  et on note  $\mathbb{Z}_{\rho^\vee}^m$  le  $\mathbb{Z}[\Pi]$ -module correspondant. Un *réseau orthogonal de*

type  $(f, \rho)$  est un réseau  $\Lambda$  stable par une représentation de  $\Pi$  dans  $O_m(\mathbb{R}) \cap GO_{p,q}(\mathbb{R})$  et tel que  $f$  soit isomorphe à  $\alpha_\Lambda$  par un isomorphisme de  $\mathbb{Z}[\Pi]$ -modules entre  $\mathbb{Z}_{\rho^\vee}^m$  et  $\Lambda$ . La notion de *réseau orthogonal marqué de type  $(f, \rho)$*  est analogue à celle du cas particulier où  $\rho$  est triviale (voir plus haut).

Considérons l'ensemble  $V_f^\rho$  des formes  $A \in V_f$  invariantes par  $\rho$ , c'est-à-dire  $\rho(\pi)A\rho(\pi)^t = A$  pour tout  $\pi$  dans  $\Pi$ . Si  $G$  est un sous-groupe de Lie de  $GL_m(\mathbb{R})$ , on note  $G_\rho$  le commutant de  $\rho$  dans  $G \cap SL_m(\mathbb{R})$ . Le groupe  $SO_\rho^t(f, \mathbb{R})$  (d'indice fini dans  $GO_\rho^t(f, \mathbb{R})$ ) agit sur  $V_f^\rho$ . Il est clair que l'ensemble des réseaux orthogonaux marqués (resp. non marqués) de type  $(f, \rho)$ , considérés modulo isométrie directe conjuguant les actions, s'identifie *via* les matrices de Gram à  $V_f^\rho$  (resp. à  $SO_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f^\rho$ ). Voici les principales propriétés de  $V_f^\rho$ .

**Proposition 2.1.** ([Bav4, §2.5]) (1) *L'ensemble  $V_f^\rho$  est une sous-variété non vide, connexe, complète et totalement géodésique de l'espace  $P_m$ . C'est une orbite du commutant  $SO_\rho^t(f, \mathbb{R})$ .*

(2) *L'application  $SO_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f^\rho \rightarrow SL(m, \mathbb{Z}) \backslash P_m$  est propre et à fibres finies.*

**Corollaire 2.2.** *L'invariant d'Hermite isotrope des réseaux orthogonaux tend vers 0 à l'infini de l'espace de modules  $SO_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f^\rho$ .*

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $(V_f^\rho)^{\geq \varepsilon} = \{A \in V_f^\rho; \mu(A) \geq \varepsilon\}$ . Alors  $SO_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash (V_f^\rho)^{\geq \varepsilon}$  est compact (proposition 2.1 (2) et critère de Mahler usuel). Mais d'après l'inégalité fondamentale (4),  $\mu$  coïncide avec  $\mu^0$  en dehors de  $(V_f^\rho)^{\geq 1}$ .  $\square$

**2.2. Classes minimales. Rétractions équivariantes.** L'espace  $V_f^\rho$  est partitionné comme dans la théorie classique par les configurations de vecteurs minimaux (cf. [Mar, ch IX]). Deux formes  $A$  et  $B$  de  $V_f^\rho$  sont dans la même *classe minimale* si elles ont le même ensemble de vecteurs minimaux pour  $\mu$ . La décomposition obtenue est évidemment  $SO_\rho^t(f, \mathbb{Z})$ -invariante. En remplaçant  $\mu$  par  $\mu^0$ , on définit une partition analogue de  $V_f^\rho$ .

On dira qu'une classe minimale est *isotrope* si le sous-espace engendré par les vecteurs qui la définissent est totalement isotrope pour  $f$ . Cette notion est invariante par  $SO_\rho^t(f, \mathbb{Z})$ . D'après l'inégalité (4), les classes isotropes (pour  $\mu$  ou  $\mu^0$ ) recouvrent  $V_f^\rho \setminus (V_f^\rho)^{\geq 1}$  et décrivent donc l'infini de  $SO_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash V_f^\rho$  (voir proposition 2.1 (2)). De plus elles possèdent une structure géométrique particulière qui permet de les rétracter sur les classes non isotropes.

**Proposition 2.3** (rétraction des classes isotropes). *Soit  $\rho$  une représentation de  $\Pi$  dans  $GO^t(f, \mathbb{Z})$ . On note  $N_{f,\rho}^0$  (resp.  $N_{f,\rho}$ ) la réunion des  $\mu^0$ -classes (resp. des  $\mu$ -classes) minimales non isotropes de  $V_f^\rho$ .*

(1) Les quotients  $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash N_{f,\rho}^0$  et  $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \backslash N_{f,\rho}$  sont compacts et le nombre de classes non isotropes est fini modulo  $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z})$ .

(2) Chaque classe isotrope (pour  $\mu$  ou  $\mu^0$ ) est feuilletée par des arcs géodésiques.

(3) L'espace  $V_f^\rho$  se rétracte par déformation  $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z})$ -équivariante sur  $N_{f,\rho}^0$  et sur  $N_{f,\rho}$ .

*Preuve.* (1) Les ensembles  $N_{f,\rho}^0$  et  $N_{f,\rho}$  sont fermés, invariants par  $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z})$  et d'après (4) inclus dans  $(V_f^\rho)^{\geq 1}$ , d'où la compacité (proposition 2.1 (2)). La finitude résulte du fait que les partitions en classes minimales sont localement finies.

(2) Soit  $U$  un sous-espace de  $\mathbb{R}^m$  totalement isotrope pour  $f$  et stable par  $\rho^\vee$ . Pour tout  $A \in V_f^\rho$ , on note  $p_A^U$  et  $q_A^U$  les matrices des projections  $A$ -orthogonales de  $\mathbb{R}^m$  sur  $U$  et sur  $F^{-1}AU = (U^{\perp f})^{\perp A}$ , et on pose

$$X_U(A) = A(p_A^U - q_A^U). \quad (25)$$

Remarquer que  $F^{-1}AU$  est  $A$ -orthogonal à  $U$  (en particulier  $X_U(A) \neq 0$ ), que  $p_A^U$  et  $q_A^U$  commutent et sont conjuguées par  $F^{-1}A$  (qui conserve l'orthogonalité pour  $A$ ). On vérifie aussi que  $X_U(A)$  est tangent à  $V_f^\rho$  au point  $A$ . De plus, les orbites du flot  $\Phi_U^t$  de  $X_U$  sur  $V_f^\rho$  sont des géodésiques. En effet soit  $\gamma_A(t) = A \exp(A^{-1}X_U(A)t)$ . À partir de la relation  $\gamma_A'(t) = X_U(A)A^{-1}\gamma_A(t)$ , on voit que les décompositions

$$(*) \quad \mathbb{R}^m = U \oplus U^{\perp A} \quad \text{et} \quad (***) \quad \mathbb{R}^m = U \oplus (U^{\perp f})^{\perp A} \oplus U^{\perp f} \cap U^{\perp A} \quad (26)$$

sont  $\gamma_A(t)$ -orthogonales pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On a donc  $p_{\gamma_A(t)}^U = p_A^U$  et il est facile de vérifier que  $\Phi_U^t(A) = \gamma_A(t)$ . Dans le cas où  $U = \mathbb{R}u$  est de dimension 1, le champ  $X_U$  est proportionnel au gradient relatif à  $V_f^\rho$  de la fonction longueur  $l_u$  ( $l_u(A) = A[u]$ ) :

$$X_U = (2/l_u) \nabla^\rho l_u. \quad (27)$$

Soit  $c$  une classe minimale isotrope de  $V_f^\rho$  définie par  $S \subset \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ , soit  $U$  le  $\rho^\vee$ -module engendré par  $S$  et soit  $A \in c$ . Pour tout  $u \in \mathbb{R}^m$  considérons la fonction  $\varphi_u = l_u \circ \gamma_A$ , que l'on note  $\varphi_0$  si  $u \in S$ . En utilisant la décomposition  $\gamma_A(t)$ -orthogonale (\*\*), on montre que  $\varphi_u$  vérifie l'inéquation différentielle  $\varphi_u' \leq \varphi_u$  avec égalité si et seulement si  $u \in U$ , d'où l'on voit que  $\varphi_u/\varphi_0$  est décroissante. Par suite il existe  $t_A > 0$  tel que  $\gamma(t) \in c$  pour  $t \in ]-\infty, t_A[$ .

(3) Soit  $D_0 = V_f^\rho$  et  $D_k$  ( $k \geq 1$ ) le complémentaire dans  $V_f^\rho$  de la réunion des  $\mu^0$ -classes minimales définies par des configurations isotropes de rang  $\leq k$  ( $D_k = N_{f,\rho}^0$  pour  $k$  assez grand). De façon analogue au cas symplectique traité dans [Bav3], on montre que les flots des champs  $X_U$  (eq. (25)) associés aux classes isotropes permettent de construire une rétraction équivariante par déformation de  $D_k$  sur  $D_{k+1}$ , donc de  $V_f^\rho$  sur  $N_{f,\rho}^0$  (voir les arguments détaillés dans [Bav3, §2.3]). On procède de même pour  $N_{f,\rho}$ .  $\square$

**Remarques 2.1.** (1) L'avantage de  $\mu^0$  est de fournir un rétracte de codimension non nulle quand  $\rho$  est triviale.

(2) La proposition 2.3 et sa preuve sont valables plus généralement pour les réseaux  $b$ -autoduaux (avec  $b$  réflexive) définis dans [Bav4].

Quand  $\rho$  est triviale, une étude algébrique des classes isotropes montre que les  $\mu$ -classes minimales de réseaux orthogonaux de type  $f$  sont en nombre fini modulo  $\mathrm{SO}^t(f, \mathbb{Z})$  ([Bav4, §2.9]). Dans les cas lorentzien, cette finitude est donnée par un argument purement topologique valable pour toute représentation.

**Proposition 2.4** (finitude des classes minimales). *Soit  $f$  de signature  $(n, 1)$  et  $\rho$  une représentation de  $\Pi$  dans  $\mathrm{GO}^t(f, \mathbb{Z})$ . Alors l'ensemble des  $\mu$ -classes (resp. des  $\mu^0$ -classes) minimales de  $V_f^\rho$  est fini modulo l'action de  $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z})$ .*

*Preuve.* En signature  $(n, 1)$ , les classes minimales isotropes sont ouvertes, donc de frontière non vide puisque  $V_f^\rho$  est connexe. Soit  $A$  un point frontière d'une telle classe (pour  $\mu$  ou  $\mu^0$ ). Le sous-espace engendré par les vecteurs minimaux de  $A$  est de rang  $\geq 2$ , donc non totalement isotrope. Par (24) on a  $\mu(A) \geq 1$ . Sachant que les classes non isotropes sont incluses dans  $(V_f^\rho)^{\geq 1}$ , il existe donc un compact de  $\mathrm{SO}_\rho^t(f, \mathbb{Z}) \setminus V_f^\rho$  qui rencontre toutes les projections des classes minimales, d'où la finitude.  $\square$

### 3. Invariant d'Hermite isotrope des réseaux lorentziens

**3.1. Algorithme de Voronoï.** L'algorithme de Voronoï pour les réseaux permet de classer les réseaux parfaits au sens usuel ([Vor]). En utilisant un graphe géodésique, nous établissons l'existence d'un algorithme analogue pour l'invariant d'Hermite isotrope des réseaux lorentziens. Un autre exemple de graphe de Voronoï géodésique a été construit dans [Bav2] dans le contexte des réseaux symplectiques.

On reprend les notations du §1.2, à ceci près que  $\mathbf{H}_f$  sera ici identifié à l'une des nappes de l'hyperboloïde  $x^2 = -1$ , choisie une fois pour toutes. Soit  $x \in \mathbf{H}_f$  et soit  $K_x^*$  le convexe engendré par les différentielles  $dl_u(x)$  quand  $u$  décrit l'ensemble des vecteurs  $f$ -isotropes tels que  $l_u(x) = \mu^0(x)$ . Rappelons que  $x$  est parfait si  $K_x^*$  engendre affinement l'espace cotangent en  $x$ , et que  $x$  est eutactique si  $K_x^*$  contient 0 dans son intérieur affine ([Bav1]). Par exemple les maxima locaux de  $\mu^0$  sont parfaits et eutactiques car  $\mu^0$  vérifie le théorème de Voronoï (d'après [Bav1, §2.2], les  $l_u$  étant ici strictement convexes, proposition 1.2).

**Théorème 3** (description géométrique de  $\mu^0$ ). (1) *La partition  $\mathcal{P}$  en classes minimales pour  $\mu^0$  est un pavage  $\Theta_f$ -invariant de  $\mathbf{H}_f$  par des polyèdres hyperboliques. Les classes minimales sont les cellules ouvertes de  $\mathcal{P}$  et sont bornées sauf en dimension maximale  $n$ . De plus,  $\Theta_f \setminus \mathcal{P}$  est une décomposition finie de  $\Theta_f \setminus \mathbf{H}_f$ .*

(2) On suppose  $n \geq 2$ . Le squelette unidimensionnel  $\mathcal{P}^1$  de  $\mathcal{P}$  est un graphe géodésique  $\Theta_f$ -invariant dans  $\mathbf{H}_f$  dont les sommets sont les points parfaits (et les arêtes de longueur finie). Ce graphe est connexe et on peut décrire explicitement le complexe cellulaire fini  $\Theta_f \setminus \mathcal{P}^1$  (« algorithme à la Voronoï »).

*Preuve.* (1) D'après (14), on a  $l_u(x) = 2(x \cdot u)^2$ . Si  $v$  est isotrope,  $f(., v)$  est de signe constant sur  $\mathbf{H}_f$ . Par suite, les égalités entre longueurs définissent des sous-espaces hyperboliques (sous-variétés complètes totalement géodésiques) de  $\mathbf{H}_f$ , éventuellement vides. En particulier si  $S$  est un ensemble de vecteurs isotropes minimaux de rang au moins 2, l'égalité entre toutes les  $(l_u)_{u \in S}$  définit un sous-espace hyperbolique  $\tilde{\mathcal{C}}$  de  $\mathbf{H}_f$ . D'après la proposition 1.2, le champ de gradients  $-\nabla l_u$  est dirigé vers le point à l'infini  $\bar{u}$ . Il en résulte que  $\tilde{\mathcal{C}}$  est orthogonal au sous-espace hyperbolique engendré par  $S^* = \{\bar{u}; u \in S\}$ . Remarquer que la fonction longueur commune  $l_u$  ( $u \in S$ ) est *propre sur*  $\tilde{\mathcal{C}}$  car l'ensemble  $S^*$  est disjoint de l'infini de  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Sachant que  $\mu^0$  est borné, on en déduit que la classe minimale  $\mathcal{C}_S$  est l'intérieur relatif d'un polyèdre hyperbolique *borné* de  $\tilde{\mathcal{C}}$ . L'invariance de la décomposition par  $\Theta_f$  est claire. Enfin, la finitude modulo  $\Theta_f$  des classes minimales est établie à la proposition 2.4.

(2) Soit  $\gamma$  une géodésique de  $\mathbf{H}_f$ , c.-à-d. une solution de l'équation différentielle  $x'' = (x' \cdot x')x$ . Alors toutes les fonctions  $\varphi = l_u \circ \gamma$  ( $u$  isotrope) sont solutions de la même équation différentielle

$$2\varphi\varphi'' = 4C\varphi^2 + \varphi'^2 \quad \text{où} \quad C = \gamma' \cdot \gamma'. \quad (28)$$

Par suite les fonctions longueur sont déterminées le long de  $\gamma$  par leur jet d'ordre 1 en un point. On voit ainsi que l'adhérence d'une classe minimale  $\mathcal{C}_S$  coïncide avec la réunion  $\bigcup_{S \subset T} \mathcal{C}_T$  (on retrouve aussi le fait que les classes sont géodésiques). Soit  $p$  un point non parfait et soit  $S$  l'ensemble des vecteurs minimaux de  $p$ . D'après l'observation précédente, un vecteur tangent orthogonal au sous-espace affine engendré par  $(\nabla l_u(p))_{u \in S}$  donne une variation de  $p$  dans sa classe  $\mathcal{C}_S$ . D'autre part un point parfait est toujours isolé dans sa classe ([Bav4, §1.4]) qui est donc par connexité réduite à ce point. Les sommets de  $\mathcal{P}$ , ou classes minimales réduites à un point, correspondent donc aux points parfaits.

Soit  $p$  et  $q$  deux points parfaits et soit  $[p, q]$  le segment géodésique qui les joint. Alors  $[p, q]$  est recouvert par un nombre fini de polyèdres fermés  $C_1, \dots, C_N$ , chaque  $C_i$  étant l'adhérence d'une classe isotrope, c.-à-d. de dimension maximale. Les polyèdres  $C_i$  et  $C_{i+1}$  se coupent sur  $[p, q]$ , donc ont au moins un sommet  $p_i$  en commun. Posons  $p_0 = p$  et  $p_N = q$  en supposant  $p \in C_1$  et  $q \in C_N$ . On peut joindre  $p_i$  et  $p_{i+1}$  par des arêtes de  $\mathcal{P}$  dans le bord de  $C_{i+1}$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ), d'où un chemin de  $p$  à  $q$  dans  $\mathcal{P}^1$ .

Soit  $x \in \mathbf{H}_f$  et soit  $\mathcal{C}$  sa classe. Si  $x$  n'est pas parfait, on peut faire une variation géodésique de  $x$  dans  $\mathcal{C}$  jusqu'à atteindre le bord de  $\mathcal{C}$  (voir ci-dessus, si  $\dim \mathcal{C} = n$ , il suffit d'éviter la direction qui mène à l'infini). Ainsi, au bout d'un nombre fini



d'étapes, on aboutit sur un point parfait. Remarquons ensuite que l'on peut expliciter les sommets voisins d'un sommet donné de  $\mathcal{P}^1$ . En effet soit  $p$  parfait et soit  $K$  le convexe engendré par les  $(\nabla l_u)_{u \in S(p)}$ . Chaque face  $F$  de dimension  $n - 1$  de  $K$  sépare l'espace tangent en deux hyperplans affines. On note  $\xi_F$  le vecteur unitaire orthogonal à  $F$  et dirigé vers l'hyperplan contenant  $K$ . D'après l'observation sur les 1-jets des longueurs, les arêtes de  $\mathcal{P}$  issues de  $p$  sont des arcs géodésiques de direction initiale  $\xi_F$  ; chacune conduit, en un temps fini (voir l'assertion (1)), à un autre point parfait voisin de  $p$ . On peut trouver ainsi un voisinage combinatoire arbitrairement grand de  $p$ , et en tenant compte de l'action de  $\Theta_f$ , décrire le complexe cellulaire fini et connexe  $\Theta_f \backslash \mathcal{P}^1$ . L'équivalence de deux points de  $\mathbf{H}_f$  sous  $\Theta_f$  peut se traiter en terme de formes quadratiques (on sait algorithmiquement tester l'équivalence et le cas échéant obtenir la liste finie des  $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{Z})$ -équivalences entre deux formes données).  $\square$

**3.2. Graphe de Voronoï pour  $n \leq 5$ .** À titre d'exemple, nous décrivons ici  $\Theta_f \backslash \mathcal{P}^1$  pour  $2 \leq n \leq 5$ . Pour tout point parfait  $p$ , on note  $p^*$  le polyèdre convexe engendré par les points à l'infini associés aux vecteurs  $\mu^0$ -minimaux de  $p$ . Rappelons que pour  $n$  petit, le polyèdre  $\Pi_n = \Pi_f$  (avec les notations de 1.3) est un simplexe décrit par les relations (9). Afin d'explicitier le graphe de Voronoï, nous prenons comme point de départ le sommet  $s_n = [0, \dots, 0, 1] \in \Pi_n$  qui est toujours parfait (c'est même un maximum local de  $\mu^0$ ). Soit  $p_2 = [1, 1, 2]$ ,  $p_n = [1, \dots, 1, 3]$  ( $n \geq 3$ ) le sommet de  $\Pi_n$  opposé à la face  $X_n = 0$  ( $n$  petit) et soit  $s'_n$  le symétrique de  $s_n$  par rapport à  $p_n$ . Le polyèdre  $s_n^*$  est un hyperoctaèdre (régulier) et  $\Theta_f$  agit transitivement sur ses faces de codimension 1. Si  $n = 2$  ou 3, le domaine fondamental  $\Pi_n$  est contenu dans  $s_n^*$  et  $p_n$  est situé au centre d'une face de  $s_n^*$  ; il y a un unique point parfait modulo  $\Theta_f$  et  $\Theta_f \backslash \mathcal{P}^1$  est un quotient de l'arête  $[s_n, s'_n]$  (figure 2). Pour  $n = 4$ , le point  $p_4$  est parfait et  $p_4^*$  est un simplexe dont toutes les faces sont  $\Theta_f$ -équivalentes.

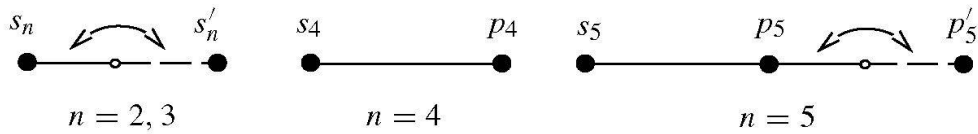


Figure 2. Graphe de Voronoï pour  $2 \leq n \leq 5$ .

On a  $\Theta_f \backslash \mathcal{P}^1 \simeq [s_4, p_4]$  (deux points parfaits mutuellement voisins modulo  $\Theta_f$ ). Enfin si  $n = 5$ ,  $p_5$  est parfait et  $p_5^*$  est un hyperoctaèdre avec deux classes de faces modulo  $\Theta_f$ . L'une des faces de  $p_5^*$  est contenue dans l'hyperplan  $X_5 = 0$  et centrée au sommet  $q_5 = [1, 1, 1, 1, 0, 3]$  de  $\Pi_5$ . Le quotient  $\Theta_f \backslash \mathcal{P}^1$  est alors donné par la figure 2, où  $p'_5$  désigne le symétrique de  $p_5$  par rapport à  $q_5$ .

**3.3. Sur les points parfaits ou eutactiques.** Certaines formules liant entre eux les objets particuliers associés à l'invariant  $\mu^0$  pour les réseaux lorentziens (points parfaits ou eutactiques, classes minimales) se déduisent des très bonnes propriétés géométriques de cet invariant. Nous appellerons *groupe d'automorphismes* d'un point  $x \in \mathbf{H}_f$  ou d'une classe minimale  $\mathcal{C}$  son stabilisateur pour l'action de  $\Theta_f$ , noté  $\text{Aut } x$  ou  $\text{Aut } \mathcal{C}$ .

En associant à toute classe minimale  $\mathcal{C}_S$  le polyèdre hyperbolique engendré par  $S^* = \{\bar{u}; u \in S\}$ , nous définissons un pavage hyperbolique  $\mathcal{P}^*$  géométriquement dual de  $\mathcal{P}$ . En particulier, les cellules de dimension maximale de  $\mathcal{P}^*$ , notées  $p^*$ , sont en bijection avec les points parfaits  $p$ . Chacune est de volume fini (on suppose  $n \geq 2$ ) et leurs intérieurs sont mutuellement disjoints.

**Proposition 3.1** (formule de masse pour les points parfaits). *Soit  $\mathcal{PF}$  un système de représentants des points parfaits modulo  $\Theta_f$ . Alors*

$$\sum_{p \in \mathcal{PF}} \frac{\text{Vol } p^*}{|\text{Aut } p|} = \text{Vol}(\Theta_f \backslash \mathbf{H}_f) \quad (29)$$

où  $\text{Vol}$  désigne le volume hyperbolique (on suppose  $n \geq 2$ ).

*Preuve.* On décompose  $\Theta_f \backslash \mathbf{H}_f$  à partir du pavage  $\Theta_f$ -invariant  $\mathcal{P}^*$ .  $\square$

**Remarque 3.1.** Il existe une formule analogue à (29) pour les réseaux parfaits usuels. L'application de ces formules est limitée par la faible connaissance du calcul des volumes.

**Proposition 3.2** (formule d'Euler pour les classes non isotropes). *Soit  $\mathcal{N}$  un système de représentants modulo  $\Theta_f$  des classes minimales non isotropes, c'est-à-dire définies par des systèmes de vecteurs (isotropes) de rang au moins 2. Alors*

$$\sum_{\mathcal{C} \in \mathcal{N}} \frac{(-1)^{\dim \mathcal{C}}}{|\text{Aut } \mathcal{C}|} = \chi(\Theta_f) \quad (30)$$

où  $\chi$  est la caractéristique d'Euler.

*Preuve.* Les classes isotropes sont ici définies par une seule paire de vecteurs minimaux  $\pm u$ , et de dimension maximale. En utilisant les lignes de gradient de  $l_u$ , c'est-à-dire les géodésiques issues du point à l'infini  $\bar{u}$ , on peut rétracter par déformation les classes isotropes sur la réunion  $N$  des classes non isotropes (voir eq. (27) et proposition 2.3). Par ailleurs (théorème 3 (1)),  $N$  admet une décomposition cellulaire finie modulo  $\Theta_f$ . Pour conclure, on prend un sous-groupe  $\Gamma$  sans torsion (c.-à-d. sans points fixes) et d'indice fini dans  $\Theta_f$ , et on obtient des informations de nature cohomologique, notamment sur la caractéristique d'Euler, à partir de  $\Gamma \backslash N$  qui est un  $K(\Gamma, 1)$  cellulaire fini.  $\square$



**Remarque 3.2.** On a  $\chi(\Theta_f) = 0$  si  $n$  est impair. En effet soit  $\Gamma$  comme dans la preuve ci-dessus. La variété  $\Gamma \setminus \mathbf{H}_f$  est un  $K(\Gamma, 1)$  ; elle se rétracte sur une variété  $X$  compacte à bord telle que  $\chi(\partial X) = 0$  et dont le double est de caractéristique nulle.

Considérons maintenant les points eutactiques pour  $\mu^0$  (voir §3.1). Comme les longueurs sont strictement convexes, chaque classe minimale  $\mathcal{C}$  contient au plus un point eutactique ([Bav4, §1.3]) ; ces points sont donc en nombre fini modulo  $\Theta_f$ . De plus, si  $e \in \mathcal{C}$  est eutactique, on a  $\text{Aut } \mathcal{C} = \text{Aut } e$  (unicité). Rappelons que le rang d'un point  $x \in \mathbf{H}_f$  pour  $\mu^0$  est le rang des gradients  $\nabla l_u(x)$  pour les  $u$  réalisant  $\mu^0(x)$ .

**Proposition 3.3** (formule d'Euler pour les eutactiques). *Soit  $\mathcal{E}$  un système de représentants modulo  $\Theta_f$  des points eutactiques pour  $\mu^0$ . Alors*

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \frac{(-1)^{\text{rang } e}}{|\text{Aut } e|} = \chi(\Theta_f) \quad (31)$$

où  $\chi$  est la caractéristique d'Euler.

*Preuve.* C'est une conséquence directe de [Akr]. Puisque le hessien des  $l_u$  est défini positif (voir (28)), on sait que  $\mu^0$  est une fonction de Morse topologique sur  $\mathbf{H}_f$  dont les points critiques d'indice  $r$  sont exactement les eutactiques de rang  $r$  ([Akr]), ici en nombre fini modulo  $\Theta_f$ . On conclut comme d'habitude en prenant un sous-groupe d'indice fini et sans torsion de  $\Theta_f$ .  $\square$

Il est très facile de comparer les relations (30) et (31). La classe  $\mathcal{C}$  d'un point eutactique  $e$  est non isotrope ([Bav4, §2.8, thm. 1]). De plus on a  $\text{Aut } e = \text{Aut } \mathcal{C}$  et  $\text{rang } e + \dim \mathcal{C} = n$  (voir §3.1). Le premier membre de  $(-1)^n(30)$  contient celui de (31). Compte tenu de la rem. 3.2, on a donc  $\sum_{\mathcal{C}} (-1)^{\dim \mathcal{C}} / |\text{Aut } \mathcal{C}| = 0$ , somme sur les classes minimales (modulo  $\Theta_f$ ) non isotropes et non « eutactiques ». Il serait intéressant d'obtenir directement cette relation.

### 3.4. Valeur maximale en petite dimension

**Proposition 3.4** (maximum de  $\mu^0$ ). *La valeur maximale de  $\mu^0$  pour les réseaux lorentziens de dimension  $n + 1 \leq 16$  est donnée par la table 4. Elle est atteinte uniquement (modulo  $\Theta_f$ ) par les points suivants :*

$$\begin{aligned} s_n &= [0, \dots, 0, 1] \quad (1 \leq n \leq 5), \\ p_n &= [1, \dots, 1, 3] \quad (5 \leq n \leq 8), \\ x_n &= [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, \dots, 0, 3] \quad (9 \leq n \leq 11), \\ y_n &= [2, 1, \dots, 1, 4] \quad (11 \leq n \leq 12), \end{aligned}$$

$$z_{13} = [1, \dots, 1, 0, 4],$$

$$z_{14} = [2, \dots, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6],$$

$$z_{15} = [1, \dots, 1, 4] \text{ pour le cas impair et } b_1, b_9 \text{ (eq. (12))},$$

$$d_{17} = [4, 6, 8, 12, 10, 8, 6, 3, 5, 8, 10, 15, 12, 9, 6, 3, -3, 3] \text{ pour le cas pair.}$$

Table 4. Maximum de  $\mu^0$  en petite dimension.

$n+1$	$\mu_{n,1}^0$	$n+1$	$\mu_{n,1}^0$	$n+1$	$\mu_{n,1}^0$	$n+1$	$\mu_{n,1}^{0,\Pi}$
2, 3, 4, 5, 6	2	9	8	14	9/2	2	1
7	8/3	10, 11, 12	4	15, 16	8	10	2
8	4	13	8			18	9/2

*Preuve.* Dans le cas impair, on procède comme au §1.3, avec une longueur si  $n \leq 8$ , et par découpage pour  $9 \leq n \leq 15$ . Noter que le réseau associé à  $s_n$  (point base) est isomorphe à  $\mathbb{Z}^{n+1}$ . Le cas pair résulte directement de la preuve du théorème 2 (cf. §1.4) pour  $n = 1$  ou 9, et d'un découpage en deux sous-polyèdres pour  $n = 17$ .  $\square$

## Bibliographie

- [Akr] H. Akrouit, Singularités topologiques des systoles généralisées. *Topology* **42** (2003), 291–308. [Zbl 1054.32006](#) [MR 1941437](#)
- [Ash] A. Ash, Small-dimensional classifying spaces for arithmetic subgroups of general linear groups. *Duke Math. J.* **51** (2) (1984), 459–468. [Zbl 0542.22011](#) [MR 0747876](#)
- [Bav1] C. Bavard, Systole et invariant d'Hermite. *J. Reine Angew. Math.* **482** (1997), 93–120. [Zbl 1011.53035](#) [MR 1427658](#)
- [Bav2] C. Bavard, Familles hyperboliques de réseaux symplectiques. *Math. Ann.* **320** (4) (2001), 799–833. [Zbl 1008.11027](#) [MR 1857139](#)
- [Bav3] C. Bavard, Classes minimales de réseaux et rétractions géométriques équivariantes dans les espaces symétriques. *J. London Math. Soc.* (2) **64** (2) (2001), 275–286. [Zbl 1031.11042](#) [MR 1853450](#)
- [Bav4] C. Bavard, Théorie de Voronoï géométrique. Propriétés de finitude pour les familles de réseaux et analogues, *Bull. Soc. Math. France* **133** (2) (2005), 205–257. [Zbl 1085.11033](#) [MR 2172266](#)
- [B-M] A.-M. Bergé et J. Martinet, Densité dans des familles de réseaux. Application aux réseaux isoduaux. *Enseign. Math.* (2) **41** (3–4) (1995), 335–365. [Zbl 0848.52006](#) [MR 1365850](#)
- [Bor] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XV. Actualités Scientifiques et Industrielles No. 1341, Hermann, Paris 1969. [Zbl 0186.33202](#) [MR 0244260](#)
- [Bou] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie*. Chapitres 4, 5 et 6. Actualités Scientifiques et Industrielles No. 1337, Hermann, Paris 1968. [Zbl 0186.33001](#) [MR 0240238](#)

- [B-S] P. Buser P. et P. Sarnak, On the period matrix of a Riemann surface of large genus. With an appendix by J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Invent. Math.* **117** (1) (1994), 27–56. [Zbl 0814.14033](#) [MR 1269424](#)
- [C-S] J. H. Conway et N. J. A. Sloane, On lattices equivalent to their duals. *J. Number Theory* **48** (3) (1994), 373–382. [Zbl 0810.11041](#) [MR 1293868](#)
- [Mar] J. Martinet, *Perfect lattices in Euclidean spaces*. Grundlehren Math. Wiss. 327 Springer-Verlag, Berlin 2003. [Zbl 1017.11031](#) [MR 1957723](#)
- [Ser] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*. Collection SUP : “Le Mathématicien” 2, Presses Universitaires de France, Paris 1970. [Zbl 0225.12002](#) [MR 0255476](#)
- [Vin1] È. B. Vinberg, On groups of units of certain quadratic forms. *Math. USSR-Sb.* **16** (1) (1972), 17–35. [Zbl 0252.20054](#) [MR 0295193](#)
- [Vin2] È. B. Vinberg, On unimodular integral quadratic forms. *Funct. Anal. Appl.* **6** (1972), 105–111. [Zbl 0252.10027](#) [MR 0299557](#)
- [V-K] È. B. Vinberg, et I. M. Kaplinskaja, On the groups  $O_{18,1}(Z)$  and  $O_{19,1}(Z)$ . *Soviet Math. Dokl.* **19** (1) (1978), 194–197. [Zbl 0402.20034](#) [MR 0476640](#)
- [Vor] G. Voronoï, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, *premier mémoire*. Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. *J. Reine Angew. Math.* **133** (1908), 97–178. [JFM 39.0274.01](#)

Received March 1, 2005

Christophe Bavard, Analyse et Géométrie de Bordeaux, U.M.R. 5467 C.N.R.S., Université Bordeaux-I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France  
E-mail: [Christophe.Bavard@math.u-bordeaux1.fr](mailto:Christophe.Bavard@math.u-bordeaux1.fr)