**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 81 (2006)

**Artikel:** Sur la compatibilité entre les correspondances de Langlands locale et globale pour U(3)

**Autor:** Bellaïche, Joël

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-1166

Comment. Math. Helv. 81 (2006), 449–470 **Commentarii Mathematici Helvetici**


# Sur la compatibilité entre les correspondances de Langlands locale et globale pour U(3)

Joël Bellaïche

**Résumé.** En utlisant un argument d'augmentation du niveau (et un résultat de Larsen sur l'image des représentations galoisiennes apparaissant dans des systèmes compatibles), nous prouvons que pour toute forme automorphe $\pi$ de $\mathrm{U}(3)$, la représentation galoisienne $l$-adique $\rho_l$ attachée à $\pi$ par Blasius et Rogawski est à chaque place finie celle associée à $\pi$ par la correspondance de Langlands locale (au moins à semi-simplification près, et pour un ensemble de densité 1 de $l$). Nous nous appuyons sur le travail de Harris et Taylor, qui ont prouvé les mêmes résultats (pour $\mathrm{U}(n)$) sous l'hypothèse que le changement de base de $\pi$ est de carré intégrable en au moins une place. Un corollaire de notre résultat est que toute représentation automorphe pour $G$ tempérée à une infinité de places est tempérée partout.

**Abstract.** Using a level-raising argument (and a result of Larsen on the image of Galois representations in compatible systems), we prove that for any automorphic representation $\pi$ for $\mathrm{U}(3)$, the $l$-adic Galois representation $\rho_l$ which is attached to $\pi$ by the work of Blasius and Rogawski is the one expected by local Langlands correspondance at every finite place (at least up to semi-simplification and for a density one set of primes $l$). We rely on the work of Harris and Taylor, who have proved the same results (for $\mathrm{U}(n)$) assuming the base change of $\pi$ is square-integrable at one place. As a corollary, every automorphic representation which is tempered at an infinite number of places is tempered at all places.

**Mathematics Subject Classification (2000).** 11FXX.

**Keywords.** Langlands correspondance, generalized Ramanujan conjecture, unitary groups.

## 1. Introduction

**1.1. Résultats.** Soit $E/F$ une extension CM de corps de nombres, $c$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$, $G$ le groupe unitaire à trois variables défini par

$$G(R) = \{g \in \mathrm{GL}_n(E \otimes_F R),\ {}^t c(g) g = 1\}$$

pour toute $F$-algèbre $R$. On choisit une clôture algébrique $\overline{E}$ de $E$ et on pose $\Gamma_E = \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$.

Dans [Rog3], Rogawski a étudié en grand détail les représentations automorphes de $G$. Il a construit une application de *changement de base* attachant à chaque représentation automorphe $\pi$ de $G$ une représentation automorphe $\pi_E$ de $G_E = G \times_F E \simeq (\mathrm{GL}_3)_E$ (voir 2.2.1). De plus, avec Blasius, dans [BR], il a montré l'existence d'un système compatible de représentations galoisiennes attaché à $\pi$ (ou à $\pi_E$), que nous explicitons ci-dessous.

Pour chaque place finie $w$ de $E$, choisissons une clôture algébrique $\overline{E}_w$ de $E_w$, et notons $\Gamma_{E_w} := \mathrm{Gal}(\overline{E}_w/E_w)$. Choisissons également un plongement de $\overline{E}$ dans $\overline{E}_w$, ce qui permet d'identifier $\Gamma_{E_w}$ à un sous-groupe *de décomposition* $D_w$ de $\Gamma_E$ en $w$.

Pour $l$ un nombre premier, choisissons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_l$ de $\mathbb{Q}_l$ et notons (à la suite de [HT, page 6]) $r_l$ la correspondance de Langlands locale qui associe à une classe d'isomorphisme de représentations complexes lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_3(E_w)$ une classe d'isomorphisme de représentations continues de dimension 3 de $\Gamma_{E_w}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$.

Enfin, pour $r$ une représentation d'un groupe $G$, nous notons dans cet article $r_{|H}$ la restriction de $r$ à un sous-groupe $H$ de $G$ et $r^{\mathrm{ss}}_{|H}$ la semi-simplification de cette restriction.

**Théorème 1** (Blasius-Rogawski[1]). *Soit $\pi$ une représentation automorphe de $G$ dont le changement de base $\pi_E$ est cuspidal. Il existe un corps de nombres $L$, et pour toute place finie $\mu$ de $L$ une représentation continue, absolument irréductible, $\rho_\mu\colon \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(L_\mu)$ telle que pour toute place finie $v$ de $F$ première à $N(\mu)\mathrm{Disc}(E/\mathbb{Q})$ telle que $\pi_v$ est non ramifiée, et pour toute place $w$ de $E$ divisant $v$, on ait*

$$(\rho_\mu)^{\mathrm{ss}}_{|D_w} \simeq r_l((\pi_E)_w).$$

*De plus, soit $\pi_E$ est l'induite automorphe d'un caractère de Hecke $\Psi$ d'une extension cubique $E'$ de $E$, soit les représentations $\rho_\mu$ sont fortement absolument irréductibles, i.e. leur restriction à tout sous-groupe ouvert de* $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ *est absolument irréductible.*

Si $L$ est un corps de nombres satisfaisant la conclusion du théorème 1, on dira que $L$ est un *corps de définition* de $\pi$. Tout corps de nombres contenant $L$ est alors aussi un corps de définition de $\pi$.

Les $\rho_\mu$ forment donc un système de représentations compatibles de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ à coefficients dans $L$. Mais le théorème précédent ne décrit les représentations $\rho_\mu$ qu'aux bonnes places $w$ de $E$. L'objectif de cet article est d'étendre cette description aux autres places. Nous y parvenons, mais seulement pour un ensemble de densité 1 de places $\mu$, et à semi-simplification près. Plus précisément, notre résultat principal est le suivant :

[1]Voir [BR] théorème 1.9.1 (a) et théorème 2.2.1.

**Théorème 2.** *Soit $\pi$ une représentation automorphe de $G$ dont le changement de base $\pi_E$ est cuspidal, et $L$ un corps de définition de $\pi$. Il existe un ensemble $S$ de densité* 1 *de nombres premiers tel que pour toute place $\mu$ de $L$ divisant $l \in S$, et pour toute place finie $w$ de $E$ ne divisant pas $l$, on ait*

$$(\rho_\mu)^{\mathrm{ss}}_{|D_w} \simeq r_l((\pi_E)_w)^{\mathrm{ss}}.$$

Remarquons que si $\pi_E$ est une induite automorphe d'un caractère de Hecke $\Psi$, le théorème 2 découle aisément des propriétés de compatibilité locale/globale de l'induction automorphe (cf. [AC]) et du théorème de multiplicité un forte pour $\mathrm{GL}_3$. Pour prouver le théorème 2, on peut donc supposer, et l'on supposera par la suite, que les $\rho_\mu$ sont fortement absolument irréductibles.

Le résultat suivant se déduit aisément du théorème 2 :

**Corollaire 1.** 1) *Si $\pi$ est une représentation automorphe de $G$ dont le changement de base $\pi_E$ est cuspidal, alors $\pi_E$ est tempérée en toute place $w$ de $E$.*

2) *Si $\pi$ est une représentation automorphe de $G$ dont le changement de base $\pi_E$ est cuspidal, alors $\pi$ est tempérée en toute place $v$ de $F$.*

3) *Si $\pi$ est une représentation automorphe auto-duale de* $\mathrm{GL}_3(F)$ *($F$ un corps totalement réel), tels que $\pi_\infty$ est discrète à poids distincts pour toute place réelle $\infty$ de $F$, alors $\pi$ vérifie la conjecture de Ramanujan.*

*Démonstration.* Le premier point se prouve à partir du théorème 2 exactement comme le théorème VIII.1.11 de [HT]. Le second résulte du premier. Pour le troisième, pour toute place finie $v$ de $F$, on peut choisir un corps CM $E/F$ tel que le changement de base $\pi_E$ est cuspidal et $v$ décomposé dans $E$. Les hypothèses faites sur $\pi$ assurent alors que $\pi_E$ provient par changement de base d'une représentation automorphe $\pi'$ du groupe unitaire $G$ attaché à $E/F$. Le fait que $\pi_v$ est tempérée résulte alors de 1). □

**1.2. Méthode.** La preuve du théorème 2 s'appuie sur le résultat essentiel suivant, dû à Harris et Taylor :

**Théorème 3** (Harris-Taylor). *Soit $\pi$ une représentation automorphe de $G$ dont le changement de base $\pi_E$ est cuspidal, et $L$ un corps de définition de* $\Pi$. *On suppose que $(\pi_E)_w$ est de carré intégrable pour au moins une place finie $w$ de $E$. Alors pour toute place $\mu$ de $L$ (de caractéristique résiduelle $l$), et pour toute place finie $w$ de $E$ ne divisant pas $l$, on a*

$$(\rho_\mu)^{\mathrm{ss}}_{|D_w} \simeq r_l((\pi_E)_w)^{\mathrm{ss}}.$$

L'objet du théorème 2 est donc d'enlever l'hypothèse que $\pi_E$ est de carré intégrable au théorème 3. Pour cela, on prouve d'abord deux propositions qui sont des cas particuliers du théorème 2 :

**Proposition 1.** *Soit $\pi$ une représentation automorphe de $G$ dont le changement de base $\pi_E$ est cuspidal, et $L$ un corps de définition de $\pi$. Il existe un ensemble $S$ de densité 1 de nombres premiers tel que pour toute place $\mu$ de $L$ divisant $l \in S$, et pour toute place finie $w$ de $E$ ne divisant pas $l$, on ait*

$$(\rho_\mu)^{\mathrm{ss}}_{|I_w} \simeq r_l((\pi_E)_w)^{\mathrm{ss}}_{|I_w},$$

*où $I_w \subset W_w$ est le sous-groupe d'inertie.*

On note $G_v$ le groupe $G(F_v)$, et $B_v$ un sous-groupe d'Iwahori de $G_v$.

**Proposition 2.** *Soit $\pi$ une représentation automorphe de $G$ dont le changement de base $\pi_E$ est cuspidal, et $L$ un corps de définition de $\pi$. Il existe un ensemble $S$ de densité 1 de nombre premiers tel que pour toute place $\mu$ de $L$ dont la caractéristique résiduelle $l$ appartient à $S$, et pour toute place finie $v$ de $F$ ne divisant pas $l$, si $\pi_v^{B_v} \neq 0$, on ait, pour $w$ place de $E$ au-dessus de $v$,*

$$(\rho_\mu)^{\mathrm{ss}}_{|D_w} \simeq r_l((\pi_E)_w)^{\mathrm{ss}}.$$

Pour prouver les propositions 1 et 2, l'idée est, en première approximation, de se ramener au théorème 3, appliqué à une représentation automorphe $\pi_n$ qui en vérifie l'hypothèse (de carré intégrable en une place) et qui est congrue à $\pi$ modulo $\mu^n$, pour $n = 1, 2, \dots$, la représentation $\pi_n$ étant obtenue en appliquant le théorème d'augmentation du niveau de [BG] à $\pi$ en une place inerte auxiliaire $v_0$. Cette méthode consistant à utiliser des augmentations du niveau pour se ramener au cas où une hypothèse technique est satisfaite a d'ailleurs déjà été utilisée dans la thèse de Taylor ([Taylor]), dans un cadre et un but différents (il s'agissait de montrer l'existence de représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires de Hilbert)

Cependant on bute ici sur deux difficultés : la première est qu'en appliquant un théorème d'augmentation du niveau à $\pi$ modulo $\mu^n$ avec $n > 1$, on n'obtient pas, de représentations automorphes $\pi_n$ mais seulement des formes automorphes $f_n$ qu'on ne peut supposer propres pour les opérateurs de Hecke. On contourne ce problème en imposant à $f_n$ d'apparaître dans un espace de formes automorphes admettant un type de Bushnell-Kutzko adéquatement choisi (pour prouver la proposition 1) ou d'être propre modulo $\mu^n$ pour un caractère adéquat du centre de l'algèbre de Hecke-Iwahori (pour prouver la proposition 2).

La seconde difficulté consiste à montrer l'existence de bonnes places inertes auxiliaires : on ne peut pour cela utiliser le théorème 2 de [BG], qui montre l'existence de places auxiliaires $v_0$, mais telles que $\mu$ est non normale pour $v_0$ (voir 2.3.3), ce qui empêche de montrer que la forme obtenue $f_n$ vérifie les hypothèses du théorème 3. On utilise à la place un résultat récent de Larsen sur l'image des représentations galoisiennes dans un système compatible ([La]), qui combiné avec un résultat de

Steinberg, permet de montrer l'existence de bonnes places inertes $v_0$, telles que $\mu$ est normale pour $v_0$ (quoique non banale – voir 2.3.3), où augmenter le niveau, à condition d'exclure un ensemble de mesure nulle de nombres premiers $l$.

Enfin, pour prouver le théorème 2, on utilise un changement de base non galoisien pour ramener le calcul de la trace d'un élément de $D_w - I_w$ dans le cas général à la proposition 2, ce qui, combiné avec la proposition 1 (déterminant la trace des actions des éléments de $I_w$) permet de conclure.

## 2. Notations et rappels

**2.1. Notations.** On garde les notations de l'introduction, $E/F$ est une extension CM, $c$ l'élément non trivial de $\mathrm{Gal}(E/F)$. On choisit un relevé $\gamma$ de $c$ dans $\Gamma_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, tel que $\gamma^2 = 1$. On note $\Gamma_E$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$, et pour $\Sigma$ un ensemble de places de $E$, $\Gamma_E^{\Sigma}$ le groupe de Galois de la plus grande extension de $E$ dans $\overline{E}$ non ramifiée hors $\Sigma$.

Soit $G$ le groupe unitaire défini dans l'introduction. On notera $G_v$ le groupe $G(F_v)$. On notera $q_v$ le cardinal résiduel de $F_v$, et $\varpi_v$ une uniformisant de $F_v$

### 2.2. Le changement de base de Rogawski

**2.2.1. Changement de base global.** Rogawski définit une partition des représentations automorphes de $G$ en $A$-paquets globaux, et pour chaque $A$-paquet $\Pi$, son changement de base $\pi_E$ qui est une représentation automorphe de $G_E$. On peut donc définir sans ambiguïté le *changement de base d'une représentation automorphe* $\pi$ de $E$ comme le changement de base du $A$-paquet auquel elle appartient.

**2.2.2. Changement de base local.** Soit $v$ une place finie de $F$, $G_v = G(F_v)$. Rogawski définit, suivant les conjectures d'Arthur, des parties finies de l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations lisses complexes irréductibles de $G_v$ qu'il appelle $A$-paquet locaux. Si $v$ est décomposée, tous les $A$-paquets sont des singletons.

Soit $w$ une place de $E$ au-dessus de $F$. Si $\Pi_v$ est un $A$-paquet local, on peut définir son changement de base (local) à $E_w$ qui est une représentation lisse complexe irréductible de $\mathrm{GL}_3(E_w)$. Les $A$-paquets globaux sont produits tensoriels de $A$-paquets locaux et le changement de base global est compatible au changement de base local.

Une représentation complexe lisse irréductible de $G_v$ peut appartenir à plusieurs $A$-paquets locaux. Cependant :

**Lemme 2.2.3.** *Si deux $A$-paquets $\Pi_v$ et $\Pi'_v$ contiennent une représentation en commun, leurs changements de bases sont des sous-quotients d'une même induite parabolique. En particulier, les images de ces deux changements de base par la correspondance de Langlands ont même semi-simplification.*

*De plus, si $\Pi_v$ et $\Pi'_v$ contiennent deux représentations $\pi_v$ et $\pi'_v$ ayant même support supercuspidal à équivalence inertielle près, il en va de même de leur changement de base.*

*Démonstration.* Il n'y a rien à prouver pour $v$ décomposée. On suppose $v$ inerte ou ramifiée.

D'après [Rog3], les seules représentations appartenant à plusieurs $A$-paquets sont celles notées $\pi^s(\chi)$ *loc. cit.*, page 199, pour $\chi$ un caractère de $\mathrm{U}(1)$. Ces représentations appartiennent exactement à deux $A$-paquets, $\{\pi^s(\xi), \pi^2(\xi)\}$ (qui est tempérée), et $\{\pi^s(\xi), \pi^n(\xi)\}$ (qui ne l'est pas). Les changements de base de ces deux $A$-paquets sont respectivement la sous-représentation irréductible et la représentation quotient de l'induite du Borel du caractère $(\xi_E, \xi_E|\ |, 1)$.

Le "en particulier" résulte par exemple de [He].

Le "de plus" résulte de [Rog3, proposition 13.2.2]. □

Si $\pi_v$ est la composante locale d'une représentation automorphe, elle appartient à au moins un $A$-paquet local. La notation $r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}$ est donc définie sans ambiguïté par $r_l((\Pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}$, où $\Pi_v$ est n'importe quel paquet local contenant $\pi_v$.

## 2.3. Rappels locaux

**2.3.1. Algèbres de Hecke non ramifiées.** Si $v$ est inerte ou ramifiée, $G_v$ est un groupe unitaire quasi-déployé de rang un. Si $v$ est inerte, $G_v$ est de plus non ramifié. On dispose alors d'une classe de conjugaison privilégiée de sous-groupes compacts maximaux de $G_v$, la classe de conjugaison hyperspéciale. Si $K_v$ appartient à cette place l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G_v, K_v)$ des fonctions à support compact, $K_v$-invariantes à gauche et à droite, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, munies de la convolution est commutative, isomorphe à $\mathbb{Z}[T_v]$. Ici, $T_v$ est l'opérateur de Hecke standard, défini comme la fonction caractéristique de la double classe de la matrice diagonale $(\varpi_v, 1, \varpi_v^{-1})$. On le notera aussi parfois $T_w$, où $w$ est la place de $E$ au-dessus de $v$

Si $v$ est une place décomposée, le choix d'une place $w$ de $E$ définit un isomorphisme $G_v \simeq \mathrm{GL}_3(F_v) \simeq \mathrm{GL}_3(E_w)$, canonique à automorphismes intérieurs près. Si $K_v$ est le compact maximal correspondant à $\mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_v)$ via cet isomorphisme, on notera $T_w$ l'opérateur de Hecke dans $\mathcal{H}(G_v, K_v)$ donnée par la fonction caractéristique de la double classe de la matrice diagonale $(\varpi_v, 1, 1)$.

**2.3.2.** On peut reformuler le théorème 1 en termes des opérateurs de Hecke ainsi définis. En gardant les notations de ce théorème, pour toute place $v$ telle que $\pi_v$ est non ramifiée, $w$ place de $E$ au-dessus de $v$, si $\lambda_w$ est la valeur propre par laquelle agit l'opérateur $T_w$ sur la droite $\pi_v^{K_v}$, alors

$$\lambda_w = \mathrm{tr}\rho_\mu(\mathrm{Frob}_w).$$

**2.3.3. Caractéristiques normales et banales.** Si $v$ est inerte, on dit que $l$ est une caractéristique *normale*[2] (resp. *banale*) pour $G_v$ ou pour $v$ si $l$ ne divise pas $q_v(q_v^3+1)$ (resp. $q_v(q_v-1)(q_v^3+1)$).

**2.3.4. Centre de Bernstein.** Nous rappelons un fragment de la théorie du centre de Bernstein. Soit $B_v$ un sous-groupe d'Iwahori de $G_v$, $K_v$ un compact maximal. On note $\mathcal{Z}(G_v, B_v)$ le centre de l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}(G_v, B_v)$. Alors

**Lemme 2.3.5.** *Il existe un isomorphsime d'algèbre*

$$b\colon\ \mathcal{Z}(G_v, B_v)\otimes\mathbb{C}\simeq\mathcal{H}(G_v, K_v)\otimes\mathbb{C},$$

*tel que, pour toute représentation $\pi_v$ lisse irréductible de $G_v$ telle que $\pi_v^{B_v}\neq 0$,*

1) *$\mathcal{Z}(G_v, B_v)$ agit sur $\pi_v^{B_v}$ par un caractère $\psi$, et $\mathcal{H}(G_v, K_v)$ agit sur $\pi_v^{K_v}$ (éventuellement nul) par le caractère $\psi\circ b^{-1}$.*
2) *Il existe une unique représentation $\pi'$ avec $\pi'_{K_v}\neq 0$, et telle que $\mathcal{H}_{G_v,K_v}$ agissent sur $\pi_v^{K_v}$ par $\psi\circ b^{-1}$. De plus $\pi$ et $\pi'$ apparaissent dans une même induite non ramifiée.*
3) *La représentation galoisienne $r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}$ est non ramifiée et*

$$\operatorname{tr} r_l((\pi_v)_{E_w})(\mathrm{Frob}_w)=\psi\circ b^{-1}(T_w).$$

*Démonstration.* L'existence de l'isomorphisme $b$ vérifiant 1) résulte de [B].

D'après la théorie classique des représentations non ramifiées, toute représentation lisse irréductible $\pi_v$ apparaît comme facteur de Jordan-Hölder d'une induite parabolique indécomposable $I$ d'un caractère non ramifié, qui contient un unique facteur non ramifié $\pi'_v$. La représentation $I$ est de plus engendrée par ses $B^v$-invariants. D'après l'équivalence de catégorie bien connue de Borel ([B]), $I^{B_v}$ est un module indécomposable sur $\mathcal{H}(G_v, B_v)$. Le centre $\mathcal{Z}(G_v, B_v)$ agit donc par un caractère sur $I^{B_v}$ donc par le même caractère sur $\pi^{B_v}$ et sur $\pi'^{B_v}$, et le point 2) en résulte.

Enfin 3) résulte de [He]. □

[2]Note sur la terminologie ajoutée aux épreuves : cette terminologie est celle introduite dans ma thèse. Clozel, Harris, et Taylor lui préfère celle de *quasi-banale* dans un preprint récent.

## 3. Existence de places inertes et normales où augmenter le niveau

### 3.1. Énoncé

**3.1.1.** Dans toute cette partie, $\pi$ est une représentation automorphe pour $G$ dont le changement de base à $E$, est cuspidal, $w$ est une place de $E$ et $v$ est la place de $F$ divisant $E$. On choisit un corps de définition $L$ de $\pi$, et pour $\mu$ place finie de $L$, on note $\rho_\mu$ la représentation galoisienne associée, qu'on suppose fortement absolument irréductible.

Le but de cette sous-partie est de prouver le résultat suivant :

**Proposition 3.1.2.** *Il existe un ensemble $S$ de nombre premiers, de densité 1, tel que pour toute place finie $\mu$ de $L$ divisant une place de $S$, et pour tout entier $n \geq 1$, il existe une infinité de places $v_0$ de $F$, inertes dans $E$, telles que $\pi_{v_0}$ est non ramifiée, et telles que la valeur propre $\lambda = \lambda_{v_0}$ de l'opérateur de Hecke standard $T_{v_0}$ sur $\pi_{v_0}$, et le cardinal résiduel $q = q_{v_0}$ de $F_{v_0}$ vérifient*

$$\lambda \equiv q(q^3+1) \pmod{\mu^n}, \tag{1}$$
$$q \equiv 1 \pmod{\mu^n}. \tag{2}$$

### 3.2. Réduction à une propriété de l'image de $\rho_\mu$

**3.2.1.** D'après [BG, 6.2.8], il existe une base de $L_\mu^3$ telle que dans cette base, la représentation $\rho_\mu$ définisse un morphisme $\rho_\mu\colon \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\mu)$, vérifiant pour tout $g \in G_E$

$$\rho_\mu(\gamma g \gamma^{-1}) = A\, {}^t\rho_\mu(g)^{-1} A^{-1}, \tag{3}$$

où $A \in \mathrm{GL}_3(\mathcal{O}_\mu)$. Comme $\gamma$ est une involution, on voit en appliquant deux fois (3) que $A\,{}^tA^{-1}$ est dans le commutant de $\rho_\mu$, donc est un scalaire $\alpha$. D'où ${}^tA = \alpha A$, ce qui implique $\alpha = \pm 1$, et le cas antisymétrique $\alpha = -1$ est impossible car $A$ est inversible. On a donc

$${}^tA = A. \tag{4}$$

**3.2.2.** Notons $\rho_n$ la réduction de $\rho_\mu$ modulo $\mu^n$, et $\omega_{l^n}\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to (\mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})^*$ le caractère cyclotomique. La proposition 3.1.2 se réduit à la proposition suivante :

**Proposition 3.2.3.** *Il existe $g \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ tel que $\rho_n(g) = a\mathrm{Id}$ avec $a \in (\mathcal{O}/\mu^n)^*$ et $\omega_{l^n}(g) = -1$.*

**3.2.4.** Prouvons que la proposition 3.2.3 implique la proposition 3.1.2. Soit $\tilde{G}$ le produit semi-direct

$$\mathrm{GL}_3(\mathcal{O}/\mu^n) \ltimes C,$$

où $C$ est le groupe à deux éléments $\{1, c\}$ et $c$ agit sur $G$ par $g \mapsto {}^t g^{-1}$. Les relations (3), (4) permettent de prolonger $\rho_n$ en un morphisme, noté $\tilde{\rho}_n$ : $\mathrm{Gal}(\overline{E}/F) \to \tilde{G}$ par

$$\tilde{\rho}_n(\sigma) = \rho(\sigma) \ltimes 1, \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/F), \tag{5}$$
$$\tilde{\rho}_n(\gamma) = A \ltimes c. \tag{6}$$

Si $g$ est comme dans l'énoncé de la proposition, on a $\tilde{\rho}_n(g\gamma) = (aA) \ltimes c$ et $\omega_{l^n}(g\gamma) = 1$. Il existe donc une infinité de places $v_0$ de $F$ telles que $\tilde{\rho}_n(\mathrm{Frob}_{v_0}) = (aA) \ltimes c$ et $\omega_{l^n}(\mathrm{Frob}_{v_0}) = 1$. Ces places ne peuvent être décomposées, une infinité d'entre elles sont donc inertes. Pour $v_0$ une telle place, on a $(q_{v_0} =)q \equiv 1 \pmod{\mu^n}$, et si $w_0$ est la place de $E$ au-dessus de $v_0$,

$$\rho_n(\mathrm{Frob}_{w_0}) = \tilde{\rho}_n(\mathrm{Frob}_{v_0})^2 = (aA)\,{}^t(aA)^{-1} = \mathrm{Id}$$

(cf. [BG, 6.2.8]), ce qui implique que $\lambda \equiv q(q^3+1) \pmod{\mu^n}$ d'après la transformation de Satake, cf. [BG, 3.7.1]

### 3.3. Preuve de la proposition 3.2.3

**3.3.1.** Pour tout nombre premier $l$, et toute place $\mu$ de $L$ au-dessus de $l$, $\rho_\mu$ est une représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ de dimension 3 sur $L_\mu$ qu'on peut également voir comme une représentation de dimension $3[L_\mu : \mathbb{Q}_l]$ sur $\mathbb{Q}_l$. Posons

$$\rho_l = \oplus_{\mu | l} \rho_\mu$$

qui est une représentation de dimension

$$3 \sum_{\mu | l} [L_\mu : \mathbb{Q}_l] = 3[L : \mathbb{Q}].$$

Les $\rho_l$ forment un système compatible de représentations $l$-adiques.

Notons $\Gamma_l$ l'image de $\rho_l$ (dans $\mathrm{GL}_{3[L:\mathbb{Q}]}(\mathbb{Q}_l)$) et $G_l$ son adhérence Zariski. Comme les représentations $\rho_\mu$ (sur $L_\mu$) sont irréductibles, elles sont semi-simples en tant que représentation sur $\mathbb{Q}_l$, ainsi que les $\rho_l$. Les groupes $G_l$ sont donc réductifs. On note $G_l^0$ la composante neutre de $G_l$, auquel on peut appliquer un résultat de Serre (cf. [Serre, théorème, page 15]) :

**Lemme 3.3.2.** *Il existe une extension finie $E'$ de $E$, tel que pour tout $l$,*

$$\rho_l(\mathrm{Gal}(\overline{E}/E')) = \Gamma_l \cap G_l^0(\mathbb{Q}_l).$$

Quitte à remplacer $E$ par $E'$, on peut donc supposer que $G_l = G_l^0$. Comme $\rho_\mu$ est fortement absolument irréductible, Ce changement de $E$ en $E'$ n'affecte pas l'hypothèse que $\rho_\mu$ est absolument irréductible.

**3.3.3.** On note, suivant [La], $G_l^{\mathrm{ad}}$ le groupe adjoint de $G_l$ et $G_l^{\mathrm{sc}}$ le revêtement universel de $G_l^{\mathrm{ad}}$. Ce sont des groupes réductifs connexes, et $G_l^{\mathrm{sc}}$ et $G_l^{\mathrm{ad}}$ sont même semi-simples.

D'après [LaPi], il existe un ensemble de densité 1 de nombre premiers, tel que pour tout nombre premier $l$ de cet ensemble, le groupe réductif $G_l^{\mathrm{sc}}$ est non ramifié (cf. [Ti]). On peut donc parler de sous-groupes compacts maximaux hyperspéciaux de $G_l^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l)$ pour $l \notin S$ (cf. [Ti]). Notons enfin $\Gamma_l^{\mathrm{ad}}$ l'image de $\Gamma_l$ dans $G_l^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_l)$ par l'application canonique, et $\Gamma_l^{\mathrm{sc}}$ l'image réciproque de $\Gamma_l^{\mathrm{ad}}$ dans $G_l^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l)$.

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_l \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Gamma_l^{\mathrm{ad}} \arrow[dr] & & \Gamma_l^{\mathrm{sc}} \arrow[ll] \arrow[dr] & \\
& G_l(\mathbb{Q}_l) \arrow[rr] & & G_l^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_l) & & G_l^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l) \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Le théorème suivant est le résultat principal de [La].

**Théorème 3.3.4** (Larsen). *Il existe un ensemble de densité* 1 *de nombres premiers tel que pour tout $l$ de cet ensemble, $\Gamma_l^{\mathrm{sc}}$ est un sous-groupe compact maximal hyperspécial de $G_l^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l)$.*

**Corollaire 3.3.5.** *Il existe un ensemble $S$ de densité* 1 *de nombres premiers tel que pour tout $l$ de cet ensemble, $\Gamma_l^{\mathrm{sc}}$ n'a pas de quotient d'ordre* 2.

*Démonstration.* On prend pour ensemble $S$ de nombre premiers celui du théorème précédent privé de 2. Pour $l$ en dehors de cet ensemble, $G_l^{\mathrm{sc}}$ a un (unique) modèle à fibres semi-simples connexes sur $\mathbb{Z}_l$ tel que $\Gamma_l^{\mathrm{sc}} = G_l^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Z}_l)$. Comme le noyau de la réduction, surjective d'après le lemme de Hensel, $G_l^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Z}_l) \to G_l^{\mathrm{sc}}(\mathbb{F}_l)$ est un pro-$l$-groupe avec $l \neq 2$, il suffit de voir que $G_l^{\mathrm{sc}}(\mathbb{F}_l)$ n'a pas de quotient d'ordre 2. Or d'après un théorème de Steinberg ([St], voir aussi [PR, page 406]), comme le $\mathbb{F}_l$-groupe algébrique $G_l^{\mathrm{sc}}$ est semi-simple connexe et simplement connexe, le groupe de ses points rationnels $G_l^{\mathrm{sc}}(\mathbb{F}_l)$ est d'abélianisé trivial. □

Dorénavant, $S$ désigne un ensemble de nombres premiers comme dans le corollaire ci-dessus.

**3.3.6.** Notons maintenant $\Gamma_\mu$ l'image de $\rho_\mu$ dans $\mathrm{GL}_3(L_\mu)$, et $G_\mu$ l'adhérence Zarsiki de $\Gamma_\mu$ dans $\mathrm{GL}_3(L_\mu)$ considéré comme groupe algébrique sur $\mathbb{Q}_l$, i.e. dans $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_l}^{L_\mu}\mathrm{GL}_3$.

La projection $p\colon \rho_l \to \rho_\mu$ définit un morphisme surjectif $p$ de $\Gamma_l$ sur $\Gamma_\mu$ qui se prolonge en un morphisme surjectif (noté aussi $p$) de $\mathbb{Q}_l$-groupes algébriques $G_l \to G_\mu$. Le groupe $G_\mu$ est donc connexe. On définit $G_\mu^{\mathrm{ad}}$ comme le groupe adjoint de $G_\mu$, et $G_\mu^{\mathrm{sc}}$ comme le revêtement universel de $G_\mu^{\mathrm{ad}}$. On définit $\Gamma_\mu^{\mathrm{ad}}$ comme l'image de $\Gamma_\mu$, et $\Gamma_\mu^{\mathrm{sc}}$ comme l'image réciproque de $\Gamma_\mu^{\mathrm{ad}}$.

On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_l \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \Gamma_l^{\mathrm{ad}} \arrow[dr] \arrow[dd] & & \Gamma_l^{\mathrm{sc}} \arrow[ll] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& G_l(\mathbb{Q}_l) \arrow[rr] \arrow[dd] & & G_l^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_l) \arrow[dd] & & G_l^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l) \arrow[ll] \arrow[dd] \\
\Gamma_\mu \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Gamma_\mu^{\mathrm{ad}} \arrow[dr] & & \Gamma_\mu^{\mathrm{sc}} \arrow[ll, "\tau"'] \arrow[dr] & \\
& G_\mu(\mathbb{Q}_l) \arrow[rr] & & G_\mu^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_l) & & G_\mu^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l) \arrow[ll, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales se déduisent de $p$ par fonctorialité et sont toutes surjectives par construction. On note $\tau$ le morphisme naturel $G_\mu^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l) \to G_\mu^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_l)$ ainsi que sa restriction à $\Gamma_\mu^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l)$.

**Lemme 3.3.7.** *Si $\mu | l$ et $l \in S$, $\Gamma_\mu^{\mathrm{sc}}$ n'a pas de quotient d'ordre* 2.

*Démonstration.* Comme c'est un quotient de $\Gamma_l^{\mathrm{sc}}$, cela résulte du corollaire 3.3.5. □

**Lemme 3.3.8.** *Le groupe $G_\mu^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_l)/\tau(G_\mu^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l))$ est abélien de* 3*-torsion.*

*Démonstration.* Considérons $G_\mu$ comme un sous-groupe algébrique de

$$\mathrm{Res}_{L_\mu/\mathbb{Q}_l}\mathrm{GL}_3.$$

Le groupe $G_\mu \times \overline{\mathbb{Q}}_l$ est donc un sous-groupe algébrique de

$$(\mathrm{Res}_{L_\mu/\mathbb{Q}_l}\mathrm{GL}_3) \times \overline{\mathbb{Q}}_l = \prod_W \mathrm{GL}_3$$

où $W$ est l'ensemble des plongements de $L_\mu$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$. On en déduit que le groupe $G^{\mathrm{ad}} \times \overline{\mathbb{Q}}_l$ est un sous-groupe de $\prod_W \mathrm{SL}_3$. Soit $Z$ son centre : comme $\rho_\mu$ est absolument irréductible, c'est un sous-groupe du centre de $\prod_W \mathrm{SL}_3$, et il est donc de 3-torsion.

Considérons la suite exacte courte de groupes munis d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_l/L_\mu)$ :

$$0 \to Z(\overline{\mathbb{Q}}_l) \to G_\mu^{\mathrm{sc}}(\overline{\mathbb{Q}}_l) \xrightarrow{\tau} G_\mu^{\mathrm{ad}}(\overline{\mathbb{Q}}_l) \to 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie associée identifie $G_\mu^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_l)/\tau(G_\mu^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l))$ à un sous-groupe de $H^1(L_\mu, Z(\overline{\mathbb{Q}}_l))$ qui est abélien de 3-torsion. □

**Lemme 3.3.9.** *Si $\mu | l$ et $l \in S$, $\Gamma_\mu^{\mathrm{ad}}$ n'a pas de quotient d'ordre* 2.

*Démonstration.* Le groupe $G_\mu^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q}_l)/\tau(G_\mu^{\mathrm{sc}}(\mathbb{Q}_l))$ est abélien de 3-torsion, d'après le lemme précédent. Il en va donc de même du groupe $\Gamma_\mu^{\mathrm{ad}}/\tau(\Gamma_\mu^{\mathrm{sc}})$, qui n'a donc pas de quotient d'ordre 2. D'après le lemme 3.3.7, $\tau(\Gamma_\mu^{\mathrm{sc}})$ n'a pas non plus de quotient d'ordre 2. Il en va donc de même de $\Gamma_\mu^{\mathrm{ad}}$. □

**Lemme 3.3.10.** *Le centre $Z(\Gamma_\mu)$ est composé d'homothéties de $L_\mu^*$, et $\Gamma_\mu/Z(\Gamma_\mu)$ n'a pas de quotient d'ordre* 2.

*Démonstration.* La première assertion résulte du lemme de Schur, qui montre aussi que $Z(\Gamma_\mu) = Z(G_\mu(\mathbb{Q}_l)) \cap \Gamma_\mu$ et la seconde résulte alors du lemme précédent, car $\Gamma_\mu/Z(\Gamma_\mu) = \Gamma_\mu/(Z(G_\mu(\mathbb{Q}_l)) \cap \Gamma_\mu) = \Gamma_\mu^{\mathrm{ad}}$. □

**3.3.11. Fin de la preuve de la proposition 3.2.3.** Considérons le caractère $\omega_{l^n}^{(l^n-1)/2)}$. Son image est $\{\pm 1\}$. D'après le lemme de Goursat et le lemme précédent, l'application $\rho_\mu \times \omega_{l^n}^{(l^n-1)/2)} : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \Gamma_\mu/Z(\Gamma_\mu)$ est surjective. Il y a donc un $g' \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ dont l'image est $(1, -1)$. Posons $g = g'^{(l^n-1)/2}$. Alors $\rho_\mu(g) \in Z(\Gamma_\mu)$ donc est un scalaire, et il en va de même de sa réduction $\rho_n(g)$. De plus $\omega_{l^n}(g) = -1$, ce qui prouve la proposition.

## 4. Preuve de la proposition 1

On reprend les mêmes notations que dans la partie 3.1.1.

### 4.1. Choix d'un niveau et d'un type pour la preuve

**Lemme 4.1.1.** *Il existe un sous-groupe compact ouvert $K_v$ de $G_v$ et une représentation $J_v$ de $K_v$ tel que*

a. $\mathrm{Hom}_{K_v}(J_v, \pi_v) \neq 0$.

b. *Pour $\tau$ une représentation lisse irréductible de $G_v$, si* $\mathrm{Hom}_{K_v}(J_v, \pi_v)$ *on a pour toute place $\mu$ de $L$*
$$r_l(\tau_{E_w})^{\mathrm{ss}}_{|I_w} \simeq r_l(\pi_{E_w})^{\mathrm{ss}}_{|I_w}.$$

*Démonstration.* D'après [Bus, page 772] si $v$ est décomposé, ou le théorème principal de [Bl] si $v$ est inerte ou ramifiée, il existe un type $(K_v, J_v)$, tel que pour toute représentation lisse irréductible $\tau$ de $G_v$, $\mathrm{Hom}_{K_v}(J_v, \tau) \neq 0$ si et seulement si $\tau$ et $\pi_v$ ont même support supercuspidal à équivalence inertielle près. Pour un tel type, la propriété a. est évidemment satisfaite.

Si $v$ est décomposé, on a $G_v = \mathrm{GL}_3(E_w)$ ; soit $\{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ le support supercuspidal de $\pi$ (on a $1 \leq k \leq 3$, et les $\pi_i$ sont des représentations supercuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}_{n_i}(E_w)$, avec $\sum_{i=1}^k n_i = 3$). Si $\mathrm{Hom}_{K_v}(J_v, \tau) \neq 0$, le support supercuspidal de $\tau$ est donc $\{\pi_1 \otimes \chi_1 \circ \det, \ldots, \pi_k \otimes \chi_k \circ \det\}$, où les $\chi_i$ sont des caractères non ramifiés de $E_w^*$. Les propriétés de compatibilité à l'induction parabolique ([HT, propriété 2, page 6]) et au twist par un caractère ([HT, propriété 3, page 6]) de $r_l$, et le fait que deux constituants d'une même induite parabolique aient, à semi-simplification près, la même image par $r_l$ (cf. [He]) implique que

$$r_l(\pi_v)^{\mathrm{ss}} \simeq \oplus_{i=1}^k r_l(\pi_i), \tag{7}$$

$$r_l(\tau)^{\mathrm{ss}} \simeq \oplus_{i=1}^k r_l(\pi_i) \otimes r_l(\chi_i), \tag{8}$$

ce qui implique $(r_l(\tau)^{\mathrm{ss}})_{|I_w} \simeq (r_l(\pi_v)^{\mathrm{ss}})_{|I_w}$. Comme la restriction à $I_w$ commute à la semi-simplification pour une représentation de $D_w$ (cela résulte de [Ta, 4.2.1]), on a donc

$$r_l(\tau)^{\mathrm{ss}}_{|I_w} \simeq r_l(\pi_v)^{\mathrm{ss}}_{|I_w}.$$

Supposons $v$ inerte ou ramifiée dans $E$. Soit $\tau$ tel que $\mathrm{Hom}_{K_v}(J_v, \tau) \neq 0$. Soit $\tau_{E_w}$ et $(\pi_v)_{E_w}$ les changements de base de n'importe quel $A$-paquet contenant $\tau$ et $\pi_v$. D'après le lemme 2.2.3, $\tau_{E_w}$ et $(\pi_v)_{E_w}$ ont même support supercuspidal à équivalence inertielle près. On est alors ramené au cas précédent. □

**4.1.2.** Soit $K_v$, $J_v$ comme dans le lemme. Soit $K^v = \prod_{v' \neq v} K_{v'}$ un sous-groupe compact ouvert de $\prod_{v' \neq v} G(F_{v'})$ tel que

$$\pi^{K^v} \neq 0. \tag{9}$$

Posons $K = K_v K^v$ et $J = J_v \otimes 1$.

Pour toute $\mathcal{O}_\mu$-algèbre $R$, on note $S_{K,J,\pi_\infty,R}$ le $R$-module (libre de rang fini) des formes automorphes de niveau $K$, type $J$ et même poids que $\pi$ qui sont définis sur $R$, défini en [BG, 5.2].

### 4.2. Formes anciennes et nouvelles

**4.2.1.** Soit $v_0$ une place inerte de $F$, distincte de $v$, et telle que $K_{v_0}$ est hyperspécial. On note $T = T_{v_0}$ l'opérateur de Hecke standard de $\mathcal{H}(G_{v_0}, K_{v_0})$ et $q$ le cardinal résiduel de $F_{v_0}$. Soit $B_{v_0}$ un sous-groupe d'Iwahori de $G_{v_0}$ contenant $K_{v_0}$ et soit $B := B_{v_0} K^{v_0}$ où $K^{v_0} := \prod_{v' \neq v_0} K_{v'}$.

On note $N_{B,J,\pi_\infty,R}$ et $O_{B,J,\pi_\infty,R}$ les $R$-modules (libres de rang finis) des formes nouvelles et anciennes (respectivement) en $v_0$ sur $R$ de niveau $B$, de type $J$ et de poids $\pi_\infty$, tels qu'ils sont définis en [BG, 5.3.6]. La formation de ces espaces commute à tout changement de base $R \to R'$.

**4.2.2.** On rappelle que si $\Sigma$ est l'ensemble fini des places $v'$ telles que $K_{v'}$ n'est pas hyperspécial, l'algèbre de Hecke commutative

$$\mathcal{H}^{\Sigma} = \prod_{v' \notin \Sigma} \mathcal{H}(G_{v'}, K_{v'})$$

agit par opérateurs $R$-linéaire sur les espaces $S_{K,J,\pi_\infty,R}$, $N_{B,J,\pi_\infty,R}$ et $O_{B,J,\pi_\infty,R}$, et ceci fontoriellement en $R$. (cf. [BG, 5.2.2 et 5.3.4]). Rappelons en particulier que l'action de $\mathcal{H}(G_{v_0}, K_{v_0}) = \mathbb{Z}[T]$ sur les espaces $N_{B,J,\pi_\infty,R}$ et $O_{B,J,\pi_\infty,R}$ est définie en identifiant $\mathcal{H}(G_{v_0}, K_{v_0})$ à une sous-algèbre de $\mathcal{H}(G_{v_0}, B_{v_0})$, l'opérateur $T$ étant identifié à l'opérateur $T_B$ défini en [BG, 3.3.2]. Aux autres places $v' \notin \Sigma$, l'action de $\mathcal{H}(G_{v'}, K_{v'})$ est l'action évidente.

Rappelons aussi ([BG, 5.1.3]) que si $R$ est une $L_\mu$-algèbre, les actions de $\mathcal{H}^\Sigma$ sur les espaces considérés sont semi-simples

**4.2.3.** Pour tout $\mathcal{O}_\mu$-algèbre $R$, notons $N^+_{B,J,\pi_\infty,R}$ (resp. $N^-_{B,J,\rho,R}$) le noyau $\mathrm{Ker}(T - q(q^3+1))$ (resp. $\mathrm{Ker}(T + (q^3+1))$) sur $N_{B,J,\rho,R}$.

**Lemme 4.2.4.** *Supposons que* $(q^3+1) \not\equiv 0 \pmod{\mu}$*. On a*

$$N_{B,J,\pi_\infty,R} = N^+_{B,J,\pi_\infty,R} \oplus N^-_{B,J,\pi_\infty,R}$$

*et pour tout morphisme* $R \to R'$ *de* $\mathcal{O}_\mu$*-algèbres on a*

$$N^\bullet_{B,J,\pi_\infty,R'} = N^\bullet_{B,J,\pi_\infty,R} \otimes_R R'$$

*pour* $\bullet \in \{+,-\}$.

*Démonstration.* Comme $q(q^3+1) \neq -(q^3+1) \pmod{\mu}$ par hypothèse, il suffit de montrer que l'opérateur $T$ (ou $T_B$) sur $N^{B,J,\pi_\infty,R}$ est annulé par le polynôme $(X - q(q^3+1))(X + (q^3+1))$. Par fonctorialité il suffit de le faire pour $R = \mathcal{O}_\mu$, et donc comme $N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu} \subset N_{B,J,\pi_\infty,\overline{\mathbb{Q}}_l}$ pour $R = \overline{\mathbb{Q}}_l \simeq \mathbb{C}$. Comme $T$ agit de manière semi-simple sur cet espace, il suffit de voir que pour $f \in N_{B,J,\pi_\infty,\mathbb{C}}$ propre pour $\mathcal{H}^\Sigma$, la valeur propre $\lambda$ de $T$ est $-(q^3+1)$ ou $q(q^3+1)$. Or d'après [BG, 6.1.2], à une telle forme nouvelle propre $f$ est attachée une représentation automorphe $\pi$, telle que $\pi_{v_0}$ est soit la Steinberg $St$, soit la représentation $\pi^s$ (voir [BG, 3.6.5]) et que $T$ agisse par $\lambda$ sur $\pi_{v_0}^{B_{v_0}}$. Le lemme résulte donc de [BG, 6.7.2] □

## 4.3. Augmentation du niveau

**4.3.1.** D'après le point a. du lemme 4.1.1 et (9), la représentation automorphe $\pi$ définit un élément de $S_{K,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$, propre pour $\mathcal{H}^\Sigma$ de caractère propre noté $\psi$ (cf. [BG, 6.7.1])

**Proposition 4.3.2.** *Pour tout entier $n \geq 1$, on peut choisir une place $v_0$ de $F$ comme en 4.2.1, et tel qu'il existe un vecteur non divisible $f \in N^+_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$, vérifiant*

$$Uf \equiv \psi(U)f \pmod{\mu^n},$$

*pour tout $U \in \mathcal{H}^\Sigma$.*

*Démonstration.* D'après la proposition 3.1.2, il existe une infinité de $v_0$ inertes telles que $q \equiv 1 \pmod{\mu}$ et $\psi(T) \equiv q(q^3+1) \mod \mu^n$. On en choisit une qui vérifie les conditions de 4.2.1, i.e. qui est distincte de $v$ et telle que $K_{v_0}$ est hyperspéciale. On peut alors appliquer le théorème d'augmentation du niveau en $v_0$ modulo $\mu^n$ de [BG] (théorème 1, page 2). Celui-ci implique l'existence d'une congruence non triviale modulo $\mu^n$ entre $O_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}(\psi)$ (l'espace propre de caractère propre $\psi$ pour $\mathcal{H}^\Sigma$ sur $O_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$) et $N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$ donc d'un $f$ non divisible dans $N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$ vérifiant, pour tout $U \in \mathcal{H}^\Sigma$

$$Uf \equiv \psi(U)f \pmod{\mu^n}. \tag{10}$$

Soit $P$ la projection de $N_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$ sur $N^+_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$ parallèlement à $N^-_{B,J,\pi_\infty,\mathcal{O}_\mu}$. La projection $P$ commute à $\mathcal{H}^\Sigma$ car c'est un polynôme en $T$. Donc $P(f)$ satisfait aussi la relation (10). Par ailleurs, la relation (10) donne en particulier $Tf \equiv q(q^3+1)f \pmod{\mu^n}$, si bien que $P(f) \equiv f \pmod{\mu^n}$, donc $P(f)$ est non divisible. Remplaçant $f$ par $P(f)$, la proposition est prouvée. □

Fixons dorénavant $n \geq 1$, et $v_0$ comme dans la proposition précédente.

Pour $R$ une $\mathcal{O}_\mu$-algèbre, notons $\mathfrak{T}_R$ la $R$-algèbre des endomorphsimes de $N^+_{B,J,\pi_\infty,R}$ engendrée par l'action de $\mathcal{H}^\Sigma$. C'est une $R$-algèbre commutative, semi-simple si $R$ est une $L_\mu$-algèbre, dont la formation commute à tout changement de base $R \to R'$ et on a un morphisme d'algèbres surjectif $\mathcal{H}^\Sigma \otimes R \to \mathfrak{T}_R$. La conclusion de la proposition précédente se reformule en

**Proposition 4.3.3.** *La réduction modulo $\mu^n$ du caractère $\psi$ de $\mathcal{H}_\Sigma$ se factorise en un caractère, noté $\psi_n$, de $\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu}$ à valeur dans $\mathcal{O}_\mu/\mu^n$.*

Par ailleurs, on a

**Proposition 4.3.4.** *Il existe un pseudo-caractère $\chi$ de* $\mathrm{Gal}(\bar{E}/E)$ *à valeur dans $\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu}$ tel que*

$$\chi(\mathrm{Frob}_{w'}) = T_{w'} \quad \textit{pour toute place } w' \textit{ divisant une place } v' \notin \Sigma, \tag{11}$$

$$\chi(g) = \mathrm{tr} r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(g) \quad \textit{pour tout } g \in I_w. \tag{12}$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer la proposition pour $\mathfrak{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_l} = \mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu} \otimes \overline{\mathbb{Q}}_l$ puisque $\overline{\mathbb{Q}}_l$ est plat sur $\mathcal{O}_\mu$. Mais $\mathfrak{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}$ est commutative semi-simple et de dimension finie, donc est isomorphe à un produit fini de copies de $\overline{\mathbb{Q}}_l$. Si $\theta$ désigne la projection de $\mathfrak{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}$ vers l'un de ces facteurs il suffit de prouver l'existence d'un pseudo-caractère $\psi$ de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ à valeur dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ vérifiant la propriété (12) et, au lieu de la propriété (14), la propriété

$$\chi(\mathrm{Frob}_{v'}) = \theta(T_{v'}) \quad \text{pour toute place } w' \text{ divisant une place } v' \notin \Sigma. \tag{13}$$

Comme $\overline{\mathbb{Q}}_l$ est algébriquement clos, il existe une forme $0 \neq f \in N^+_{B,J,\pi_\infty,\overline{\mathbb{Q}}_l}$ propre pour $\mathcal{H}^\Sigma$ de caractère propre $\theta$. D'après [BG, 6.1.2], il existe une représentation automorphe $\pi'$ attachée à $f$, tel que $\mathcal{H}^\Sigma$ opère par $\theta$ sur $\pi'^{K^\Sigma}$ (où $K^\Sigma = \prod_{v'\notin\Sigma} K_{v'}$), et telle que $\pi'_{v_0} \simeq St$ ou $\pi'_{v_0} \simeq \pi^s$. Soit $\chi$ le caractère de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ attachée à $\pi'$ ; il vérifie (13) d'après 2.3.2.

Comme $\theta(T) \equiv q(q^3+1) \not\equiv -(q^3+1) \pmod{\mu}$, on a $\pi_{v_0} = St$ (cf. [BG, lemme 3.7.3]) Donc $(\pi'_E)$ est la Steinberg en $v_0$ (d'après [Rog3, proposition 13.2.2(b)]) qui est de carré intégrable, et l'on peut appliquer le théorème 3 à $\pi'$, ce qui montre que $\chi(g) = \mathrm{tr} r_l((\pi'_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(g)$ pour $g \in D_w$. Mais comme $\mathrm{Hom}_{K_v}(J_v, \pi'_v) \neq 0$, le lemme 4.1.1 montre que $r_l((\pi'_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}_{|I_w} \simeq r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}_{|I_w}$, d'où la formule (12). □

**4.3.5. Fin de la preuve de la proposition 1.** Composons le pseudo-caractère $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu}$ de la proposition 4.3.4 avec le caractère $\psi_n$

$$\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu} \to \mathcal{O}_\mu/\mu^n$$

de la proposition 4.3.3. On obtient un pseudo-caractère

$$\phi_n = \psi_n \circ \chi : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathcal{O}_\mu/\mu^n.$$

D'après la formule (14), et le théorème de Cebotarev, on a

$$\mathrm{tr}\rho_\mu(g) \equiv \phi_n(g) \pmod{\mu^n} \quad \text{pour tout } g \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/E).$$

Mais d'après (12), on a

$$\phi_n(g) \equiv \mathrm{tr} r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(g) \pmod{\mu^n} \quad \text{pour tout } g \in I_v.$$

D'où

$$\mathrm{tr}\rho_\mu(g) \equiv \mathrm{tr} r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(g) \pmod{\mu^n} \quad \text{pour tout } g \in I_w.$$

Dans cette dernière congruence, les deux membres sont indépendants de $n$ (et de $v_0$). Comme celle-ci est valable pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathrm{tr}\rho_\mu(g) = \mathrm{tr} r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(g) \quad \text{pour tout } g \in I_w$$

et la proposition 1 en découle.

## 5. Preuve de la proposition 2

La preuve est très proche de celle de la proposition 1, mais un peu plus simple. Nous indiquons seulement quels sont les changements à faire.

**5.1. Choix d'un niveau et d'un type.** On prend pour $K_v$ un sous-groupe d'Iwahori $B_v$ de $G_v$ On prend pour $K^v$ un sous-groupe compact ouvert de $\prod_{v' \neq v} G_{v'}$ tel que $\pi^{K^v} \neq 0$. On prend $K = B_v K^v$ et $J = 1$.

**5.2. Formes anciennes et nouvelles.** Rien ne change sauf en 4.2.2 : on définit $\Sigma$ comme l'ensemble des places $v'$ *différentes de* $v$ telles que $K_{v'}$ n'est pas hyperspéciale. On définit $\mathcal{H}^\Sigma$ comme

$$\Big(\bigotimes_{v' \notin \Sigma,\ v' \neq v} \mathcal{H}(G_{v'}, K_{v'})\Big) \otimes \mathcal{Z}(G_v, B_v),$$

et cet anneau agit encore sur les espaces de formes $S_{K,J,\pi_\infty,R}$, $O_{B,J,\pi_\infty,R}$, $N^\bullet_{B,J,\pi_\infty,R}$ où $\bullet \in \{\emptyset, +, -\}$. Le lemme 4.2.4 et sa preuve restent valables sans changement.

**5.3. Augmentation du niveau**

**5.3.1.** La proposition 4.3.3 reste valable sans changement, avec la même preuve. La proposition 4.3.4 a pour analogue

**Proposition 5.3.2.** *Il existe un pseudo-caractère $\chi$ de $\Gamma_E^{\Sigma_0}$ à valeur dans $\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu}$ tel que*

$$\chi(\mathrm{Frob}_{v'}) = T_{v'} \quad \textit{pour toute place } w' \textit{ divisant une place } v' \notin \Sigma. \tag{14}$$

*Démonstration.* Comme dans la preuve de la proposition 4.3.3, il suffit de montrer, pour tout caractère $\theta$ de $\mathfrak{T}_{\overline{\mathbb{Q}}_l}$, l'existence d'un pseudo-caractère $\psi$ de $\Gamma_E^{\Sigma_0}$ à valeur dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$ vérifiant

$$\chi(\mathrm{Frob}_{v'}) = \theta(T_{v'}) \quad \text{pour toute place } w' \text{ divisant une place } v' \notin \Sigma. \tag{15}$$

Raisonnant encore comme dans la preuve de la proposition 4.3.3, on voit qu'il existe une représentation automorphe $\pi'$ attachée à $f$, tel que $\mathcal{H}^\Sigma$ opère par $\theta$ sur $\pi'^{K^\Sigma}$ (où $K^\Sigma = \prod_{v' \notin \Sigma} K_{v'}$), et telle que $\pi'_E$ est la Steinberg en la place au-dessus de $v_0$.

Soit $\chi$ le caractère de la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ attachée à $\pi'$; D'après 2.3.2, on a

$$\chi(\mathrm{Frob}_{v'}) = \theta(T_{v'}) \quad \text{pour toute place } w' \text{ divisant une place } v' \notin \Sigma,\ v' \neq v.$$

D'après le théorème 3 appliqué à $\pi'$, $\chi(g) = \mathrm{tr} r_l((\pi'_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(g)$ pour $g \in D_w$, donc $\chi$ est aussi non ramifiée en $w$ et l'on a

$$\chi(\mathrm{Frob}_w) = \theta(T_w)$$

d'après le lemme 2.3.5, point 3). La même chose vaut pour l'autre place $\overline{w}$ de $E$ au-dessus de $v$ dans le cas où $v$ est décomposée. □

**5.3.3. Fin de la preuve de la proposition 2.** Composons le pseudo-caractère $\chi : \Gamma_E^{\Sigma_0} \to \mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu}$ de la proposition 5.3.2 avec le caractère $\psi_n$

$$\mathfrak{T}_{\mathcal{O}_\mu} \to \mathcal{O}_\mu/\mu^n$$

de la proposition 4.3.3. On obtient un pseudo-caractère

$$\phi_n = \psi_n \circ \chi : \mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \to \mathcal{O}_\mu/\mu^n.$$

D'après la formule (14), et le théorème de Cebotarev, on a

$$\mathrm{tr}\rho_\mu(g) \equiv \phi_n(g) \pmod{\mu^n} \quad \text{pour tout } g \in \Gamma_E^{\Sigma_0},$$

et aussi

$$\mathrm{tr}\rho_\mu(g) \equiv \phi_n(g) \pmod{\mu^n}$$

Mais d'après (12), on a

$$\mathrm{tr}\rho_\mu(\mathrm{Frob}_w) \equiv \psi_n(T_w) \equiv \mathrm{tr} r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(\mathrm{Frob}_w) \pmod{\mu^n} \quad \text{pour tout } g \in I_v,$$

la deuxième congruence découlant du lemme 2.3.5. Dans cette congruence, les deux membres extrêmes sont indépendants de $n$ (et de $v_0$). Comme elle est valable pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathrm{tr}\rho_\mu(\mathrm{Frob}_w) = \mathrm{tr} r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}(\mathrm{Frob}_w).$$

Ceci est aussi valable pour l'autre place $\overline{w}$ divisant $w$. Comme les représentations $r_l((\pi_v)_{E_w})^{\mathrm{ss}}$ et $(\rho_\mu)_{D_w}^{\mathrm{ss}}$ sont non ramifiées (lemme 2.3.5, point 3), et ont même caractère central (par Cebotarev), elles sont isomorphes. □

## 6. Preuve du théorème principal

### 6.1. Changement de base local

**6.1.1.** On note $r$ la représentation $r_l^{\mathrm{ss}}((\pi_v)_{|E_w})$ du groupe $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_l/E_w)$. Soit

$$M = \overline{\mathbb{Q}}_l^{\mathrm{Ker}\, r}.$$

On a $\mathrm{Gal}(M/E_w) = r(D_w)$. On dispose de la suite exacte

$$0 \to I_w \to D_w \to \mathrm{Gal}(E_w^{nr}/E_w) \to 0,$$

d'où une suite exacte

$$0 \to r(I_w) \to r(D_w) \to r(\hat{Z}) \to 0$$

Notons que $r(I_w)$ est fini.

**6.1.2.** Soit $u$ un élément de $D_w = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_l/E_w)$. On suppose que $u \notin I_w$. On note $\langle r(u)\rangle$ l'adhérence du sous-groupe engendré par $r(u)$ : sous notre hypothèse, c'est un sous-groupe d'indice fini de $r(D_w)$.

On pose

$$N = M^{\langle r(u)\rangle}.$$

On a $\mathrm{Gal}(M/N) = \langle r(u)\rangle$. L'extension $N/E_w$ est finie mais n'est pas en général galoisienne.

**Lemme 6.1.3.** *L'extension $M/N$ est non ramifiée, et son Frobenius est $r(u)$.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer que pour toute extension finie galoisienne $M'$ de $N$ contenue dans $M$, on a $M'/N$ non ramifiée, de Frobenius l'image de $r(u)$ dans $\mathrm{Gal}(M'/N)$, et c'est clair. □

**6.1.4.** Si $B/A$ est une extension de corps $p$-adique, on définit le changement de base local de $A$ à $B$ d'une représentation $\pi$ irréductible lisse de $\mathrm{GL}_n(A)$, qu'on note $\pi_B$, par la relation

$$\pi_B := \mathrm{rec}_A^{-1} \circ \mathrm{res}_{A/B} \circ \mathrm{rec}_A(\pi),$$

où $\mathrm{res}_{A/B}$ est la restriction d'une représentation de $W_B$ à $W_A$.

Si la représentation $\pi$ est-elle même le changement de base d'une représentation d'un groupe unitaire, par exemple $\pi = (\pi_v)_{E_w}$ on notera $(\pi_v)_B$ son changement de base à $B$, au lieu de $((\pi_v)_{E_w})_B$, ce qui ne crée pas d'ambiguïté.

**Proposition 6.1.5.** *Le changement de base local $(\pi_v)_N$ de $(\pi_v)_{E_w}$ à $N$ a une droite invariante par un Iwahori de $\mathrm{GL}_3(N)$ .*

*Démonstration.* Par définition, $r_l((\pi_v)_N)$ est la restriction de $r_l((\pi_v)_{E_w})$ à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_l/N)$. D'après le lemme 6.1.3, cette représentation est non ramifiée. La proposition en découle. □

Soit $N_0$ la clôture galoisienne de $N$, qui est finie et résoluble sur $E_w$.

### 6.2. Changement de base global

**Lemme 6.2.1.** *Il existe un corps de nombres $F'$ vérifiant*

i. *$F'$ est totalement réel,*

ii. *$F'/F$ est résoluble et le changement de base $\pi_{EF'}$ de $\Pi_E$ à $EF'$ est cuspidal.*

iii. *$EF'$ admet une place $w'$ divisant $w$ telle que $(EF)_{w'}/E_w$ soit isomorphe à $N_0/E_v$.*

*Démonstration.* Cela résulte aisément de [AT, théorème 5, page 103]. Voir [BC, preuve de la proposition 3.2] pour plus de détails. □

On a $\mathrm{Gal}(N_0/E_w) \subset \mathrm{Gal}(EF'/E) = \mathrm{Gal}(F'/F)$. Le sous-groupe $\mathrm{Gal}(N_0/N)$ de $\mathrm{Gal}(N_0/E_w)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(F'/F)$ et définie donc un sous-corps $H$ de $F'$, contenant $F$, et tel que $(EH)_{w'}/E_w$ est isomorphe à $N/E_w$

Le lemme suivant est montré dans [Ha]

**Lemme 6.2.2** (Harris). *Il existe une représentation automorphe cuspidale $\pi_{EH}$ de $\mathrm{GL}_n(EF)$ qui est le changement de base fort de $\pi_E$, i.e. dont la composante locale $(\pi_{EH})_x$ en toute place $x$ de $EH$ divisant une place $y$ de $E$ est le changement de base local de $(\pi_E)_y$ .*

Par Cebotarev la représentation galoisienne associée à $\pi_{EH}$ est

$$(\rho_\mu)_{|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/EH)}.$$

D'après la proposition 2, appliquée à $\pi_H$ en la place $w'$ de $EH$, on a

$$(\rho_\mu)^{\mathrm{ss}}_{|D_{w'}} \simeq r_l(\pi_v)_N = (r(\pi_v)_{E_w})_{|D_{w'}}.$$

Comme $u \in D_{w'} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_l/N)$ par définition de $N$, on a en particulier

$$\mathrm{tr}(\rho_\mu)(u) = \mathrm{tr} r(\pi_v)_{E_w}(u)$$

Cette égalité est valable pour tout $u \in D_w - I_w$. Mais par ailleurs, d'après la proposition 1, elle est aussi vrai pour $u \in I_w$. On a donc montré $\mathrm{tr}(\rho_\mu)_{|D_w} = \mathrm{tr} r_l(\pi_v)_{E_w}$, et le théorème.

## Références


[AC] J. Arthur, L. Clozel, *Simple algebras, base change and the advanced theory of the trace formula.* Ann. of Math. Stud. 120, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. Zbl 0682.10022 MR 1007299

[AT] E. Artin, J. Tate, *Class field theory.* W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam 1968. Zbl 0176.33504 MR 0223335

[BC] J. Bellaïche, G. Chenevier, Formes non tempérées pour U(3) et conjectures de Bloch-Kato. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **37** (2004), 611–662. Zbl 02165094 MR 2097894

[BG] J. Bellaïche, P. Graftieaux, Augmentation du niveau pour U(3). *Math. Ann.*, to appear.

[B] J. N. Bernstein, Le "centre" de Bernstein. In *Représentations des groupes réductifs sur un corps local* (rédigé par P. Deligne), Travaux en cours, Hermann, Paris 1984, 1–32. Zbl 0599.22016 MR 0771671

[BZ] I. N. Bernstein, A. V. Zelevinsky, Induced representations of reductive $p$-adic groups I. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **10** (1977), 441–472. Zbl 0412.22015 MR 0579172

[Bl] L. Blasco, Description du dual admissible de $U(2,1)(F)$ par la théorie des types de C. Bushnell et P. Kutzko. *Manuscripta Math.* **107** (2002), 151–186. Zbl 01747283 MR 1894738

[BR] D. Blasius, J. Rogawski, Tate classes and arithmetic quotient of the two-ball. In *The zeta functions of Picard modular surfaces*, CRM Workshop, Université de Montréal, Montreal, QC, 1992, 421–444. Zbl 0828.14012 MR 1155236

[Bus] C. Bushnell, Smooth representations of $p$-adic group. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Zürich, 1994), Vol. 2, Birkhäuser, Basel 1995, 770–779. Zbl 0856.22021 MR 1403977

[Ha] M. Harris, The local Langlands conjecture for $GL_n$ over a $p$-adic field, $n < p$. *Invent. Math.* **134** (1998), 177–210. Zbl 0921.11060 MR 1646587

[He] G. Henniart, Le point sur la conjecture de Langlands pour $GL(N)$ sur un corps local. In *Théorie des nombres* (C. Goldstein, ed.), Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Paris 1983–1984, Progr. Math. 59, Birkhäuser, Boston, MA, 1985. Zbl 0588.12011 MR 0902829

[HT] M. Harris, R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties.* Ann. of Math. Stud. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. Zbl 1036.11027 MR 1876802

[Ke] D. Keys, Principal series representations of special unitary groups over local fields. *Compositio Math* **51** (1984), 115–130. Zbl 0547.22009 MR 0734788

[La] M. Larsen, Maximality of Galois actions for compatible systems. *Duke Math. J.* **80** (1995), 601–630. Zbl 0912.11026 MR 1370110

[LaPi] M. Larsen, R. Pink, On $l$-independence of algebraic monodromy groups in compatible systems of representations. *Invent. Math.* **107** (1992), 603–636. Zbl 0778.11036 MR 1150604

[ZFPMS] R. Langlands, D. Ramakhrisnan (eds.), *The Zeta functions of Picard modular surfaces.* CRM Workshop, Université de Montréal, Montreal, QC, 1992. Zbl 0752.00024 MR 1155223

[PR] V. Platonov, A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*. Pure Appl. Math. 139. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994. Zbl 0841.20046 MR 1278263

[Rog1] J. Rogawski, Analytic expression for the number of points mod $p$. In *The zeta functions of Picard modular surfaces*, CRM Workshop, Université de Montréal, Montreal, QC, 1992, 65–109. Zbl 0821.14015 MR 1155227

[Rog2] J. Rogawski, The multiplicity formula for A-packets. In *The zeta functions of Picard modular surfaces*, CRM Workshop, Université de Montréal, Montreal, QC, 1992, 395–419. Zbl 0823.11027 MR R1155235

[Rog3] J. Rogawski, *Automorphic representations of unitary groups in three variables*. Ann. of Math. Stud. 123, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990. Zbl 0724.11031 MR 1081540

[Serre] J.-P. Serre, Lettre à K. Ribet. Premier janvier 1981. In *Oeuvres complètes*. Tome 4, Springer-Verlag, Berlin 2000. Zbl 0933.01034 MR 1730973

[St] R. Steinberg, Endomorphisms of linear algebraic groups. *Mem. Amer. Math. Soc.* **80** (1968), 1–108. Zbl 0164.02902 MR 0230728

[Taylor] R. Taylor, On Galois representations associated to Hilbert modular forms. *Invent. Math.* **98** (1989), 265–280. Zbl 0705.11031 MR 1016264

[Ta] J. Tate, Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions*, Part 2, Proc. Sympos. Pure Math. 33, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, 3–26. Zbl 0422.12007 MR 0546607

[Ti] J. Tits, Reductive groups over local fields. In *Automorphic forms, representations and L-functions*, Part 1, Proc. Sympos. Pure Math. 33, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, 29–69. Zbl 0415.20035 MR 0546588

Received March 28, 2005

Joël Bellaïche, MC 4411, Math. Building, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027, U.S.A.
E-mail: jbellaic@math.columbia.edu