

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 78 (2003)

Artikel: Une remarque sur l'inégalité de McKean
Autor: Veeravalli, Alain R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-58787>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Une remarque sur l'inégalité de McKean

Alain R. Veeravalli

Résumé. Pour une classe de variétés riemanniennes équipées de métriques *tordues*, nous donnons dans ce travail une borne inférieure optimale pour la première valeur propre du laplacien dans le problème de Dirichlet. L'inégalité présentée, qui est obtenue très simplement, étend celle de McKean à des variétés dont la courbure peut être de signe variable. C'est le principal intérêt de l'inégalité. Elle répond aussi partiellement à une question de Schoen et Yau.

Mathematics Subject Classification (2000). 53C20, 53C40, 53C42.

Keywords. Valeur propre du laplacien, problème de Dirichlet, formules d'O'Neill, inégalité de McKean, courbure moyenne, métriques tordues.

1. Notations et résultats

1. Soit M une variété riemannienne connexe, simplement connexe, complète et non-compacte (on dira *ouverte* pour simplifier), $B_p(\delta)$ sa boule ouverte de centre p et de rayon $\delta > 0$ et $\lambda_1(\delta)$ la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet associé, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 & \text{sur } B_p(\delta) \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial B_p(\delta) \end{cases},$$

où Δ désigne le laplacien sur M . Notons que $\lambda_1(\delta)$ est strictement positive et décroissante en la variable δ . La limite $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} \lambda_1(\delta)$ existe donc dans \mathbb{R}_+ et on peut montrer qu'elle est indépendante du point p . Dans la suite, elle sera notée $\lambda_1(M)$ et appelée *première valeur propre* de M . La recherche de conditions conduisant à la non-nullité de $\lambda_1(M)$ est une importante question posée par Schoen and Yau ([5] p. 106).

A ce sujet, rappelons les résultats suivants :

Pour l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m(-\kappa^2)$ de dimension m et de courbure sectionnelle $-\kappa^2 < 0$, on a $\lambda_1(\mathbb{H}^m(-\kappa^2)) = (m-1)^2\kappa^2/4$. D'un autre côté, on a un résultat de comparaison, appelé inégalité de McKean ([2]) : si M est une variété ouverte de dimension m et de courbure sectionnelle majorée par une constante $-\kappa^2 < 0$, alors nous avons une borne inférieure optimale pour la première valeur

propre de M :

$$\lambda_1(M) \geq \frac{(m-1)^2 \kappa^2}{4}.$$

Nous présentons ci-dessous deux inégalités similaires qui étendent l'inégalité de McKean à une classe de variétés dont la courbure peut être positive en certains points.

2. Les résultats. Soit w une fonction lisse sur \mathbb{R} de dérivée minorée par une constante strictement positive κ et (Z, g_*) une variété riemannienne complète $(m-1)$ -dimensionnelle arbitraire. On considère alors la variété $\mathfrak{M} = \mathbb{R} \times Z$ que l'on munit de la métrique tordue complète $g = \langle \cdot, \cdot \rangle = dt^2 + e^{2w(t)} g_*$. La norme associée sera notée $|\cdot|$.

Contrastant avec la grande liberté de choix pour la variété Z , on a les résultats précis suivants :

Théorème 1. *Sous les hypothèses ci-dessus, on a*

$$\lambda_1(\mathfrak{M}) \geq \frac{(m-1)^2 \kappa^2}{4}.$$

De plus, cette borne est optimale.

Théorème 2. *Soit M une sous-variété ouverte orientable n -dimensionnelle de \mathfrak{M} , munie de la métrique induite, et H son vecteur de courbure moyenne (non-normalisée). On suppose que la norme uniforme de H sur M vérifie : $\|H\| < (n-1)\kappa$. Alors*

$$\lambda_1(M) \geq \frac{1}{4} \{(n-1)\kappa - \|H\|\}^2.$$

De plus, cette borne est optimale.

L'idée de ce travail revient à Cheung et Leung ([1]) qui ont récemment démontré le théorème 2 pour l'espace hyperbolique. Le matériel utilisé dans les preuves ci-dessous est très réduit : on utilisera à plusieurs reprises les formules d'O'Neill ([3], p. 206) et la très simple proposition suivante :

Proposition 1. *Soient $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ une variété riemannienne ouverte et h une fonction lisse sur N dont le gradient et le laplacien vérifient $|\nabla h| \leq s$ et $\Delta h \geq t$ où s et t sont deux constantes strictement positives. Alors $\lambda_1(N) \geq \frac{t^2}{4s^2}$.*

La preuve est immédiate : soient $f \in C^1$ et $h \in C^2$ deux fonctions sur N où f est à support compact. La formule de Green permet d'écrire

$$\int_N \{f^2 \Delta h + \langle \nabla(f^2), \nabla h \rangle\} \cdot d\nu = 0.$$

Des inégalités de Cauchy–Schwarz et arithmético-géométrique, on déduit que :

$$|\langle \nabla(f^2), \nabla h \rangle| \leq 2s|f| \cdot |\nabla f| \leq tf^2/2 + 2s^2|\nabla f|^2/t.$$

La précédente formule entraîne alors que $\int_N |\nabla f|^2 \cdot d\nu \geq \frac{t^2}{4s^2} \cdot \int_N f^2 \cdot d\nu$ et la conclusion découle alors du principe *min-max* de Rayleigh. \square

Remarques. 1. L'inégalité de McKean est habituellement prouvée en utilisant la formule de la co-aire ou la constante de Cheeger. Il y a aussi un moyen très simple de la déduire de la proposition ci-dessus : si p est un point de M et d la distance de M , le théorème de comparaison de Bishop ([4]) affirme que $\Delta d_p \geq (m-1)\kappa \coth(\kappa d_p)$ qui est minorée par $(m-1)\kappa$. Comme le gradient de d_p est de norme 1, l'inégalité de McKean est prouvée.

2. Si σ est un 2-plan au point (t_0, x_0) de \mathfrak{M} et engendré par la base orthonormale (b.o.n. en abrégé) $\{(t, u), (\tau, v)\}$, si K et K_\star sont les courbures sectionnelles de \mathfrak{M} et Z respectivement, les formules d'O'Neill pour la courbure des produits tordus nous permettent d'écrire

$$K(\sigma) = \frac{K_{\star x_0}(u, v)}{e^{2w(t_0)}} - \left(\frac{K_{\star x_0}(u, v)}{e^{2w(t_0)}} + \ddot{w}(t_0) \right) \cdot (t^2 + \tau^2) - \dot{w}^2(t_0).$$

3. En particulier, si on choisit pour Z l'espace \mathbb{R}^{m-1} avec sa métrique standard plate et la fonction $w(t) = kt$, on observe que \mathfrak{M} est à courbure sectionnelle constante $-\kappa^2$, c'est-à-dire que \mathfrak{M} n'est autre que l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^m(-\kappa^2)$. La borne inférieure du théorème 1 est donc optimale.

4. Comme l'espace hyperbolique admet des sous-variétés totalement géodésiques de toute dimension et que ces sous-variétés sont elles-mêmes isométriques à des espaces hyperboliques, la borne inférieure du théorème 2 est aussi optimale.

5. Si l'on choisit pour Z la sphère $\mathbb{S}^{m-1}(r)$ de rayon $r < 1/\kappa$, de dimension $m-1 \geq 2$ avec sa métrique standard de courbure sectionnelle $1/r^2$, si $w(t) = \kappa t$ avec $t_0 = 0$ et si enfin σ est un 2-plan dans Z (i.e. engendré par une b.o.n. de la forme $\{(0, u), (0, v)\}$), alors la formule ci-dessus montre que $K(\sigma) = 1/r^2 - \kappa^2 > 0$. Ceci montre que les résultats de McKean et Cheung-Leung peuvent donc être étendus à certaines variétés de signe de courbure variable.

2. Preuves

2.1. La connexion, le gradient de \mathfrak{M} seront désignés par la même lettre $\bar{\nabla}$ et le laplacien par $\bar{\Delta}$. Nous considérons alors l'application première projection $\Pi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R} : (t, x) \mapsto t$ dont le gradient est un champ unitaire noté ∂_t . Le théorème 1 découle de la proposition 1 et de la suivante :

Proposition 2. $\bar{\Delta}\Pi = (m-1)\dot{w} \quad (\geq (m-1)\kappa).$

Preuve. Soit (t, x) un point de \mathfrak{M} et $\{\bar{\nabla}\Pi = \partial_t, v_1, \dots, v_{m-1}\}$ une b.o.n. de $T_{(t,x)}\mathfrak{M}$. Les formules d'O'Neill nous permettent d'écrire

$$\bar{\Delta}\Pi = \langle \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t, \partial_t \rangle + \sum_{i=1}^{m-1} \langle \bar{\nabla}_{v_i} \partial_t, v_i \rangle = 0 + \sum_{i=1}^{m-1} \langle \frac{\partial_t e^{w(t)}}{e^{w(t)}} v_i, v_i \rangle = (m-1)\dot{w}. \quad \square$$

2.2. Soit M une sous-variété ouverte n -dimensionnelle de \mathfrak{M} . On munit M de la métrique induite encore notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La connexion, le gradient et le laplacien de M seront désignés par les lettres ∇ et Δ . On considérera aussi la restriction $\pi = \Pi|_M$ de Π à M . Le théorème 2 découle de la proposition 1 et de la suivante :

Proposition 3. *La fonction π vérifie $|\nabla\pi| \leq 1$ et*

$$\Delta\pi = (n - |\nabla\pi|^2)\dot{w} + g(\partial_t, H) \quad (\geq (n-1)\kappa - \|H\|).$$

Preuve. Soient $\{e_i\}_{i=1}^n$ et $\{\nu_j\}_{j=1}^{p=m-n}$ deux b.o.n. locales (pour la métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathfrak{M}) de TM et TM^\perp respectivement. Les gradients de Π et π sont reliés par la relation :

$$\bar{\nabla}\Pi = \nabla\pi + \sum_{j=1}^p \langle \bar{\nabla}\Pi, \nu_j \rangle \nu_j = \nabla\pi + \sum_{j=1}^p \langle \partial_t, \nu_j \rangle \nu_j.$$

Notons $\mathfrak{h} : TM \times TM \rightarrow TM^\perp : (X, Y) \mapsto \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ la seconde forme fondamentale de M et A l'opérateur de forme associé. Alors

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\Pi - \sum_{j=1}^p \bar{\nabla}^2\Pi(\nu_j, \nu_j) &= \sum_{i=1}^n \bar{\nabla}^2\Pi(e_i, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \bar{\nabla}_{e_i} \left\{ \nabla\pi + \sum_{j=1}^p \langle \partial_t, \nu_j \rangle \nu_j \right\}, e_i \right\rangle \\ &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} \nabla\pi + \mathfrak{h}(e_i, \nabla\pi), e_i \rangle \\ &\quad + \sum_i \sum_j \langle (\bar{\nabla}_{e_i} \langle \partial_t, \nu_j \rangle) \nu_j + \langle \partial_t, \nu_j \rangle \bar{\nabla}_{e_i} \nu_j, e_i \rangle \\ &= \Delta\pi - \sum_i \sum_j \langle \partial_t, \nu_j \rangle \langle A^{\nu_j} e_i, e_i \rangle \\ &= \Delta\pi - \langle \partial_t, H \rangle. \end{aligned}$$

Décomposons chaque ν_j sous la forme $\nu_j = \alpha_j \partial_t + w_j$ où α_j est réel et w_j un

vecteur tangent de Z . Les formules d'O'Neill nous permettent d'écrire

$$\sum_{j=1}^p \bar{\nabla}^2 \Pi(\nu_j, \nu_j) = \dot{w} \sum_{j=1}^p |w_j|^2 = \dot{w}(p - \sum_{j=1}^p \alpha_j^2) = \dot{w}(p + |\nabla \pi|^2 - 1)$$

et ceci prouve la proposition. \square

Remerciements. Il m'est agréable de remercier Lamiae Jabri et Lucas Zakaria pour de fructueuses discussions.

Références

- [1] L. F. Cheung and P. F. Leung, Eigenvalue estimates for submanifolds with bounded mean curvature in the hyperbolic space, *Math. Z.* **236** (2001), 525–530.
- [2] H. P. McKean, An upper bound to the spectrum on a manifold of negative curvature, *J. Differ. Geom.* **4** (1970), 359–366.
- [3] B. O' Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Pure and applied Mathematics **103**, Academic Press, 1983.
- [4] T. Sakai, *Riemannian geometry*, Translations of Mathematical Monographs **149**, American Mathematical Society, 1996.
- [5] R. Schoen and S.-T. Yau, *Lectures in differential geometry*, International Press, 1994.

Alain R. Veeravalli
 Département de Mathématiques
 Université d'Evry-Val d'Essonne
 Boulevard des Coquibus
 91025 Evry cedex
 France
 e-mail: Alain.Veeravalli@maths.univ-evry.fr

(Received: December 10, 2002)



To access this journal online:
<http://www.birkhauser.ch>