Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 78 (2003)

Artikel: Cycles algébraiques et topologie des surfaces bielliptiques réelles
Autor: Mangolte, Frédéric
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-58761

Comment. Math. Helv. 78 (2003) 385–393
0010-2571/03/020385-9

Commentarii Mathematici Helvetici

Cycles algébriques et topologie des surfaces bielliptiques réelles

Frédéric Mangolte

Résumé. On donne une caractérisation topologique des surfaces réelles totalement algébriques parmi les surfaces bielliptiques. Ceci achève la détermination des surfaces réelles totalement algébriques parmi les surfaces de dimension de Kodaira nulle. On décrit de plus un exemple de surface algébrique complexe qui n'est déformation équivalente à aucune surface possédant une structure réelle totalement algébrique non vide.

Abstract. Using topological data, we give a classification of totally algebraic real surfaces among all the bi-elliptic surfaces. Thus this work comletes the determination of totally algebraic real surfaces among all zero-Kodaira dimensional surfaces. Furthermore we give an example of a complex algebraic surface which is not deformation equivalent to any surface with nonempty totally algebraic structure.

Mathematics Subject Classification (2000). 14C25 14P25 14J27.

Mots clés. Algebraic cycles, real algebraic surfaces, hyperelliptic surfaces.

Introduction

Les surfaces bielliptiques[1]constituent une classe particulière dans la classification des surfaces algébriques. Sur $\mathbb{C}$, une surface bielliptique peut être définie comme le quotient d'un produit $E \times F$ de courbes elliptiques par l'action produit d'un groupe fini G de translations de F dont l'action sur E admet $\mathbb{P}^1$ pour quotient. Une *surface bielliptique réelle* est une surface bielliptique complexe munie d'une involution anti-holomorphe (la structure réelle).

Pour une surface bielliptique X, la fibration d'Albanese

$$\alpha\colon X = (E \times F)/G \to \mathrm{Alb}(X) = F/G$$

est une fibration elliptique localement triviale non triviale. Les fibres de α sont toutes isomorphes à E sur $\mathbb{C}$. Lorsque X est réelle, F/G et E sont des courbes elliptiques réelles. La partie réelle d'une courbe elliptique réelle lisse non vide est formée

[1] Les surfaces bielliptiques sont classiquement appelées surfaces *hyperelliptiques*, je renvoie à [Be] pour une justification de la terminologie utilisée ici.

d'un ou deux ovales. Il est immédiat que le nombre de composantes connexes de la partie réelle de X (c'est-à-dire l'ensemble des points fixes de l'involution) vérifie $0 \leqslant {}^{\#}X(\mathbb{R}) \leqslant 4$ et que chaque composante connexe est homéomorphe à un tore T ou à une bouteille de Klein K. On arrive ainsi à quinze types topologiques possibles *a priori* pour $X(\mathbb{R})$. Récemment, F. Catanese et P. Frediani [CF] ont donné les onze types topologiques effectivement réalisables. Si α admet une section réelle, on montre que seuls sept types topologiques sont réalisables, cf. Théorème 2.3.

Dans cet article, on s'intéresse à un invariant fin de la structure réelle : le groupe $H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \subset H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ des cycles algébriques réels. Ce groupe est engendré par les classes fondamentales des courbes algébriques réelles, cf. e.g. [BH]. La détermination de ce groupe pour une surface donnée est délicate. Lorsque $H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, on dit que la structure réelle de X est totalement algébrique. Avec le résultat suivant, on achève de déterminer les surfaces réelles totalement algébriques parmi les surfaces de dimension de Kodaira nulle : abéliennes, K3, d'Enriques, bielliptiques.

Théorème 0.1. *Soit X une surface bielliptique réelle. Son diviseur canonique $\mathcal{K}_X$ est de torsion, on note d_X la torsion de $\mathcal{K}_X$.*

(1) *Si $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et $H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, alors $X(\mathbb{R})$ est homéomorphe à un tore. Si de plus d_X est pair, α admet une section réelle.*

(2) *Supposons que $X(\mathbb{R})$ soit homéomorphe à un tore. Si d_X est impair ou si α admet une section réelle, alors $H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.*

Ce résultat s'inscrit dans l'étude des groupes de cycles algébriques réels des surfaces de type spécial. C'est-à-dire, outre les surfaces de dimension de Kodaira nulle, les surfaces rationnelles, réglées, elliptiques propres.

Pour une surface rationnelle X, on a toujours

$$H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

[Si, 1989]. Lorsque X est une surface abélienne, l'égalité $H^1_{\text{alg}} = H^1$ implique que $X(\mathbb{R})$ est connexe [Hu, 1994] ou [Ma1, 1994]. Si X est une surface K3, le groupe $H^1_{\text{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ est détaillé dans [Ma2, 1997]. Une surface d'Enriques réelle est totalement algébrique si et seulement si elle est orientable [MvH, 1998]. Les surfaces birationnellement réglées ont été traitées dans [Ku2, 2000] et dans [Ab, 2000]. Pour les surfaces elliptiques propres régulières, voir [Ma3, 2000]. L'article [BK] est un bon survey sur les cycles algébriques réels.

Si X est une surface algébrique appartenant à l'une des classes ci-dessus, on peut toujours trouver une surface algébrique Y déformation équivalente à X sur $\mathbb{C}$ et une structure réelle sur Y telle que $Y(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et $H^1_{\text{alg}}(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.

Théorème 0.2. *Il existe une surface bielliptique X telle que pour toute surface algébrique Y déformation équivalente à X sur $\mathbb{C}$ et pour toute structure réelle sur Y ayant des points réels, on ait $H^1_{\text{alg}}(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \neq H^1(Y(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.*

On utilise le fait que la fibration d'Albanese ne possède de section ni pour X ni pour Y. Voir aussi à ce sujet le Corollaire 2.4

Je remercie F. Catanese et P. Frediani qui m'ont communiqué une version préliminaire de leur preprint.

1. Cycles algébriques et orientabilité

Une surface algébrique réelle est un couple (X, σ) où X est une surface algébrique complexe et σ une involution anti-holomorphe sur X. La partie réelle $X(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points fixes de σ, $X(\mathbb{R}) = X^\sigma$. Sur une surface algébrique réelle (X, σ) de partie réelle non vide il existe un morphisme surjectif

$$\varphi\colon\ \operatorname{Pic}(X)^\sigma \to H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

défini essentiellement en associant à une courbe réelle la classe fondamentale de sa partie réelle, cf. eg. [Si]. La décomposition

$$H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \bigoplus_{V \subset X(\mathbb{R})} H^1(V, \mathbb{Z}/2)$$

où V décrit l'ensemble des composantes connexes de $X(\mathbb{R})$ est orthogonale pour le degré du cup-produit. Pour un diviseur réel D, on considérera la restriction $\varphi(D)_{|V}$ à une composante connexe V de $X(\mathbb{R})$ comme un élément de $H^1(V, \mathbb{Z}/2)$ ou de $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ selon les cas.

On note $w_1(S)$ la première classe de Stiefel-Whitney du fibré tangent d'une surface lisse S. Soit $\mathcal{K}_X$ un diviseur canonique de X. Nous utiliserons les propriétés suivantes de φ :

$$\forall D \in \operatorname{Div}(X)^\sigma,\ \forall D' \in \operatorname{Div}(X)^\sigma, \quad \varphi(D).\varphi(D') \equiv D.D' \mod 2\ ; \tag{1.1a}$$

$$w_1(X(\mathbb{R})) = \varphi(\mathcal{K}_X)\ . \tag{1.1b}$$

Dans (1.1a), on considère à gauche le degré du cup-produit sur $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ et à droite l'intersection des diviseurs.

Rappelons qu'une surface lisse S est non orientable si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est réalisée :

$$w_1(S) \neq 0\ ; \tag{1.2a}$$

$$\text{il existe une classe } u \in H^1(S, \mathbb{Z}/2) \text{ qui vérifie } u^2 = 1\ . \tag{1.2b}$$

Rappelons aussi que si S est difféomorphe à une bouteille de Klein, on a $w_1(S)^2 = 0$.

L'argument suivant à été utilisé dans [MvH] pour les surfaces d'Enriques.

Théorème 1.3. *Soit X une surface algébrique réelle dont le diviseur canonique $\mathcal{K}_X$ est de d-torsion, $d \geqslant 2$ entier. Si $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, alors $X(\mathbb{R})$ est vide ou orientable.*

Preuve. Soit X une surface algébrique réelle telle que

$$H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2).$$

Soit D un diviseur dont la classe dans le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X)$ possède un multiple trivial, alors $D.D' = 0$ pour tout diviseur D'. Lorsque D est réel, on a $\varphi(D) = 0$ dans $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. En effet, par hypothèse, toute classe de cohomologie $u \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ est l'image par φ d'un diviseur réel D' donc $\varphi(D).u = 0$. Comme le degré du cup-produit est une forme non dégénérée sur $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, on a $\varphi(D) = 0$. Maintenant, si $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, on peut supposer $\mathcal{K}_X$ réel, cf. [Si, I.4.5]. Comme $\mathcal{K}_X$ est de torsion dans $\mathrm{NS}(X)$ on a $\varphi(\mathcal{K}_X) = 0$ d'où $w_1(X(\mathbb{R})) = 0$ et $X(\mathbb{R})$ est orientable. □

2. Surfaces bielliptiques réelles

Soit X une surface bielliptique, notons $A = \mathrm{Alb}(X)$ la variété d'Albanese de X et $\alpha\colon X \to A$ la fibration d'Albanese. Par définition, une surface bielliptique admet une deuxième fibration elliptique

$$\pi\colon X \to E/G \cong \mathbb{P}^1$$

dont les seules fibres singulières sont des fibres multiples $m_t L_t$ où L_t est une courbe elliptique lisse. Les fibres lisses de π sont isomorphes à F sur $\mathbb{C}$.

Lorsque X est munie d'une structure réelle σ, la fibration $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ n'est pas réelle en général. Par contre, par construction, la fibration $\alpha\colon X \to A$ est réelle.

Relativement à la fibration π, un diviseur canonique de X est donné par

$$\mathcal{K}_X = -2F_0 + \sum_{t\in T}(m_t - 1)L_t \tag{2.1}$$

où F_0 est une fibre lisse de π. Le diviseur $\mathcal{K}_X$ est de d_X-torsion. Les valeurs possibles de d_X sont données ci-dessous.

Toute surface bielliptique est de la forme $(E \times F)/G$ où G est l'un des groupes suivants.

Surfaces bielliptiques sur $\mathbb{C}$			
G	$\#T$	$(m_1, \ldots, m_{\#T})$	d_X
$\mathbb{Z}/2$	4	$(2,2,2,2)$	2
$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$	4	$(2,2,2,2)$	2
$\mathbb{Z}/3$	3	$(3,3,3)$	3
$\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$	3	$(3,3,3)$	3
$\mathbb{Z}/4$	3	$(2,4,4)$	4
$\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$	3	$(2,4,4)$	4
$\mathbb{Z}/6$	3	$(2,3,6)$	6

Table 1

On renvoie à [CF] pour une présentation agréable de ce résultat classique dû à Bagnera et De Franchis [BdF] et [BdF2].

Soit $V \subset X(\mathbb{R})$ une composante connexe, soit X_x une fibre réelle de α rencontrant V. Comme X_x est une fibre de α, on a $X_x^2 = 0$ et comme α est lisse, la restriction $\varphi(X_x)_{|V}$ dans $H^1(V, \mathbb{Z}/2) \subset H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ vérifie $(\varphi(X_x)_{|V})^2 = 0$.

De plus,

$$w_1(V) = \varphi(\mathcal{K}_X)_{|V} = \sum \varphi(L_t)_{|V} \tag{2.2}$$

où la somme est restreinte aux courbes L_t réelles et de multiplicité m_t paire.

On considère le cas où la fibration d'Albanese admet une section réelle.

Théorème 2.3. *Soit X une surface bielliptique réelle dont la fibration d'Albanese α admet une section réelle. Alors toutes les composantes connexes de $X(\mathbb{R})$ sont homéomorphes et si $X(\mathbb{R})$ est non orientable, $X(\mathbb{R})$ et $A(\mathbb{R})$ sont non connexes.*

Une composante connexe de $X(\mathbb{R})$ est homéomorphe à un tore ou à une bouteille de Klein et $X(\mathbb{R})$ possède au plus quatre composantes. Comme α possède une section réelle, $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et on obtient les sept types topologiques aT $(1 \leq a \leq 4)$ et aK $(2 \leq a \leq 4)$.

Preuve. On montre tout d'abord que deux composantes connexes V et V' de $X(\mathbb{R})$ situées au dessus de la même composante connexe B de $A(\mathbb{R})$ sont homéomorphes. Soient $x \in B$, la courbe elliptique E est un groupe abélien qui agit sur la fibre réelle X_x de α. La partie réelle $E(\mathbb{R})$ est un sous-groupe qui agit sur $X_x(\mathbb{R})$. De l'existence d'une section réelle, on déduit qu'une translation qui échange les deux composantes connexes de $X_x(\mathbb{R})$ s'étend en un homéomorphisme de V' sur V.

Supposons maintenant V non orientable. Soit X_x une fibre réelle de α rencontrant V. De l'existence d'une section de α, on déduit que l'une au moins des fibres multiples de π, disons $m_1 L_1$, est réelle et vérifie $L_1.X_x = 1$ d'où

$$\varphi(L_1)_{|V}.\varphi(X_x)_{|V} = \varphi(L_1).\varphi(X_x) = 1 \ .$$

D'après (1.2b), on a alors $(\varphi(L_1)_{|V})^2 = 1$ dans $H^1(V, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ car V est non orientable.

Par ailleurs, on a $\varphi(L_1)^2 = 0$ car $L_1^2 = 0$ comme courbe réduite d'une fibre de π. Il existe donc nécessairement une composante connexe V' de $X(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(L_1) = \varphi(L_1)_{|V} + \varphi(L_1)_{|V'}$ et $(\varphi(L_1)_{|V'})^2 = 1$. La composante V' est alors non orientable. De plus, comme $L_1.X_y = 1$ pour toute fibre X_y de α, L_1 réalise une section de α. Les ensembles $\alpha(V)$ et $\alpha(V')$ sont donc disjoints dans $A(\mathbb{R})$. □

Corollaire 2.4. *Il existe des surfaces bielliptiques réelles dont la fibration d'Albanese α admet une section complexe mais pas de section réelle.*

Preuve. Il suffit de considérer le cas d'une surface bielliptique réelle de groupe $G = \mathbb{Z}/4$ avec $X(\mathbb{R})$ homéomorphe à une bouteille de Klein. Une telle surface existe, cf. [CF, Sec. 8, Table 3]. La fibration d'Albanese d'une surface de type $\mathbb{Z}/4$

admet une section complexe. Mais d'après le Théorème 2.3, si $X(\mathbb{R})$ est connexe et non orientable, α ne peut admettre de section réelle. $\square$

Le lemme suivant est un cas particulier de [Ku1, Th. 2.1].

Lemme 2.5. *Soit X une surface algébrique réelle telle que $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ soit égal à $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$. Alors $\varphi(\mathrm{Pic}^0(X)^\sigma) = \{0\}$ dans $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.*

Théorème 2.6. *Soit X une surface bielliptique réelle dont la partie réelle satisfait l'égalité $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, alors $X(\mathbb{R})$ est vide ou homéomorphe à un tore.*

Preuve. Soit X une surface bielliptique réelle. Dans ce cas le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X)$ est engendré par une fibre X_x de α et par les courbes L_t réduites des fibres multiples de π. Soient $m_t L_t$ et $m_{t'} L_{t'}$ deux fibres multiples réelles de π, notons d le pgcd de m_t et $m_{t'}$. Supposons que $d \geqslant 2$, le diviseur $D = (m_t/d)L_t - (m_{t'}/d)L_{t'}$ est de d-torsion dans $\mathrm{NS}(X)$. D'après la preuve du Théorème 1.3, $\varphi(D) = 0$. Quitte à permuter t et t', on peut supposer que m_t/d est impair. On a alors

$$\varphi((m_t/d)L_t) = \varphi(L_t) \ .$$

On a donc une alternative : $\varphi(L_t) = \varphi(L_{t'})$ ou $\varphi(L_t) = 0$. À l'aide de la Table 1, on déduit que l'image par φ du sous-groupe de $\mathrm{NS}(X)$ engendré par les courbes L_t réelles est de dimension ≤ 1. Par ailleurs, d'après le Lemme 2.5, φ est bien défini sur $\mathrm{NS}(X)^\sigma$.

L'application

$$\varphi\colon\ \mathrm{NS}(X)^\sigma \to H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

est donc surjective et $\dim H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \leq 2$. Par hypothèse, $\dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ vérifie la même inégalité et $X(\mathbb{R})$ est connexe. Par ailleurs, le diviseur canonique $\mathcal{K}_X$ d'une surface bielliptique est de d_X-torsion avec $d_X \in \{2, 3, 4, 6\}$. D'après le Théorème 1.3, si la partie réelle $X(\mathbb{R})$ est non vide, elle est orientable, et finalement, homéomorphe à un tore. $\square$

3. Sections de la fibration d'Albanese

Considérons une surface bielliptique réelle X. Le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X)$ est engendré par une fibre X_x de α et par les courbes L_t. La fibration α admet donc une section réelle si et seulement si α admet une fibre réelle et si l'une des courbes L_t est réelle et vérifie $L_t.X_x = 1$. La première condition est équivalente à $A(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Proposition 3.1. *Soit X une surface bielliptique réelle dont la partie réelle $X(\mathbb{R})$ est homéomorphe à un tore. Si la torsion de $\mathcal{K}_X$ est impaire ou si la fibration d'Albanese α admet une section réelle, on a $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.*

Preuve. Soit X_x une fibre réelle de π, s'il existe une courbe réelle L telle que l'intersection $L.X_x$ soit impaire, on a $\varphi(X_x).\varphi(L) = 1$. Ceci impose que les classes $\varphi(X_x)$ et $\varphi(L)$ sont non nulles et engendrent $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Si $\mathcal{K}_X$ est de torsion impaire, π admet trois fibres triples. L'ensemble formé par ces trois fibres est globalement fixé par la structure réelle, l'une d'entre elles est donc réelle. En la notant $3L$, on a $L.X_x = 1$.

Si α admet une section réelle, on note L l'image de cette section. La courbe L est alors réelle et $L.X_x = 1$. □

Théorème 3.2. *Soit X une surface bielliptique réelle telle que $\mathcal{K}_X$ soit de torsion paire. Si $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$, alors α admet une section réelle.*

Preuve. D'après le Théorème 2.6, $X(\mathbb{R})$ est homéomorphe à un tore. Le groupe $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ est engendré par $\varphi(X_x)$ et $\varphi(L)$ où X_x est une fibre réelle de α et mL une fibre multiple réelle de π. Comme $X(\mathbb{R})$ est un tore, on a nécessairement $\varphi(X_x).\varphi(L) = 1$ i.e. $X_x.L \equiv 1 \mod 2$.

Considérons une fibre lisse F_0 de π et notons k l'ordre du groupe G. On a $F_0.X_x = k$ et $L_t.X_x = m_t/k$ pour toute fibre multiple m_tL_t de π. D'après la Table 1, si $G = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $G = \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$, $L_t.X_x$ est pair pour toute courbe L_t. Dans ce cas α n'admet même pas de section complexe et X ne peut vérifier $H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.

Si $G = \mathbb{Z}/2$ ou $G = \mathbb{Z}/4$, α admet des sections complexes mais pas de section réelle *a priori* (cf. Corollaire 2.4). Toujours d'après la Table 1, $L_t.X_x$ vaut 1 ou 2, donc $L.X_x = 1$ et L est une section réelle de α.

Si $G = \mathbb{Z}/6$, $L_t.X_x = 1$, 2 ou 3 mais comme les multiplicités sont distinctes, les trois fibres multiples sont nécessairement réelles et on peut supposer que mL est la fibre de multiplicité 6 de π. C'est donc l'image d'une section réelle de α. □

Corollaire 3.3. *Soit $G = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ ou $G = \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/2$ et soit X une surface bielliptique de groupe G. Toute structure réelle sur X ayant des points réels vérifie*

$$H^1_{\mathrm{alg}}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \neq H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) \ .$$

En effet, $\mathcal{K}_X$ est de torsion paire mais α n'admet pas de section complexe.

4. Conclusion

Preuve du Théorème 0.1. Le théorème en question est le regroupement des résultats 2.6, 3.2 et 3.1. □

Preuve du Théorème 0.2. Si X est une surface bielliptique de groupe G et Y une surface algébrique déformation équivalente à X sur $\mathbb{C}$, alors Y est une surface bielliptique de groupe G. Réciproquement, deux surfaces bielliptiques de même groupe sont déformation équivalentes, cf. [FM]. D'après le corollaire précédent, il existe donc exactement deux familles complètes de surfaces bielliptiques dont chaque membre vérifie l'énoncé du Théorème 0.2 □

Au vu des résultats connus précédemment, [Hu], [Ma2] et [MvH], ce sont les deux seules familles de surfaces de dimension de Kodaira nulle ayant cette propriété.

Références

[Ab] M. A. Abánades, Algebraic homology for hyperelliptic and real projective ruled surfaces, *Canad. Math. Bull.* **44** (2001), no. 3, 257–265.

[BdF] G. Bagnera e M. de Franchis, Sopra le superficie algebriche che hanno le coordinate del punto generico esprimibili con funzioni meromorfe 4^{ente} periodiche di 2 parametri, *Rendiconti Acc. dei Lincei* **16** (1907).

[BdF2] G. Bagnera e M. de Franchis, Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti, *Mem. Acc. dei XL* **15** (1908), 251–343.

[Be] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque, vol. 54, Soc. Math. de France, Paris, 1978.

[BK] J. Bochnak and W. Kucharz, On homology classes represented by real algebraic varieties, In : *Singularities symposium–Lojasiewicz 70*, Banach center publications vol. **44**, Polish Acad. Sci., 21–35, Warszawa, 1998.

[BH] E. Borel e A. Haefliger, La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique, *Bul. Soc. Math. France* **83** (1961), 461–513.

[CF] F. Catanese, P. Frediani, Real hyperelliptic surfaces and the orbifold fundamental group, `e-prints, math.AG/0012003` (2000)

[FM] R. Friedman and J. W. Morgan, *Smooth four-manifolds and complex surfaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 27, Springer-Verlag, 1994 .

[Hu] J. Huisman, *Cycles on real abelian varieties*, Preprint, 1994.

[Ku1] W. Kucharz, Algebraic equivalence and homology classes of real algebraic cycles, *Math. Nachr.* **180** (1996), 135–140. (2000)

[Ku2] W. Kucharz, Algebraic equivalence of real divisors, *Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint Series 2000* **61** (2000).

[Ma1] F. Mangolte, *Cycles algébriques réels sur les surfaces*, Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 1994.

[Ma2] F. Mangolte, Cycles algébriques sur les surfaces K3 réelles, *Math. Z.* **225** (1997), 559–576.

[Ma3] F. Mangolte, Surfaces elliptiques réelles et inégalité de Ragsdale-Viro, *Math. Z.* **235** (2000), 213–226.

[MvH] F. Mangolte and J. van Hamel, Algebraic cycles on real Enriques surfaces, *Compositio Math.* **110** (1998), 215–237.

[Si] R. Silhol, *Real Algebraic Surfaces*, Lecture Notes in Math. **1392**, Springer-Verlag, 1989.

F. Mangolte
Laboratoire de Mathématiques
Université de Savoie
73376 Le Bourget du Lac Cedex
France
Tél : (33) 4 79 75 86 60
Fax : (33) 4 79 75 81 42
e-mail : frederic.mangolte@univ-savoie.fr

(Received: January 23, 2002)